AM II.1 2019/2020 (gr. 2)
Temat 6: Ekstrema warunkowe

`(7 stycznia 2020)`

Twierdzenie (o ekstremach warunkowych). *Rozważmy funkcję* $g : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ *i odwzorowanie* $F = (f_1, \ldots, f_k) : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ *i niech* $M = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+k} \mid F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$. *Jeśli funkcja* $g\big|_M : M \to \mathbb{R}$ *ma ekstremum lokalne w punkcie* $\boldsymbol{p} \in M$ *to zachodzi jedna z dwóch sytuacji:*

1. *Gradienty* $\nabla f_1(\boldsymbol{p}), \ldots, \nabla f_k(\boldsymbol{p})$ *są liniowo zależne (tzn.* F *nie spełnia założeń tw. o sumbersji w* $\boldsymbol{p}$ *i w konsekwencji nie wiemy, czy* M *jest rozmaitością w otoczeniu* $\boldsymbol{p}$*)*
2. *Gradient* $\nabla g(\boldsymbol{p})$ *jest kombinacją liniową gradientów* $\nabla f_1(\boldsymbol{p}), \ldots, \nabla f_k(\boldsymbol{p})$*, tzn. istnieją stałe* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *(zwane mnożnikami Lagrange'e) takie, że*

$$\nabla g(\boldsymbol{p}) = \lambda_1 \nabla f_1(\boldsymbol{p}) + \ldots + \lambda_k f_k(\boldsymbol{p}) \ .$$

W obu przypadkach gradienty $\nabla g(\boldsymbol{p}), \nabla f_1(\boldsymbol{p}), \ldots, \nabla f_k(\boldsymbol{p})$ *są liniowo zależne.*

Uwaga! W przypadku gdy gradienty $\nabla f_1(\boldsymbol{p}), \ldots, \nabla f_k(\boldsymbol{p})$ *są liniowo niezależne, przestrzeń styczna* $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M$ *jest prostopadła do każdego z nich, a zatem warunek 2) oznacza, że* $\nabla g(\boldsymbol{p}) \perp \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M$*. Wynika stąd, że dla każdego* $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M$ *pochodna* $\partial_{\boldsymbol{v}} g(\boldsymbol{p}) = \langle \boldsymbol{v}, \nabla g(\boldsymbol{p}) \rangle = 0$*, a więc w pierwszym rzędzie przybliżenia* g *nie zmienia się wzdłuż* M *w otoczeniu punktu* $\boldsymbol{p}$*.*

Zadanie 1. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x, y, z) = x$ w zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8, x + y = z\} \ .$$

`Zadanie domowe na 10 stycznia:`

Dom 1. Zbadaj w jakich punktach (x, y, z) zbioru A z poprzedniego zadania wektory $[2x, 4y, 4z]$, $[1, 1, -1]$ i $[1, 0, 0]$ są liniowo zależne. *Wskazówka*: Policz wyznacznik odpowiedniej macierzy.

`(10 stycznia 2020)`

Zadanie 2. Niech

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 6\} \ .$$

Uzasadnij, że funkcja $F : K \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ osiąga na zbiorze K wartość maksymalną. Znajdź tę wartość.

Zadanie 3. W zbiorze $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz = 1\}$ znajdź punkt najbardziej odległy od osi OZ.

Zadanie 4. Znajdź kres górny funkcji $f(x, y, z) = xy - z$ na zbiorze

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x + y + z \ge 0\} \ .$$

`Zadania domowe na 14 stycznia:`

Dom 2. Dokończyć ostatnie zadanie: zbadać kresy funkcji na zbiorze $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ i na zbiorze $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0, z^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Dom 3. Obliczyć supremum funkcji $f(x, y, z) = xyz$ na zbiorze

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9, xy + yz + xz = 8\} .$$

`Można jeszcze zgłaszać niesprawdzone zadania na 10 stycznia.`

`(14 stycznia 2020)`

Jeszcze słówko o rozmaitościach. *Intuicyjnie n-wymiarowa rozmaitość $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ to zbiór, który lokalnie wygląda jak $\mathbb{R}^n$ (trochę pokrzywiony). Formalna definicja jest następująca:*

Definicja. Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ nazywamy *n-wymiarową rozmaitością zanurzoną w* $\mathbb{R}^{n+k}$ (klasy C^r) gdy dla każdego punktu $\boldsymbol{p} \in M$ istnieje jego otoczenie $U \ni \boldsymbol{p}$ w $\mathbb{R}^{n+k}$ oraz dyfeomorfizm $\Phi : U \to \Phi(U) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ (klasy C^r), który „prostuje” $M \cap U$ do zbioru otwartego w $\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}_k\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$, tj.

$$\Phi(M \cap U) = \Phi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}_k\}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^{n+k} .$$

Z praktycznego punktu widzenia mamy zasadniczo dwa sposoby definiowania rozmaitości:

1. *Jako przeciwobraz punktu przy odwzorowaniu $F = (f_1, f_2, \ldots, f_k) : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$, t.j. $M = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+k} \mid F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\}$, przy czym rząd pochodnej $\mathrm{d}F$ powinien być maksymalny możliwy, tj. równy k.*
2. *Jako obraz małego zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^n$ przy odwzorowaniu $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$, gdzie również rząd pochodnej $\mathrm{d}\phi$ powinien być maksymalny możliwy, tj. równy n.*

Pierwszy przypadek opisuje znane nam już twierdzenie o submersji ($\mathrm{d}F(\boldsymbol{p})$ musi być maksymalnego rzędu w punktach $\boldsymbol{p} \in M$, inaczej gradienty $\nabla f_1(\boldsymbol{p}), \ldots, \nabla f_k(\boldsymbol{p})$ są liniowo niezależne w punktach $\boldsymbol{p} \in M$). Wówczas przestrzeń styczna $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M = \ker \mathrm{d}F(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+k} \mid \nabla f_1(\boldsymbol{p}) \perp \boldsymbol{v}, \ldots, \nabla f_k(\boldsymbol{p}) \perp \boldsymbol{v}\}$.
Drugi przypadek opisuje następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Zbiór $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ jest n-wymiarową rozmaitością zanurzoną (klasy C^r) gdy dla każdego punktu $\boldsymbol{p} \in M$ istnieje otoczenie $U \ni \boldsymbol{p}$ w $\mathbb{R}^{n+k}$ oraz zbiór otwarty $V \subset \mathbb{R}^n$ i przekształcenie $\phi : V \to \mathbb{R}^{n+k}$ (klasy C^r) o następujących własnościach:*

- *$\phi(V) = M \cap U$ i ϕ jest hoemomorfizmem V na swój obraz.*
- *rząd pochodnej $\mathrm{d}\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ jest maksymalny, tj. równy n, w punktach zbioru V.*

Takie odwzorowanie ϕ nazywamy (lokalną) parametryzacją *M w punkcie $\boldsymbol{p}$.*
Ponadto przestrzeń styczna do M w punkcie $\boldsymbol{p} = \phi(\boldsymbol{x})$ to obraz $\mathbb{R}^n$ przy pochodnej parametryzacji:

$$\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M = \mathrm{d}\phi(\boldsymbol{x})(\mathbb{R}^n), \quad \textit{gdzie } \boldsymbol{p} = \phi(\boldsymbol{x}).$$

Wynika stąd następujący wniosek

Twierdzenie (o immersji). *Niech $\phi : \mathbb{R}^n \overset{otw}{\supset} V \to \mathbb{R}^{n+k}$ będzie przekształceniem klasy C^r, i załóżmy, że rząd pochodnej $\mathrm{d}\phi(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ jest maksymalny (równego n) w każdym punkcie $\boldsymbol{x} \in V$.*
Wówczas dla każdego $\boldsymbol{x} \in V$ obraz $\phi(V')$ pewnego małego otoczenia $\boldsymbol{p} \in V' \subset V$ jest n jest n-wymiarową rozmaitością zanurzoną w $\mathbb{R}^{n+k}$ klasy C^r. Ponadto $\mathrm{T}_{\phi(\boldsymbol{x})}\, \phi(V') = \mathrm{d}\phi(\boldsymbol{x})(\mathbb{R}^n)$.

Uwaga! Może się zdarzyć, że pełny obraz $\phi(V)$ nie jest rozmaitością – na przykład ϕ może nie być różnowartościowe, albo punkty obrazu akumulują się w jakimś punkcie $\mathbb{R}^{n+k}$.

`Zadanie domowe na 17 stycznia 2020:`

Dom 4. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy C^1 i niech $M = \{(\boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n\}$ będzie jej wykresem. Wykaż, że M jest n-wymiarową rozmaitością różniczkową zanurzoną w $\mathbb{R}^{n+1}$ i wyznacz przestrzeń styczną $\mathrm{T}_{(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0))} M$. *Wskazówka*: Można zapisać M jako poziomicę pewnej funkcji $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

(17 stycznia 2020)

Zadanie 5. Rozpatrzmy odwzorowanie $\phi : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$\phi(t) = (-\sin(t)\sin(2t), \cos(t)\sin(2t)) \ .$$

Naszkicuj obraz $\phi(-\pi, \pi)$. Wykaż, że ϕ jest odwzorowaniem gładkim, którego różniczka w każdym punkcie ma rząd równy 1. Wykaż, że $\phi(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nie jest rozmaitością zanurzoną w $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 6. Zbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ zadany jest parametrycznie

$$M = \{(t, 0, 0) + s(0, 1, t) \mid t, s \in \mathbb{R}\} \ .$$

Wykaż, że M jest 2-wymiarową rozmaitością różniczkową w $\mathbb{R}^3$. Znajdź przestrzeń styczną $\mathrm{T}_{(1,1,1)}\, M$.
