AM II.1 2019/2020 (gr. 2)
Temat 5: TFO i TFU

(6 grudnia 2019)

Odwzorowanie $F : U \to V$ pomiędzy podzbiorami otwartymi $U, V \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy dyfeomorfizmem *(klasy C^1) gdy*

- *F jest bijekcją, a więc istnieje odwzorowanie odwrotne $F^{-1} : V \to U$.*
- *F i F^{-1} są różniczkowalne (ponieważ różniczkowalność pociąga za sobą ciągłość, F jest jednocześnie homeomorfizmem).*

W przypadku, gdy F i F^{-1} są różniczkowalne klasy C^k mówimy o dyfeomorfizmach klasy C^k.

Bezpośrednio z definicji i z reguły łańcuchowej wynika, że pochodna odwzorowania F^{-1} w punkcie $\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x})$ to przekształcenie odwrotne do pochodnej odwzorowanie F w punkcie $\boldsymbol{x}$. Istotnie, mamy:

$$F(F^{-1}(\boldsymbol{y})) = y \quad \textit{oraz} \quad F^{-1}(F(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}, \quad \textit{dla dowolnych } \boldsymbol{x} \in U \textit{ oraz } \boldsymbol{y} \in V.$$

Różniczkując oba te wyrażenia i korzystając z reguły łańcuchowej mamy:

$$\mathrm{d}F(F^{-1}(\boldsymbol{y})) \circ \mathrm{d}F^{-1}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{id} \quad \textit{oraz} \quad \mathrm{d}F^{-1}(F(\boldsymbol{x})) \circ \mathrm{d}F(\boldsymbol{x}) = \mathrm{id}\ ,$$

kładąc $\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x})$ dostajemy, że przekształcenia liniowe $\mathrm{d}F(\boldsymbol{x})$ i $\mathrm{d}F^{-1}(F(\boldsymbol{x}))$ są wzajemnie odwrotne. Wynika stąd, że pochodna dyfeomorfizmu jest odwracalnym przekształceniem liniowym. Okazuje się że (lokalnie) zachodzi też twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie (o funkcji odwrotnej). *Jeśli odwzorowanie $F : U \to V$ klasy C^1 ma w jakimś punkcie $\boldsymbol{p} \in U$ nieosobliwą pochodną $\mathrm{d}F(\boldsymbol{p})$, to F jest w pewnym otoczeniu $\Omega \ni \boldsymbol{p}$ odwracalna i F^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $F(\boldsymbol{p})$. Innymi słowy, F jest lokalnym dyfeomorfizmem między Ω i $F(\Omega)$.*

Jako wniosek mamy następujący przydatny fakt:

Lemat 1. *Niech odwzorowanie $F : U \to V$ klasy C^1 będzie bijekcją pomiędzy zbiorami otwartymi $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Jeśli pochodna $\mathrm{d}F(\boldsymbol{p})$ jest nieosobliwa w każdym punkcie $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ to F jest dyfeomorfizmem. Ogólniej: jeśli F jest bijekcją klasy C^k o nieosobliwej pochodnej, to jest też dyfeomorfizmem klasy C^k.*

Ponadto dyfeomorfizmy mają własności grupowe: można je ze sobą składać i odwracać i wynik nadal pozostaje dyfeomeorfizem.

Lemat 2 (Grupowe własności dyfeomorofrizmów).

- *Jeśli $F : U \to V$ jest dyfeomorfizmem to $F^{-1} : V \to U$ też.*
- *Jeśli $F : U \to V$ i $G : V \to W$ są dyfeomorfizmami to złożenie $G(F) : U \to W$ też.*

Zadanie 1. Rozważmy odwzorowanie $F(x, y) = (x^2 + y - y^2, 2xy + y)$. Znajdź wszystkie punkty, w których F jest lokalnie odwracalna (i jej odwrotność jest różniczkowalna). Wykaż, że punkt $(2, 1)$ jest jednym z nich i oblicz różniczkę F^{-1} w punkcie $(4, 5)$.

Zadanie 2. Oblicz różniczkę odwzorowania biegunowego $F : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$

$$F(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta).$$

Wykaż, że F jest dyfeomorfizmem na obraz.

Zadanie 3. Skonstruuj dyfeomorfizm

a) odcinka $(0,1)$ na $\mathbb{R}$.

b) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ na otwartą kulę jednostkową $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

c) otwartego kwadratu $K = \{(x,y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$ na $\mathbb{R}^2$.

d) otwartego kwadratu $K = \{(x,y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$ na otwarte koło $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

`Zadania domowe na 10 grudnia:`

Dom 1. Skonstruuj dyfeomorfizm

a) płaszczyzny bez punktu $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ na płaszczyznę bez koła $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

b) otwartego prostokąta $P = \{(x,y) \mid |x| < 1, |y| < 3\}$ na otwarte półkole $B' = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$.

c) zbioru $A = \{(x,y) \mid 0 < x < y\}$ na półpłaszczyznę $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Dom 2. Sprawdź, czy przekształcenie $F(x,y) = (2xy, x^2 - y^2)$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ na obraz. Czy jest lokalnym dyfeomorfizmem?

`(10 grudnia 2019)`

Zadanie 4. Niech $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy C^1 takimi, że $f(x) < g(x)$ dla wszystkich $x \in (a,b)$. Przekształcić dyfeomorficznie zbiór $\{(x,y) \mid x \in (a,b), f(x) < y < g(x)\}$ na prostokąt $(a,b) \times (0,1)$.

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 określoną na zbiorze otwartym U. Wybierzmy $(x_0, y_0) \in U$. Skonstruuj dyfeomorfizm postaci $\phi(x,y,z) = (x,y,w)$ zdefiniowany w pewnym otoczeniu $W \subset \mathbb{R}^3$ punktu $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ przeprowadzający powierzchnię $\{(x,y,z) \mid z = f(x,y)\}$ na powierzchnię $\{(x,y,w) \mid w = 2019\} \cap \phi(W)$.

Twierdzenie o funkcji uwikłanej mówi kiedy układ równań $f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \ldots = f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ daje się rozwiązać względem zmiennych $\boldsymbol{y}$. Będziemy mówili, że $\boldsymbol{x}$ to zmienne niezależne, *a $\boldsymbol{y}$ to* zmienne zależne. *Intuicyjnie, k równań w przestrzeni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ powinno opisywać zbiór n-wymiarowy ($n = n + k - k$). Będzie tak, o ile f_i są funkcjonalnie niezależne i niezdegenerowane względem zmiennych zależnych $\boldsymbol{y}$. Dokładne sformułowanie jest następujące:*

Twierdzenie (o funkcji uwikłanej). *Niech $F = (f_1, \ldots, f_k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ będzie funkcją klasy C^1. Rozważmy punkt $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, taki, że $F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \mathbf{0}$. Załóżmy, że różniczka $\mathrm{d}_{\boldsymbol{y}} F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ (różniczka F względem zmiennych zależnych $\boldsymbol{y}$ w punkcie $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$) jest nieosobliwa.*
Wówczas istnieje pewne otoczenie $U \ni (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ i odwzorowanie $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ klasy C^1, takie że $\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x})$ rozwiązuje równanie $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$ w U. To znaczy: dla dowolnego $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in U$ równanie $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$ jest spełnione wtedy i tylko wtedy gdy $\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x})$.

Zauważmy, że odwzorowanie ϕ o którym jest mowa w twierdzeniu spełnia tożsamość $F(\boldsymbol{x}, \phi(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$ w otoczeniu punktu $(\boldsymbol{x}_0)$. Różniczkując ją względem $\boldsymbol{x}$ można uzyskać wiedzę o pierwszej różniczce $D_{\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x})$. W szczególności jeśli regularność F jest wyższa niż C^1 możemy podnieść regularność ϕ. Kolejne różniczkowania pozwalają obliczyć kolejne różniczki ϕ.

Zadanie 6. Uzasadnić, że równanie $z^5 - xz + y^2 = 0$ w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$ wyznacza zmienną z jako funkcję pozostałych zmiennych $z = g(x, y)$ klasy C^∞. Napisać wielomian Taylora stopnia 2 funkcji g w otoczeniu punktu $(1, 0)$.

`Zadania domowe na 13 grudnia:`

Dom 3. Obliczyć pierwsze pochodne $\frac{\partial g}{\partial x}$ i $\frac{\partial g}{\partial y}$ dla funkcji $g(x, y)$ z poprzedniego zadania.

`Pisemnie na 17 grudnia:`

Dom 4. Skonstruuj dyfeomorfizm trójkąta (bez brzegu) o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ na kwadrat $K = \{(x, y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$.

`(13 grudnia 2019)`

Zadanie 7. Wskaż dyfeomorfizm $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \setminus\{\mathbf{0}\}$ taki, że obrazem zbioru $B(\mathbf{0}, 9) \setminus \overline{B(\mathbf{0}, 1)}$ jest zbiór $B(\mathbf{0}, 4) \setminus \overline{B(\mathbf{0}, 1)}$.

Zadanie 8. Rozważmy odwzorowanie $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1+\|\boldsymbol{x}\|}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gdzie $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Znaleźć obraz przekształcenia f i wykazać, że f jest dyfeomorfizmem z $\mathbb{R}^n$ na ten obraz.

`Zadanie domowe na 17 grudnia:`

Dom 5. Uzasadnić, że w otoczeniu punktu $(2, -1, 1)$ równanie $xz = 2 + y \ln z$ wyznacza $z(x, y)$ klasy C^2. Obliczyć $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2, -1)$.

`(17 grudnia 2019)`

Zadanie 9. Wykazać, że układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^3 + z^4 = 2 \end{cases}$$

Wyznacza y i z jako funkcje x w otoczeniu $x_0 = 0$ przy warunkach $y(0) = 1$ i $z(0) = -1$. Obliczyć pochodne $y'(0)$, $z'(0)$, $y''(0)$ i $z''(0)$.

Twierdzenie o funkcji uwikłanej mówi, że zbiór opisany równaniem $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$, gdzie $F = (f_1, \ldots, f_k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ jest klasy C^k, jest w otoczeniu punktu $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ wykresem odwzorowania $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ klasy C^k, o ile F jest niezdegenerowane w kierunku zmiennych zależnych, tzn. różniczka $\mathrm{d}_{\boldsymbol{y}} F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ jest nieosobliwa. Zbiór $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$, który lokalnie (w otoczeniu każdego punktu) wygląda jak wykres odwzorowania $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ klasy C^k nazywamy rozmaitością n-wymiarową klasy C^k *zanurzoną w $\mathbb{R}^{n+k}$.*

W tej definicji nie interesuje nas które ze współrzędnych w $\mathbb{R}^{n+k}$ pełnią rolę zmiennych zależnych, a które niezależnych. Na mocy TFU aby otoczenie punktu $\boldsymbol{p}_0$ należącego do zbioru $M = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+k} \mid F(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}$ było rozmaitością wystarczy, aby znaleźć pewien podział współrzędnych $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, w którym spełnione jest założenie TFU. Do tego z kolei wystarcza, aby wiersze pełnej macierzy różniczki $\mathrm{d}F$ były liniowo niezależne w każdym punkcie M. Otrzymujemy twierdzenie:

Twierdzenie (o submersji). *Niech $F = (f_1, \ldots, f_k) : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ będzie odwzorowaniem klasy C^k. Jeśli w każdym punkcie $\boldsymbol{p}$ zbioru $M = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+k} \mid F(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}$ (pełna) różniczka $\mathrm{d}F(\boldsymbol{p}) : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ jest przekształceniem liniowym maksymalnego rzędu (równoważnie: jeśli gradienty $\nabla f_1(\boldsymbol{p}), \ldots, \nabla f_k(\boldsymbol{p})$ są liniowo niezależne) to M jest n-wymiarową rozmaitością zanurzoną.*
Ponadto przestrzeń styczna $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M = \ker \mathrm{d}F(\boldsymbol{p})$ (równoważnie $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{v} \perp \nabla f_i(\boldsymbol{p})$ dla $i = 1, \ldots, k\}$).

W szczególności: zbiór opisany pojedynczym równaniem $M = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N \mid f(\boldsymbol{v}) = 0\}$, gdzie $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^k, taką że $\nabla f(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$ w każdym punkcie $\boldsymbol{v} \in M$, jest rozmaitością $(N-1)$-wymiarową klasy C^k zanurzoną w $\mathbb{R}^N$. Ponadto $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N \mid \langle \boldsymbol{v}, \nabla f(\boldsymbol{p}) \rangle\}$ – tj. gradient jest prostopadły do poziomicy.

Zadanie 10. Niech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^4 + xyz = 4\}$. Wykaż, że M jest rozmaitością dwuwymiarową klasy C^1 w $\mathbb{R}^3$.

`Zadania domowe na 20 grudnia:`

Można jeszcze zgłaszać poprzednie zadanie domowe.

Dom 6. Rozważmy zbiór $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 6\}$. Wykaż, że w każdym punkcie $\boldsymbol{p} \in M$ gradienty funkcji $f_1(x, y, z) := x + y + z$ oraz $f_2(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ są liniowo niezależne.

`(20 grudnia 2019)`

Zadanie 11. Niech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^4 + xyz = 4\}$. Wyznacz przestrzeń styczną do M w punkcie $(\sqrt[3]{3}, 0, -1)$.

Zadanie 12. Rozważmy zbiór $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 6\}$. Wykaż, że M jest rozmaitością 2-wymiarową. Wyznacz przestrzeń styczną do M w punkcie ((2, 1, 1).

Zadanie 13. Niech $S = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2\}$. Wykaż, że zbiór $S \setminus \{(0, 0)\}$ jest rozmaitością różniczkową zanurzoną w $\mathbb{R}^2$. Czy S jest rozmaitością? *Wskazówka*: Wyznacz przestrzeń styczną $\mathrm{T}_{(0,0)} S$.

`Zadanie pisemne na 7 styczna 2020:`

Dom 7. Uzasadnić, że w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 0, 0)$ układ równań

$$\begin{cases} e^u + v & = xy \\ 2u + e^v & = 2y - x \end{cases}$$

wyznacza u i v jako funkcje klasy C^1 zmiennych x i y. Obliczyć różniczkę $\phi : (x, y) \mapsto (u, v)$ w punkcie $(1, 1)$.
