AM II.1 2019/2020 (gr. 2)
Temat 4: Ekstrema funkcji wielu zmiennych, wzór Taylora

(12 listopada 2019)

Twierdzenie (Zasada Fermat'a). *Jeśli funkcja różniczkowalna $F: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, określona na zbiorze otwartym U ma ekstremum (lokalne) w punkcie $\mathbf{p} \in U$ to $\nabla F(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.*

Wniosek (Metoda policyjna znajdowania ekstremów (lokalnych)). Rozważmy funkcję $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określoną na pewnym zbiorze $A \subset \mathbb{R}^n$. Interesują nas (lokalne) ekstrema funkcji F na A. Typujemy podejrzanych:

1. Punkty zerowania się gradientu F.
2. Wszystkie punkty patologiczne: punkty nieróżniczkowalności F, punkty brzegowa A itp.

Oczywiście to że ktoś jest podejrzany nie znaczy, że jest od razu winny... Co więcej, nawet bycie jedynym podejrzanym tego nie oznacza. Na przykład gdy A nie jest zwarty, to nawet gdy F jest różniczkowalna w każdym punkcie $\operatorname{int} A$, może nie przyjmować swoich kresów w A.

Zadanie 1. Wyznacz kresy funkcji $f(x, y) = x^2+xy+2y^2$ na kuli $K = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

Zadania domowe na 15 listopada:

Dom 1. Dokończyć poprzednie zadanie, tzn. znajdź ekstrema lokalne funkcji $F(\alpha) := f(\cos\alpha, \sin\alpha)$ na zbiorze $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Dom 2. Wyznacz punkty zerowania się gradientu funkcji $f(x, y) = (3x + 2y)e^{-4x^2-y^2}$ na $\mathbb{R}^2$.

(15 listopada 2019)

Zadanie 2. Znajdź kresy funkcji $f(x, y) = (3x + 2y)e^{-4x^2-y^2}$ na $\mathbb{R}^2$.

Zadania domowe na 19 listopada:

Dom 3. Dokończyć ostatnie zadanie, tzn. z faktu, że $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x, y) = 0$ i z tego że jedyne punkty krytyczne f to $\pm\left(\frac{3}{10\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$ wywnioskować jak wyglądają kresy zboiru wartości funkcji f na $\mathbb{R}^2$.

Dom 4. Wyznacz kresy funkcji $f(x, y) = x(y - x)e^{-y}$ na zbiorze $T = \{(x, y) \mid -1 \leq 3x \leq 2y \leq 6\}$.

Zadanie pisemne na 22 listopada 2019 - poprawka zadania na poprzednie ćwiczenia:

Dom 5. Zbadać różniczkowalność w całej dziedzinie funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{y} & \text{dla } y \neq 0 \text{ i } xy > -1 \\ \frac{x}{2} & \text{dla } y = 0. \end{cases}$$

(19 listopada 2019)

Zadanie 3. Niech $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 + 4 = 0\}$. Znaleźć w zbiorze A punkt którego odległość od punktu $(2, 4, 0)$ jest najmniejsza.

Zadanie 4. Wyznacz kresy funkcji $f(x,y) = \frac{y}{x^2+4y^2+1}$ na $A = \{(x,y) \mid x \geq 0\}$.

`Zadanie domowe na 22 listopada:`

Dom 6. Dokończyć ostatnie zadanie – pokazaliśmy że kresy funkcji są przyjmowane na prostej $x = 0$.

Dom 7. Na powierzchni $z = xy + 1$ znaleźć punkt położony najbliżej początku układu współrzędnych.

`Zadania pisemne na 26 listopada:`

Dom 8. Funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia tożsamość

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \ .$$

Wykaż, że f jest stała.

Wskazówka: Wykaż, że f jest stała na każdej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$.

Dom 9. Wyznacz kresy funkcji $f(x,y) = \frac{x^2y}{x+1}e^{-xy}$ na zbiorze $A = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x\}$.

`(22 listopada 2019)`

Zadanie 5. Obliczyć kresy funkcji $f(x,y) = \frac{x\ln(1+y)}{2x^2+y^2}$ na zbiorze $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq y \leq 1\}$.

Wzór Taylora i ekstrema lokalne

Twierdzenie. *Rozważmy funkcję $F : U \to \mathbb{R}^n$ klasy C^k określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$. Wówczas, w otoczeniu punktu $\boldsymbol{x}_0 \in U$ możemy przybliżyć F następującym wzorem Taylora k-tego rzędu:*

$$F(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = F(\boldsymbol{x}_0) + \mathrm{d}F(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h}] + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2F(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}] + \ldots + \frac{1}{k!}\mathrm{d}^kF(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h},\ldots,\boldsymbol{h}] + o(\|\boldsymbol{h}\|^k) \ .$$

W powyższym wzorze $\mathrm{d}^sF(\boldsymbol{x}_0) : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oznacza s-tą pochodną F w punkcie $\boldsymbol{x}_0$ rozumianą jako odwzorowanie s-liniowe z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}$.

Z praktycznego punktu widzenia wygodnie jest zapisać powyższy wzór przy pomocy pochodnych cząstkowych

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = F(\boldsymbol{x}_0) &+ \sum_{i_1} \frac{\partial F}{\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x}_o)h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i_1,i_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(\boldsymbol{x}_0)h_{i_1}h_{i_2} + \ldots + \\ &+ \frac{1}{k!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}(\boldsymbol{x}_0)h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_k} + o(\|\boldsymbol{h}\|^k) \ . \end{aligned}$$

Jak widzimy (wyższe) pochodne cząstkowe pełnią w powyższym wzorze rolę współczynników wielomianowego przybliżenia funkcji $\boldsymbol{h} \mapsto F(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h})$.
Badając rozwinięcie do rzędu 2 otrzymamy proste kryterium badania ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych

Twierdzenie. *Rozważmy funkcję $F : U \to \mathbb{R}$ klasy C^2 określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$. Niech$\boldsymbol{p} \in U$ będzie jej punktem krytycznym (tj. $\nabla F(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$).* Hesjanem *$F$ w punkcie $\boldsymbol{p}$ nazywamy macierz kwadratową symetryczną (tw. Schwarza!) złożoną z drugich pochodnych cząstkowych F w $\boldsymbol{p}$, tj.*

$$H(F)(\boldsymbol{p}) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{p})\right)_{i,j} \ .$$

Jeśli macierz $H(F)(\boldsymbol{p})$ jest *(i)* *dodatnio określona,* $H(F)(\boldsymbol{p}) > 0$*, to* F *ma w* $\boldsymbol{p}$ *minimum lokalne*

(ii) *ujemnie określona,* $H(F)(\boldsymbol{p}) < 0$*, to* F *ma w* $\boldsymbol{p}$ *maksimum lokalne*

(iii) *nieokreślona, to* F *nie ma w* $\boldsymbol{p}$ *ekstremum lokalnego*

(iv) *w przypadku nieujemnej określoności,* $H(F)(\boldsymbol{p}) \geq 0$ *(odp. niedodatniej określoności* $H(F)(\boldsymbol{p}) \leq 0$*) nie możemy wykluczyć istnienia lokalnego minimum (odp. maksimum), ale musimy taki przypadek dokładniej zbadać.*

Przypominamy, że określoność macierzy kwadratowej i symetrycznej A *możemy badać przy użyciu* ***kryterium Sylvestera*** *badając znaki kolejnych minorów głównych* $A_1, A_2, \ldots, A_n$*:*

- *Jeśli* $\det A_1 > 0, \det A_2 > 0, \ldots, \det A_n > 0$ *to* A *jest dodatnio określona.*
- *Jeśli* $(-1)\det A_1 > 0, (-1)^2 \det A_2 > 0, \ldots, (-1)^n \det A_n > 0$ *to* A *jest ujemnie określona.*
- *Jeśli* $\det A_1 \geq 0, \det A_2 \geq 0, \ldots, \det A_n \geq 0$ *to* A *jest nieujemnie określona.*
- *Jeśli* $(-1)\det A_1 \geq 0, (-1)^2 \det A_2 \geq 0, \ldots, (-1)^n \det A_n \geq 0$ *to* A *jest niedodatnio określona.*
- *Jeśli nie zachodzi żadne z powyższych, to* A *jest nieokreślona.*

`Zadania domowe na 26 listopada:`

Dom 10. Znaleźć punkty zerowanie się gradientu funkcji f, policzyć macierz drugiej pochodnej w tych punktach, i wyjaśnić w których z nich ma ona lokalne minima, maksima, a w których nie ma lokalnego ekstremum.

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$,

b) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

`(26 listopada 2019)`

Zadanie 6. Wyznacz lokalne ekstrema funkcji

a) $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 + y^4$ na $\mathbb{R}^2$

b) $f(x, y, z) = 3xy + xz + yz - 2x^3$ na $\mathbb{R}^3$.

Definicja. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym podzbiorem i niech $\boldsymbol{p} \in M$. *Stożkiem stycznym* (*przestrzenią styczną*) do M w punkcie $\boldsymbol{p}$ nazywamy zbiór

$$\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M := \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \exists_{\boldsymbol{x}_n \in M \setminus \{\boldsymbol{p}\},\ \boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{p}} \quad \frac{\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}\|} \to \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\} \cup \{\boldsymbol{0}\}\ .$$

Stożek styczny opisuje infinitezymalne kierunki, w których można wyjść z punktu $\boldsymbol{p}$ *poruszając się wewnątrz zbioru* M*.*

Zadanie 7. Wyznacz stożek styczny do zbioru $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$ w punktach $(1, 1)$ i $(0, 0)$.

Zadanie 8. Wyznacz stożek styczny do zbioru $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq x^3\}$ w punkcie $(0, 0)$.

Dom 11. Wykazać, że funkcja $F(x, y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ ma nieskończenie wiele maksimów lokalnych, chociaż nie ma żadnego minimum lokalnego.

Dom 12. Wyznacz stożek styczny w punkcie $(0,0)$ do zbioru

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, |x| < |y|\} \ .$$

Wskazówka: Łatwo zauważyć, że $A \subset B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \text{ lub } (y < 0 \text{ i } |x| < |y|)\}$. Następnie można wykazać, że każdy kierunek ze stożka stycznego $T_{(0,0)}B$ uzyskamy jako granicę ciągów $\frac{\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{0}}{\|\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{0}\|}$ gdzie $\boldsymbol{p}_n \in A$ zbiega do $\boldsymbol{0}$.

`(29 listopada 2019)`

Zadanie 9. Znaleźć rozwinięcie funkcji

$$f(x,y) = \exp(xy^2) - \ln(1+xy)$$

w szereg Taylora wokół punktu $(0,0)$

a) do rzędu 2,

b) do rzędu 3.

Zadanie 10. Niech a będzie parametrem rzeczywistym. Znaleźć rozwinięcie funkcji

$$f(x,y) = ay(e^x - 1) + x\sin(x) + 1 - \cos y$$

w szereg Taylora wokół punktu $(0,0)$ do rzędu 3. Wywnioskować, że $(0,0)$ jest punktem krytycznym f. Rozstrzygnąć dla jakich wartości a funkcja f ma ekstremum lokalne w $(0,0)$.
Wskazówka: w przypadku gdy macierz drugiej pochodnej jest nieujemnie określona przydatna może być analiza wyższych wyrazów rozwinięcia funkcji f.

Zadanie 11. Cykloida – krzywa jaką zakreśla punkt leżący na obręczy o promieniu r toczącej się wzdłuż prostej – jest opisana parametrycznie:

$$\begin{cases} x(t) = & r(t - \sin(t)) \\ y(t) = & r(1 - \cos(t)) \end{cases} ,$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$. Wyznacz stożek styczny do cykloidy w dowolnym ustalonym punkcie $(x(t_0), y(t_0))$.
`Nie ma pracy domowej na 3 grudnia.`

`(3 grudnia 2019)`

Zadanie 12. Czy istnieje funkcja gładka $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dla której

$$\nabla f(x,y) = [2xy, yx^2]?$$

Zadanie 13. Obliczyć wielomian Taylora stopnia 3 w punkcie $\boldsymbol{a}$ funkcji

a) $e^{x+y+z} - xyz$, $\boldsymbol{a} = (0,0,0)$,

b) xyz, $\boldsymbol{a} = (1, -1, 2)$,

Zadanie 14. Dana jest funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ taka, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \operatorname{tg}(x)\sin(y)}{x^2 + y^2} = 0 \ .$$

Oblicz $f_{xy}(0,0)$. Co się zmieni, gdy powyższa granica będzie równa 1?

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określona na otwartym podzbiorze $U \subset \mathbb{R}^n$ jest *klasy* C^k (piszemy $f \in C^k(U)$) gdy f posiada w U wszystkie pochodne cząstkowe do rzędu k włącznie i są one ciągłe w U.
Gdy funkcja jest klasy C^k dla każdego $k \in \mathbb{N}$ (tzn. jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna), mówimy że jest *gładka*, bądź *klasy* C^∞ (piszemy $f \in C^\infty(U)$).
Gdy funkcja jest lokalnie sumą swojego nieskończonego szeregu Taylora (tzn. dla każdego $\boldsymbol{p} \in U$ istnieje otoczenie $\boldsymbol{p}$, w którym zachodzi równość) mówimy, że jest *analityczna*, bądź *klasy* C^ω (piszemy $f \in C^\omega(U)$).

Zadanie 15. Wykaż, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ y & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest klasy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

`Zadania domowe na 6 grudnia 2019:`

Dom 13. Obliczyć wielomian Taylora stopnia 3 w punkcie $\boldsymbol{a} = (1,1)$ funkcji $f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$.

Dom 14. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(a+x, b+y) - f(a,b) - ay - bx - x^2 - y^2}{|x|^3 + |y|^3} = 0 \ ,$$

lub wykaż, że taka funkcja nie istnieje.

`Zadanie pisemne na 9 grudnia:`

Dom 15. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja $\cos(x+y) + a\operatorname{tg}(xy)$ ma w punkcie $(0,0)$ lokalne maksimum, dla jakich lokalne minimum, a dla jakich nie ma w $(0,0)$ ekstremum lokalnego. *Wskazówka*: Dla pewnych wartości a pomocne może być (ale nie musi) rozważenie wyższych niż 2gi rzędów rozwinięcia funkcji.
