AM II.1 2019/2020 (gr. 2)
Temat 3: Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych

(22 października 2019)

Zadanie 1. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y) = x\cos y$ i $g(x,y) = x^y$, $h(x,y) = \operatorname{arctg}(\frac{x}{y})$, $k(x,y) = |xy|$.

Zadanie domowe na 25 października:

Dom 1. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y,z) = x^{(y^z)}$.

Zadanie 2. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y,z) = e^x \sin y + e^y \sin(2z) + e^z \sin(3x) \ .$$

Zadanie 3. (gr. 2) Rozważmy funkcję

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y = x^2, x > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x,y). \end{cases}$$

Sprawdź, że funkcja F ma pochodne cząstkowe w $(0,0)$, lecz mimo to nie jest ciągła w $(0,0)$.

Morał z powyższego zadania: istnienie pochodnych cząstkowych, a nawet pochodnych kierunkowych w każdym kierunku nie gwarantuje nawet ciągłości funkcji, nie mówiąc już o jej różniczkowalności.

Zadanie 4. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ w punkcie $(3,1)$ w kierunku wektora $[-1,2]$.

Przypomnijmy, że pochodna kierunkowa funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ w punkcie $\boldsymbol{a}$ w kierunku wektora $\boldsymbol{v}$ to

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\cdot \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{h} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\boldsymbol{a} + t\cdot\boldsymbol{v}) \ .$$

Zadanie 5. Zbadać różniczkowalność w punkcie $(0,0)$ funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zadanie 6. Zbadać różniczkowalność powyższej funkcji w pozostałych punktach dziedziny.

Zadanie 7. Czy pochodne cząstkowe funkcji powyższej funkcji są ciągłe w $(0,0)$?

Przypomnijmy podstawowe informacje o różniczkowalności odwzorowań $F = (f^1, f^2, \ldots, f^k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$:

- różniczka odwzorowania *F w punkcie $\boldsymbol{a}$ to odwzorowanie liniowe* $\mathrm{d}F(\boldsymbol{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *przybliżająca w tym punkcie odwzorowanie F do wyrazów rzędu 2, tzn.*

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - \mathrm{d}F(\boldsymbol{a})[\boldsymbol{h}]\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0 \ . \tag{1}$$

- *Z powyższego wynika, że odwzorowanie $F = (f_1, \dots, f_k)$ jest różniczkowalne wtedy i tylko wtedy gdy każda z funkcji f_j dla $j = 1, \dots k$ jest różniczkowalna.*
- *jeśli różniczka $\mathrm{d}F(\boldsymbol{a})$ istnieje, to istnieją wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(\boldsymbol{a})$, a ponadto odwzorowanie liniowe $\mathrm{d}F(\boldsymbol{a})$ jest zadane przez macierz pochodnych cząstkowych*

$$\mathrm{d}F(\boldsymbol{a})[h^1, \dots, h^n] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n}(\boldsymbol{a}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_k}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \dots \\ h^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \nabla f_1(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{h} \rangle \\ \dots \\ \langle \nabla f_k(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{h} \rangle \end{bmatrix} ,$$

  gdzie $\nabla f(\boldsymbol{a}) = [\frac{\partial f}{\partial x^1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(\boldsymbol{a})]$ oznacza gradient funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *w punkcie* $\boldsymbol{a}$.
- *Związek z AM I: $g'(a)$ – pochodna funkcji jednej zmiennej $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w punkcie a wyznacza następującą różniczkę (odwzorowanie liniowe z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$) $\mathrm{d}g(a) : h \mapsto g'(a)h$.*
- *Związek różniczki funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ z pochodną kierunkową. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Wówczas pochodna kierunkowa f w punkcie $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ w kierunku wektora $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ to wartość różniczki $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$ na wektorze $\boldsymbol{v}$:*

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})[\boldsymbol{v}] \ .$$

- *Z wykładu wiemy, że jeśli pochodne cząstkowe odwzorowania F istnieją w otoczeniu punktu $\boldsymbol{a}$ i są ciągłe w $\boldsymbol{a}$ to F jest różniczkowalna w $\boldsymbol{a}$. Uwaga! Odwrotne twierdzenie nie zachodzi.*
- *Odwzorowanie $F = (f_1, \dots, f_k) : U \overset{otw.}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, którego wszystkie pochodne cząstkowe cząstkowe $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}$, gdzie $i = 1, \dots, k$ i $j = 1, \dots, n$ istnieją i są ciągłe w U nazywamy odwzorowaniem* klasy C^1 w U.

Z powyższych rozważań wynika, że standardowa procedura badania różniczkowalności danej funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest następująca:

1. *Liczymy gradient $\nabla f = [\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}]$. Jeśli się da, to robimy to rachunkowo, jeśli nie musimy liczyć z definicji.*
2. *W punktach, w których któraś pochodna cząstkowa nie istnieje nie ma różniczkowalności. W pozostałych punktach odwzorowanie liniowe $\boldsymbol{h} \mapsto \langle \nabla f, \boldsymbol{h} \rangle$ jest kandydatem na różniczkę.*
3. *Aby sprawdzić czy faktycznie jest to różniczka mamy dwie drogi postępowania:*
   (a) *z definicji: możemy policzyć czy granica* (1) *istnieje.*
   (b) *możemy sprawdzić, czy pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ są określone w otoczeniu danego punktu i ciągłe w tym punkcie. Jeśli odpowiedź jest twierdząca, to funkcja jest różniczkowalna. Ale, uwaga!, jeśli pochodne cząstkowe nie są ciągłe, bądź nie istnieją w otoczeniu danego punktu, to musimy różniczkowalność badać dalej (jak w punkcie a).*

`Zadanie domowe na 29 października:`

Dom 2. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ w całej dziedzinie.

`(29 października 2019)`

Zadanie 8. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2+z^2}\right) & \text{dla } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Zadanie 9. Zbadaj różniczkowalność funkcji z poprzedniego zadania.

Zadanie 10. Funkcja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ma ograniczone pochodne cząstkowe w całej dziedzinie, tzn. istnieją stałe a i b, takie, że dla każdego $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|<a \quad \text{oraz} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|<b\ .$$

Wykaż, że f jest lipszycowska.
Wskazówka: Wykorzystaj podobną własność funkcji jednej zmiennej.

`Zadania domowe na 5 listopada:`

Zadanie 11. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x,y)=\ln(1+|xy|^p)$ w punkcie $(0,0)$.

Zadanie 12. Funkcja $f:P\to\mathbb{R}$ klasy C^1 jest określona na zbiorze $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 1\le x^2+y^2\le 9\}$ i ponadto spełnia w każdym punkcie dziedziny nierówności

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\le 1 \quad \text{i} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\le 1\ .$$

Rozstrzygnij, czy f spełnia warunek Lipschitza (z pewną stałą) w zbiorze P.

`(5 listopada 2019)`

Zadanie 13. Zbadać różniczkowalność w dziedzinie $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy>-1\}$ funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+xy)}{y} & \text{dla } y\neq 0 \text{ i } xy>-1\\ x & \text{dla } y=0.\end{cases}$$

Zadanie 14. Funkcja różniczkowalna $f:U\to\mathbb{R}$ określona na zbiorze $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x>0,y>0\}$ jest zadana wzorem $f(x,y)=g(\frac{x^2}{y})$ dla pewnej funkcji różniczkowalnej $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$. Wykaż, że dla dowolnego punktu $(x,y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ funkcja f spełnia tożsamość

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+2y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\ .$$

`Zadanie domowe na 8 listopada 2019:`

Dom 3. Zdefiniujmy funkcję $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jako złożenie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ oraz $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ danych wzorami

$$f(x,y)=(x-y,x+y,2\sqrt{xy}),\quad g(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)\ .$$

(Tzn. $F(x,y)=g(f(x,y))$.) Oblicz $\frac{\partial F}{\partial x}$.

`Zadanie pisemne na 12 listopada 2019:`

Dom 4. Zbadać różniczkowalność w całej dziedzinie funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+xy}-1}{y} & \text{dla } y\neq 0 \text{ i } xy>-1\\ \frac{x}{2} & \text{dla } y=0.\end{cases}$$

(8 listopada 2019)

Reguła łańcuchowa. *Rozważmy odwzorowania różniczkowalne $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ i $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$. Wówczas różniczka złożenia $G(F) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ to złożenie różniczek*

$$\mathrm{d}G(F)(\boldsymbol{p}) = \mathrm{d}G(F(\boldsymbol{p})) \circ \mathrm{d}F(\boldsymbol{p}) \ .$$

Wzór ten jest uogólnieniem wzoru $g(f(x))' = g'(f(x))f'(x)$ znanego z analizy I.
Przypomnijmy, że w notacji macierzowej, jeśli $F = (f_1, f_2, \ldots, f_k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ to

$$\mathrm{d}F(\boldsymbol{p})[h^1, \ldots, h^n] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(\boldsymbol{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n}(\boldsymbol{p}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1}(\boldsymbol{p}) & \frac{\partial f_k}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \ldots \\ h^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \nabla f_1(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{h} \rangle \\ \ldots \\ \langle \nabla f_k(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{h} \rangle \end{bmatrix} \ .$$

Wobec tego macierz pochodnej złożenia F z $G = (g_1, g_2, \ldots, g_s) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ jest równa iloczynowi macierzy

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y^1}(F(\boldsymbol{p})) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial y^k}(F(\boldsymbol{p})) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_s}{\partial y^1}(F(\boldsymbol{p})) & \ldots & \frac{\partial g_s}{\partial y^k}(F(\boldsymbol{p})) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(\boldsymbol{p}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n}(\boldsymbol{p}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1}(\boldsymbol{p}) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} \ .$$

W powyższych wzorach współrzędne w $\mathbb{R}^n$ oznaczaliśmy przez $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ zaś, dla rozróżnienia, współrzędne w $\mathbb{R}^k$ przez $(y^1, y^2, \ldots, y^k)$.

Zadanie 15. Oblicz różniczkę odwzorowania $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ w punkcie $(0, 0, 0)$ danego wzorem

$$F(x, y, z) = G(e^y + \cos x, e^{\sin z}, e^{x+y} \sin z) \ ,$$

jeśli różniczka $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ w punkcie $(2, 1, 0)$ zadana jest macierzą

$$\mathrm{d}G(2, 1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Zadanie domowe na 12 listopada:

Dom 5. Funkcja różniczkowalna $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spełnia: $\nabla F(0, 0, 0) = [1, 2, 3]$ oraz $\nabla F(1, 1, 1) = [-1, -2, -3]$. Funkcja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$G(x, y, z) = F(e^{-x} + y, e^y - z, e^z - x) \ .$$

Obliczyć pochodną kierunkową $\partial_{\boldsymbol{v}} G(0, 0, 0)$, gdzie $v = [2, 1, 1]$.

Dom 6. (pozostało do uzupełnienia) Dla jakich $p > 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^p}{\|(x, y)\|} = 0 \ ,$$

gdzie $\|(x, y)\|$ oznacza dowolnie wybraną normę?

(12 listopada 2019)

Zadanie 16. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Obliczyć pochodną funkcji jednej zmiennej $F(t) = (f(t, t^2, t^3, \ldots, t^n))^2$.

Zadanie 17. Funkcja różniczkowalna $f : U \to \mathbb{R}$ określona na zbiorze $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ spełnia tożsamość

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \ .$$

Wykaż, że $f(x, y) = g(\frac{x^2}{y})$ dla pewnej funkcji różniczkowalnej $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
Wskazówka: Spróbuj pokazać, że f jest stała na parabolach $\{(x, ax^2) \mid x \in \mathbb{R}_+\}$.
