AM II.1 2019/2020 (gr. 2)
Temat 2: Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych

`(11 października 2019)`

Zadanie 1. Funkcja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowana następująco:

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y = x^2 \text{ i } x > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x,y) \; . \end{cases}$$

Sprawdź, że F nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$, mimo że istnieją granice iterowane $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$. Sprawdź, że F w obcięciu do dowolnej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$ ma granicę.

Zadanie 2. Zbadaj istnienie granicy funkcji $\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$ w $(x,y) = (0,0)$.

`Zadania domowe na 15 października:`

Dom 1. Zbadaj istnienie granicy funckcji $\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ w $(x,y) = (0,0)$.

Dom 2. Zbadaj istnienie granicy funckcji $\frac{x^5+y^4}{x^4+y^2}$ w $(x,y) = (0,0)$.

`(15 października 2019)`

Zadanie 3. Zbadaj istnienie granic w $(x,y) = (0,0)$ dla funkcji

a) $\frac{x^3+y^4}{x^2+y^4}$.

b) $x^2 \ln(x^2 + 2y^2)$.

c) $\frac{\ln(\cos x - y^2)}{x^2+2y^2}$

Zadanie 4. Zbadaj istnienie granicy funkcji $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}$

Każdy punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ możemy jednoznacznie opisać podając jego odległość od początku układu współrzędnych r, oraz kąt α jaki wektor $[x,y]$ tworzy z osią OX:

$$\begin{cases} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \; , \end{cases}$$

gdzie $r \in \mathbb{R}_+$ oraz $\alpha \in [0, 2\pi)$. Parę (r,α) nazywamy współrzędnymi biegunowymi *punktu (x,y). Zauważmy, że $(x,y) \to (0,0)$ wtedy i tylko wtedy gdy $r \to 0$ niezależnie od kąta α.*

`Zadania domowe na 18 października:`

Dom 3. Zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{gdy } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dom 4. Rozważmy funkcję

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y\sin(1/x) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Oblicz granice $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ (tzn. najpierw ustalamy x i przechodzimy do 0 z y, a potem w tym co wyszło przechodzimy z x do 0), $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ oraz $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

`(18 października 2019)`

Zadanie 5. Oblicz granicę

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos[(x+y)^2]}{x^2+y^2}.$$

Zadanie 6. Funkcję $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiujemy wzorem $F(x,y) = y^x$. Naszkicuj wykres poziomicowy F i zbadaj istnienie granic

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} F(x,y)\ .$$

Zadanie 7. Rozważmy odwzorowanie $F = (f_1,\ldots,f_k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ i punkty $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ oraz $\boldsymbol{a} = (a_1,\ldots,a_k) \in \mathbb{R}^k$. Udowodnij, że

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad \forall_{i=1,\ldots,k} \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f_i(\boldsymbol{x}) = a_i\ .$$

Zadanie 8. Zbadaj ciągłość funkcji $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ opisanej wzorem

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \left(\frac{xy}{1+z^2}, \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}\right) & \text{gdy } (x,y,z) \neq \mathbf{0}, \\ (0,0) & \text{gdy } (x,y,z) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Zadanie 9. Zbadaj istnienie granicy funkcji $f(x,y) = \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-1}$ w punktach prostej $x+y-1=0$.

`Zadania domowe na 22 października:`

Dom 5. Wykaż, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{gdy } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

jest ciągła wzdłuż każdej prostej przechodzącej przez $(0,0)$.

Dom 6. Zbadaj istnienie granicy funkcji $f(x,y) = \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-1}$ w punktach postaci $(x,y) = (k, 1-k)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

`(22 października 2019)`

Zadanie 10. Znajdź funkcję $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla której funkcja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3-y^3)e^{x+y}}{x-y} & \text{dla } x \neq y \\ g(x) & \text{dla } x = y \end{cases}$$

jest funkcją ciągłą.

Zadanie 11. Niech f będzie funkcją ciągłą o wartościach rzeczywistych określoną na zbiorze

$$A = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{v}\|_2 = 1\} \cup \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{v} - (2,0)\|_1 \leq 1\} \ ,$$

taką, że $f(-1,0) = -1$, $f(3,0) = 17$. Wykazać, ze istnieje punkt $a \in A$ taki, że $f(a) = 1$. Czy istnieje funkcja f o podanych własnościach taka, że taki punkt a jest tylko jeden?

`Zadanie domowe na 25 października:`

Dom 7. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\exp(\frac{-y}{x^2}) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \ . \end{cases}$$

`Pisemnie na 29 października:`

Dom 8. Zbadaj istnienie granicy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x+e^y) - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} \ .$$

`Dodatkowe zadania:`

Zadanie 12. Rozstrzygnij, czy funkcja $f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi}{1-x^2-y^2}\right)$ jest jednostajnie ciągła w kole $\{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$.

Zadanie 13. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji:

$$F(x,y) := \begin{cases} \frac{x-y}{x^3-y} & \text{gdy } y \neq x^3 \\ 1 & \text{gdy } y = x^3. \end{cases}$$

Zadanie 14. Rozważmy funkcję ciągłą $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Załóżmy że istnieją punkty $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ takie, że $f(\boldsymbol{v}) > 0 > f(\boldsymbol{w})$. Wykaż, że f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Zadanie 15. Zbadaj ciągłość jednostajną funkcji $f(x,y) = \sin\frac{1}{|x|}\cos\frac{1}{|y|}$ na zbiorze $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Zadanie 16. Zbadaj ciągłość jednostajną funkcji $f(x,y) = x\sin\frac{1}{y^2}$ na zbiorze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid y = 0\}$.