AM II.1 2019/2020 (gr. 2)
Temat 1: Normy w $\mathbb{R}^n$, iloczyn skalarny

Normą *w przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy funkcję* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *o następujących własnościach:*

1. *dla każdego* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *zachodzi* $F(\boldsymbol{x}) \geq 0$, *przy czym* $F(\boldsymbol{x}) = 0$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *(*dodatnia określoność*)*
2. *dla każdego* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$ *zachodzi* $F(\lambda \cdot \boldsymbol{x}) = |\lambda| \cdot F(\boldsymbol{x})$ *(*dodatnia jednorodność*)*
3. *dla każdych* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ *zachodzi* $F(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leq F(\boldsymbol{x}) + F(\boldsymbol{y})$ *(*nierówność trójkąta*).*

Dla $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *i* $p \in [1, +\infty]$, p-normą $\boldsymbol{x}$ *nazywamy*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ gdy } p < +\infty, \text{ oraz } \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_i |x^i| \ .$$

Dla $p = 2$ *mówimy zazwyczaj o* normie euklidesowej.

`(5 października 2019)`

Zadanie 1. Wykaż, że norma euklidesowa $\|\cdot\|_2$ spełnia aksjomaty normy.

Zadanie 2. Wykaż, że $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$ są normami.

Kulą jednostkową w normie $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *nazywamy zbiór*

$$B := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\} \ .$$

Zadanie 3. Naszkicuj kule jednostkowe w $\mathbb{R}^2$ w normie $\|\cdot\|_p$ dla $p = 1, \frac{3}{2}, 2, 3, \infty$.

Zadanie 4. Niech $\|\cdot\|$ będzie dowolną normą w $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że kula jednostkowa $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1|\}$ jest zbiorem wypukłym. Wywnioskuj stąd, że $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ nie jest normą.

Zadanie 5. Wykaż, że $\|x\|_p \leq \|x\|_q$ gdy $p > q$. (Dla uproszczenia rachunki możemy przeprowadzić w $\mathbb{R}^2$.)

Zadanie 6. Znajdź normę na $\mathbb{R}^2$, o ile istnieje, w której kula jednostkowa jest prostokątem $[-1, 1] \times [-3, 3]$.

`Zadania domowe na 8 października:`

Dom 1. Niech liczby $p, q \in [1, +\infty]$ będą takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (takie liczby nazywamy *wykładnikami sprzężonymi*). Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b zachodzi następująca *nierówność Younga*:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ .$$

Wskazówka: $ab = \exp[\frac{1}{p} \cdot p \ln a + \frac{1}{q} \cdot q \ln b]$.

Dom 2. Niech $\|\cdot\|$ będzie normą w $\mathbb{R}^n$, zaś $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izomorfizmem liniowym. Wykaż, że funkcja $F(\boldsymbol{x}) = \|L\boldsymbol{x}\|$ również jest normą w $\mathbb{R}^n$.

Dom 3. Znajdź normę na $\mathbb{R}^2$, o ile istnieje, w której kula jednostkowa jest trójkątem równobocznym o środku w $(0, 0)$, którego jednym z wierzchołków jest $(1, 0)$.

(8 października 2019)

Zadanie 7. Czy poniższe funkcje zadają normy w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$? Odpowiedź uzasadnij:

a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + 5y^3}$.

b) $f(x,y) = \sqrt[5]{5|x|^5 + 2|y|^5}$.

c) $f(x,y,z) = |x| + 2|z|$.

d) $f(x,y) = \exp(x^2 + y^2)$.

e) $f(x,y,z) = \sqrt[4]{x^4 + y^4} + |z|$.

Lemat 1. *Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ będą normami, odpowiednio w $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^k$. Wówczas funkcja $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ określona wzorem*

$$\|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\| := F(\boldsymbol{x}) + G(\boldsymbol{y}), \qquad \textit{gdzie } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^{n+k},$$

również jest normą.

Zadanie 8. (przeformułowanie faktu dowodzonego na ćwiczeniach) Rozważmy kulę jednostkową $B \subset \mathbb{R}^n$ dla pewnej normy $\|\cdot\|$ w $\mathbb{R}^n$. Dla ustalonego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ rozważmy promień $\mathcal{R} = \{t \cdot \boldsymbol{x} \mid t > 0\}$. Wówczas istnieje dokładnie jedna liczba $a \in \mathbb{R}_+$ taka, że $\mathcal{R} \cap B = \{t \cdot \boldsymbol{x} \mid t \in (0, a]\}$. Ponadto $\|\boldsymbol{x}\| = \frac{1}{a}$. (Wynika stąd, że punkty leżące na brzegu kuli B to dokładnie punkty o normie 1.)

Zadanie 9. Niech $\|\cdot\|$ będzie normą w $\mathbb{R}^2$, w której kula jednostkowa jest wielokątem o wierzchołkach $(1,2)$, $(0,3)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$, $(0,-3)$ i $(1,-2)$. Oblicz normy wektorów $(2,0)$, $(0,1)$, $(4,1)$ i $(1,4)$.

Iloczynem skalarnym *w $\mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję dwuargumentową $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach:*

(i) jest dwuliniowa,

(ii) jest symetryczna, tzn. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$ dla dowolnych $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$

(iii) jest dodatnio określona, tzn. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$ o ile $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

Normę pochodzącą od iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *definiujemy jako* $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$.

Norma euklidesowa w $\mathbb{R}^n$, a więc $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ pochodzi od standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^n$. Z własności iloczynu skalarnego poznanych na algebrze liniowej wynika, że każda inna norma pochodząca od pewnego iloczynu skalarnego jest postaci $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}^T}$, gdzie $A = A^T$ jest macierzą symetryczną dodatnio określoną. Z własności takich macierzy wnioskujemy, że w pewnej bazie ortonormalnej norma taka ma postać $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2}$, gdzie $\lambda_i > 0$ to (rzeczywiste i dodatnie) wartości własne macierzy iloczynu skalarnego A. Stąd kula jednostkowa takiej normie to pewna elipsoida.

Zadanie 10. Udowodnij, że jeśli norma $\|\cdot\|$ pochodzi od iloczynu skalarnego to spełnione są równości

a) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{y}\|^2$.

b) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right)$.

`Zadania domowe na 11 października:`

Dom 4. Rozstrzygnij, dla jakich $p \in [1, +\infty]$ norma $\|\cdot\|_p$ pochodzi od iloczynu skalarnego.

Dom 5. Wykaż, że norma $\|\cdot\|$ z zadania z wielokątem (zadanie 9) nie pochodzi od iloczynu skalarnego.

`Pisemnie na 15 października:`

Dom 6. Kula jednostkowa pewnej normy $\|\cdot\|$ w $\mathbb{R}^2$ opisana jest następująco:

$$B = [-1,1] \times [-1,1] \cup \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}\ .$$

Wyznacz normy wektorów $(1,0)$, $(0,5)$ i $(9,3)$. Wykaż, że rozważana norma nie pochodzi od iloczynu skalarnego.

`(11 października 2019)`

Zadanie 11. Iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^2$ zadany jest macierzą $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Przez $\|\cdot\|$ oznaczmy normę pochodzącą od tego iloczynu skalarnego, a przez $\|\cdot\|_2$ standardową normę euklidesową. Oblicz

$$\sup_{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|_2} \quad \text{oraz} \quad \inf_{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|_2}.$$

`Zadania dodatkowe:`

Zadanie 12. Niech liczby $p, q \in [1, +\infty]$ będą takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, zaś $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ i $\boldsymbol{y} = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ dowolnymi punktami w $\mathbb{R}^n$. Udowodnij następującą *nierówność Höldera*:

$$\sum_i |x^i y^i| \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \cdot \|\boldsymbol{y}\|_q\ .$$

Wskazówka: skorzystaj z nierówności Younga.

Zadanie 13. (∗/2) Udowodnij, że dla dowolnego $p \in (1, +\infty)$ funkcja $\|\cdot\|_p$ jest normą.
Wskazówka: skorzystaj z nierówności Höldera i z faktu, że dla wykładników sprzężonych p, q zachodzi $p = q(p-1)$.

Zadanie 14. Niech $\|\cdot\|$ będzie normą w $\mathbb{R}^2$, w której kula jednostkowa jest równa

$$B = [-1,1] \times [-2,2] \cup \{(x,y) \mid x^2 + (y-2)^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \mid x^2 + (y+2)^2 \leq 2\}\ .$$

Oblicz normy wektorów $(2,0)$, $(0,1)$ i $(1,3)$. Wykaż, że norma $\|\cdot\|$ nie pochodzi od iloczynu skalarnego.

Zadanie 15. Rozstrzygnij, czy następujące funkcje są normami w $\mathbb{R}^2$:

a) $\sqrt{x^2 + 9y^2}$.

b) $\sqrt{x^2 + 9y^2} + |x + y|$.

c) $\sqrt[3]{x^3+|y|}$.

Półnormą *nazywamy funkcję* $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, *spełniającą następujące aksjomaty normy z wyjątkiem ścisłej dodatniej określoności:*

1. *dla każdego* $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ *zachodzi* $F(\boldsymbol{x})\geq 0$ *(słaba* dodatnia określoność*)*
2. *dla każdego* $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ *i* $\lambda\in\mathbb{R}$ *zachodzi* $F(\lambda\cdot\boldsymbol{x})=|\lambda|\cdot F(\boldsymbol{x})$ *(*dodatnia jednorodność*)*
3. *dla każdych* $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}$ *zachodzi* $F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\leq F(\boldsymbol{x})+F(\boldsymbol{y})$ *(*nierówność trójkąta*).*

Zadanie 16. Udowodnij, że suma normy i półnormy jest normą.

Zadanie 17. Udowodnij, że jeśli $F,G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ są normami, zaś $\lambda,\mu\in\mathbb{R}_+$ dowolnymi liczbami dodatnimi to $\lambda F+\mu G$ też jest normą.