Zadania gwiazdką (aktualizacja: 10 stycznia 2020)

Zadanie 1. **($*$, charakteryzacja kul w dowolnej normie)** Niech $B \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem zwartym (domkniętym i ograniczonym), wypukłym, którego $\mathbf{0}$ jest punktem wewnętrznym (tzn. $\mathbf{0}$ leży w B wraz z pewnym swoim otoczeniem) i symetrycznym względem $\mathbf{0}$ (tzn. $\boldsymbol{x} \in B \Leftrightarrow -\boldsymbol{x} \in B$). Wykaż, że B jest kulą jednostkową dla pewnej normy. *Poprzednio brakowało założenia o wypukłości.*

Zadanie 2. **($*$, charakteryzacja norm pochodzących od iloczynu skalarnego)** Udowodnij, że jeśli norma $\|\cdot\|$ spełnia, dla dowolnych $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, tożsamość

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{y}\|^2 \ .$$

To pochodzi od pewnego iloczynu skalarnego.

Zadanie 3. **($*$)** Funkcja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest ciągła „po współrzędnych” oraz rosnąca względem pierwszej zmiennej (tzn. $\forall_{y_0}$ funkcja $x \mapsto F(x, y_0)$ jest ciągła i rosnąca, oraz $\forall_{x_0}$ funkcja $y \mapsto F(x_0, y)$ jest ciągła). Wykaż, że F jest ciągła.

Zadanie 4. **($*/2$)** (gr. 3) Funkcja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma granicę w $(x,y) = (0,0)$. Wykaż, że jeśli granice $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} F(x,y)$ oraz $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} F(x,y)$ istnieją to

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} F(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} F(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) \ .$$

Definicja. Podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *obszarem*, gdy jest otwarty i spójny.
Z wykładu wiadomo, że każdy zbiór otwarty i spójny w $\mathbb{R}^n$ jest też spójny łukowo.

Zadanie 5. **($*/2$)** Niech $A \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem wypukłym. Wykaż, że jeśli funkcja ciągła $f : A \to \mathbb{R}$ ma ograniczone pochodne cząstkowe w całej dziedzinie, to spełnia warunek Lipschitza. Wykaż, że teza nie jest prawdziwa bez założenia o wypukłości A.

Zadanie 6. **($*$, ciągłość funkcji wypukłych)** Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą (tzn. dla dowolnych $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$ i dowolnego $\lambda \in [0,1]$ zachodzi nierówność $f(\lambda \boldsymbol{v} + (1-\lambda)\boldsymbol{w}) \leq \lambda f(\boldsymbol{v}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{w})$). Wykaż, że f jest funkcją ciągłą.

Zadanie 7. **($*/2$)** Podać przykład funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach:

- f jest różniczkowalana w $\mathbb{R}^2$
- f ma dokładnie jeden punkt krytyczny (lokalne ekstremum)
- f jest nieograniczona z góry i z dołu.

Zadanie 8. **($*$)** Funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spełnia tożsamości

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - y\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + x\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \ .$$

Wykaż, że f jest stała.
Podaj przykład niestałej funkcji dwukrotnie różniczkowalnej, która spełnia tożsamości (w pierwszej tożsamości zmieniamy znak)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + x\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \ .$$

Zadanie 9. ($*$) Wykaż, że wnętrze dowolnego wielokąta wypukłego jest dyfeomorficzne z $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 10. ($**$) Wykaż, że dowolny obszar wypukły jest dyfeomorficzny z $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 11. ($*$) Niech $K \subset \mathbb{R}^2$ będzie zwartym zbiorem wypukłym. Wykaż, że funkcja $F : \mathbb{R}^2 \setminus K \to \mathbb{R}$ opisująca odległość punktów zewnętrznych K od K, tzn. $f(\boldsymbol{v}) = \operatorname{dist}(\boldsymbol{v}, K)$ jest różniczkowalna. Wykaż, że zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus K$ jest dyfeomorficzny z $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Zadanie 12. ($*$) Rozważmy liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ i liczbę naturalną $k \leq n$. Zdefiniujmy k-tą średnią MacLaurin'a z liczb $x_1, \ldots, x_n$ wzorem

$$ML_k(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}}{\binom{n}{k}} \right)^{1/k} .$$

Wykaż, że zachodzi następujące uogólnienie nierówności średnich

$$ML_1(x_1, \ldots, x_n) \geq ML_2(x_1, \ldots, x_n) \geq \ldots \geq ML_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \geq ML_n(x_1, \ldots, x_n) .$$

Michał Jóźwikowski, 10 stycznia 2020.