Dowód niewymierności e^2

Rozwiązanie: Przedstawmy e^2 w postaci szeregu i załóżmy przeciwnie, że istnieją liczby całkowite $a, b \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$\frac{a}{b} = e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^m}{m!} + \ldots \frac{2^b}{b!} + \frac{2^{b+1}}{(b+1)!} + \frac{2^{b+2}}{(b+2)!} + \ldots .$$

Tak jak w dowodzie niewymierności e pomnóżmy obie strony przez $b!$ skąd mamy

$$a \cdot (b-1)! = b! + 2b! + \frac{2^2 b!}{2!} + \ldots + \frac{2^m b!}{m!} + \ldots + 2^b + \left(\frac{2^{b+1}}{b+1} + \frac{2^{b+2}}{(b+1)(b+2)} + \ldots \right) .$$

Wyrazy poza końcowym nawiasem są oczywiście całkowite. Kolejnym krokiem będzie podzielenie lewej strony powyższej równości przez największą możliwą potęgę dwójki. W tym celu wprowadźmy następującą definicję.
Dla liczby naturalnej b oznaczmy

$$n(b) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid 2^n / b!\} .$$

Liczbę tą nie jest trudno wyliczyć.

Lemat. *Załóżmy, że w zapisie dwójkowym $b = (a_k a_{k-1}, a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_2$. Wówczas*

(1) $$n(b) = b - \sum_{i=0}^{k} a_i \leq b - 1 ,$$

tj. $n(b)$ to b pomniejszone o sumę cyfr w zapisie dwójkowym b.

Szkic dowodu. Niech na przykład $b = 2^5 + 2^3 + 2^0$. Zauważmy, że pomiędzy 1 a 2^5 jest dokładnie 2^4 liczb parzystych, 2^3 liczb podzielnych przez 4, 2^2 podzielnych przez 8, 2 podzielne przez 16 i jedna podzielna przez 32. W sumie w rozkładzie $2^5!$ mamy dokładnie (2^5-1) dwójek. Analogicznie pomiędzy 2^5+1 a 2^5+2^3 mamy 2^2 liczb parzystych, 2 liczby podzielne przez 4 i 1 liczbę podzielną przez 8, a więc w sumie $(2^5+2^3)!$ ma dodatkowych 2^3-1 dwójek w rozkładzie. Wreszcie pomiędzy 2^5+1 a 2^5+1 jest dokładnie 2^0-1 liczb parzystych. Ostatecznie $n(2^5+2^3+2^0) = 2^5 - 1 + 2^3 - 1 + 2^0 - 1 = (2^5+2^3+2^0) - 3$. Dowód w ogólnym przypadku przebiega analogicznie. □

Przyjmijmy teraz, że $2^k < b \leq 2^{k+1}$ w zapisie dwójkowym możemy przedstawić b jako $b = (1\underbrace{a_{k-1}\ldots}_{s \text{ zer}}1\underbrace{0\ldots0}_{z \text{ zer}})_2$ i wówczas $b-1 = (1\underbrace{a_{k-1}\ldots}_{s \text{ zer}}01\ldots1)_2$, a więc

(2) $$n(b) = b - (k+1-s-z) \quad \text{i}$$

(3) $$n(b-1) = (b-1) - (k+1-s-1) = b - k - 1 + s = n(b) - z \leq n(b) .$$

Stąd dostajemy

$$\frac{a\cdot(b-1)!}{2^{n(b-1)}}=\sum_{m=0}^{b}\frac{2^m b!}{2^{n(b-1)}\cdot m!}+\frac{2^{b+1-n(b-1)}}{b+1}\left(1+\frac{2}{(b+2)}+\frac{2^2}{(b+2)(b+3)}\dots\right)=$$

$$\frac{a\cdot(b-1)!}{2^{n(b-1)}}=\sum_{m=0}^{b}\frac{2^m b!}{2^{n(b-1)}\cdot m!}+\frac{2^{k+2-s}}{b+1}\left[1+\frac{2}{(b+2)}\left(1+\frac{2}{(b+3)}+\dots\right)\right]$$

Lewa strona powyższej równości jest oczywiście całkowita (to wynika z definicji $n(b-1)$). Również całkowite są wyrazy w sumie. Istotnie, wyraz $\frac{2^m b!}{m!}$ jest całkowity gdy $b\geq m$, zaś największa potęga dwójki przez która można go podzielić to $m+n(b)-n(m)\overset{(3)\text{ i }(1)}{\geq} m+n(b-1)-(m-1)\geq n(b-1)$ (osobno trzeba rozpatrzeć prosty przypadek $m=0$). Stąd mamy równanie

$$\text{l. całkowita} = \text{l. całkowita} + \lambda(1+R)\ , \tag{4}$$

gdzie $\lambda=\frac{2^{k+2-s}}{b+1}$, zaś $R=\frac{2}{b+2}\left(1+\frac{2}{b+2}+\frac{2^2}{(b+2)(b+3)}+\dots\right)$. Będziemy się starali pokazać, że $\lambda(1+R)$ ma niezerową część ułamkową, skąd dojdziemy do sprzeczności. Zauważmy najpierw że wobec $b>2^k$ mamy:

$$R=\frac{2}{b+2}\left(1+\frac{2}{b+2}+\frac{2^2}{(b+2)(b+3)}+\dots\right)\leq\frac{2}{2^k}e^2=\frac{e^2}{2^{k-1}} \tag{5}$$

Nasze rozumowanie rozbijemy na kilka przypadków zależnie od wartości liczby s.

A) $s\geq 3$.
Wówczas $0<\lambda=\frac{2^{k+2-s}}{b+1}<\frac{2^{k-1}}{2^k}=\frac12$, skąd o ile $\frac{e^2}{2^{k-1}}\leq 1$ (działa dla $k\geq 4$) mamy

$$0<\lambda(1+R)\overset{(5)}{<}\frac12(1+1)=1\ .$$

Czyli $\{\lambda(1+R)\}\neq 0$.

B) $s=2$.
Wówczas $2^{k+1}>b+1>b\geq(1001\dots)_2=2^k+2^{k-3}$. Ponadto $0<\lambda=\frac{2^{k+2-s}}{b+1}<\frac{2^k}{2^k}=1$. Zapiszmy $\lambda=1-\varepsilon$, gdzie

$$1>\varepsilon=\frac{b+1-2^k}{b+1}\geq\frac{2^{k-3}}{2^{k+1}}=\frac{1}{16}\ .$$

Stąd $\{\lambda(1+R)\}=\{\lambda+\lambda R\}=\{1-\varepsilon+\lambda R\}=\{\lambda R-\varepsilon\}$. Jeśli teraz $\frac{e^2}{2^{k-1}}\leq\frac{1}{16}$ (działa gdy $k\geq 7$) to $\lambda\cdot R<1\cdot\frac{e^2}{2^{k-1}}\leq\frac{1}{16}<\varepsilon$, a więc $\{\lambda(1+R)\}=\{\lambda R-\varepsilon\}\neq 0$.

C) $s=1$.
Wówczas $2^{k+1}>b+1>b\geq(101\dots)_2=2^k+2^{k-2}$. Ponadto $1=\frac{2^{k+1}}{2^{k+1}}\leq\lambda=\frac{2^{k+2-s}}{b+1}<\frac{2^{k+1}}{2^k}=2$. Zapiszmy $\lambda=2-\varepsilon$, gdzie

$$1>\varepsilon=\frac{2(b+1)-2^{k+1}}{b+1}\geq\frac{2\cdot 2^{k-2}}{2^{k+1}}=\frac14\ .$$

Stąd $\{\lambda(1+R)\} = \{\lambda + \lambda R\} = \{2 - \varepsilon + \lambda R\} = \{\lambda R - \varepsilon\}$. Jeśli teraz $\frac{e^2}{2^{k-1}} \le \frac{1}{8}$ (działa gdy $k \ge 6$) to $\lambda \cdot R < 2 \cdot \frac{e^2}{2^{k-1}} \le \frac{1}{4} < \varepsilon$, a więc $\{\lambda(1+R)\} = \{\lambda R - \varepsilon\} \neq 0$.

D) $s = 0$.
Wówczas $2^{k+1} > b+1 > b \ge (11\ldots)_2 = 2^k + 2^{k-1}$. Ponadto $2 = \frac{2^{k+2}}{2^{k+1}} \le \lambda = \frac{2^{k+2-s}}{b+1} < \frac{2^{k+2}}{2^k} = 4$. Zapiszmy $\lambda = 3 - \varepsilon$, gdzie

$$1 > \varepsilon = \frac{3(b+1) - 2^{k+2}}{b+1} \ge \frac{3(2^k + 2^{k-1}) - 2^{k+2}}{2^{k+1}} = \frac{9 \cdot 2^{k-1} - 8 \cdot 2^{k-1}}{2^{k+1}} = \frac{1}{4}\ .$$

Stąd $\{\lambda(1+R)\} = \{\lambda + \lambda R\} = \{3 - \varepsilon + \lambda R\} = \{\lambda R - \varepsilon\}$. Jeśli teraz $\frac{e^2}{2^{k-1}} \le \frac{1}{16}$ (działa gdy $k \ge 7$) to $\lambda \cdot R < 4 \cdot \frac{e^2}{2^{k-1}} \le \frac{1}{4} < \varepsilon$, a więc $\{\lambda(1+R)\} = \{\lambda R - \varepsilon\} \neq 0$.

Podsumowując, w każdym z omawianych przypadków, o ile k jest dostatecznie duże, to równanie (4) nie może być spełnione. Pozostaje jeszcze sprawdzić przypadki małych k:

- $k \le 3$, $s \ge 3$, co jest zbiorem pustym.
- $k \le 6$, $s = 2$,
- $k \le 5$, $s = 1$,
- $k \le 6$, $s = 0$.

Co jest robialne przez wypisanie wszystkich możliwych b dla powyższych danych i sprawdzenie ręczne że e^2 nie jest postaci $\frac{a}{b}$ dla takich b. Ale oczywiście nie chce się nam tym zajmować.

Tak naprawdę dość dużą liczbę powyższych przypadków można by zredukować włączając do analizy kolejne wyrazy reszty szeregu. Mamy

$$\lambda(1+R) = \lambda\left(1 + \frac{2}{b+2}\right) + \lambda\frac{2^2}{(b+2)(b+3)}\left(1 + \frac{2}{b+4} + \ldots\right)\ .$$

Na przykład dla $s = 2$ poszczególne wyrazy można oszacować: $\lambda = 1 - \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > \frac{1}{16}$; $1 + \frac{2}{b+2} \le 1 + \frac{2}{2^k} \le 1 + \frac{1}{16}$, gdy $k \ge 5$, skąd $\lambda\left(1 + \frac{2}{b+2}\right) \le 1 - \frac{1}{16^2}$. Wreszcie $\lambda\frac{2^2}{(b+2)(b+3)}(\ldots) \le \frac{1}{2^{2k-2}}e^2 \le \frac{1}{16^2}$, dla $k \ge 6$. Skąd wystarczy badać $k \le 5$ przy $s = 2$. Podobne rozumowanie pozwala uprościć przypadki dla innych s. $\square$

Michał Jóźwikowski, 21 stycznia 2020.