AM I.1 2019/2020 (gr. 5)
Temat 6: Granica i ciągłość funkcji

(20 grudnia 2019)

Funkcją wykładniczą zmiennej zespolonej $z \in \mathbb{C}$ *nazywamy wspólną granicę ciągów*

$$\exp(z) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ .$$

(Zauważmy że, na mocy kryterium d'Alemberta, rozważany szereg jest zbieżny bezwzględnie dla każdego ustalonego $z \in \mathbb{C}$.*)*
Tak zdefiniowany eksponens zespolony ma szereg standardowych własności zwykłego eksponensa, jak też kilka innych

$$\exp(z)\exp(w) = \exp(z+w), \qquad \exp(z)^{-1} = \exp(-z), \qquad \overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}), \qquad |\exp(z)| = \exp(|\Re(z)|) \ .$$

Przy użyciu funkcji $\exp(\cdot)$ *możmy zdefiniować funkcje trygonometryczne sinus i kosinus dla argumentu* $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) := \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos(x) := \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \ ,$$

bądź też w innej formie

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad \textit{skąd} \quad \cos(x) = \Re(e^{ix}) \quad \textit{oraz} \quad \sin(x) = \Im(e^{ix}) \ .$$

Zadanie 1. Udowodnij, że prawdziwe są znane wzory na sinus i kosinus sumy

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Zadanie 2. Wykaż, że dla $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \Im\left(e^{ix} \cdot \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\right)$$

(7 stycznia 2020)

Zadanie 3. Wykaż, że $i(1 - e^{ix}) = 2\sin(\frac{x}{2}) \cdot e^{ix/2}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ i wykorzystaj ten wzór do pokazania, że

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \ .$$

Zadanie 4. Korzystając z twierdzenia Abela wykaż, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5. Oblicz granice $\lim_{x_n\to 0} \frac{\sin x_n - x_n}{(x_n)^2}$ oraz $\lim_{x_n\to 0} \frac{\sin x_n - x_n}{(x_n)^3}$.

Definicja. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym podzbiorem prostej rzeczywistej. Punkt $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ nazywamy *punktem skupienia* zbioru A gdy istnieje ciąg elementów $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ zbieżny do x_0.
Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru A oznaczamy symbolem $\mathrm{Acc}(A)$.

Zadanie 6. Znajdź wszystkie punkty skupienia następujących zbiorów: $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $C = \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, $E = \mathbb{Q}$, $F = (0,1) \cup (1,2]$, $G = (-\pi, \pi) \setminus \mathbb{Q}$.

Definicja. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \supset A \to \mathbb{R}$ i niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru A. Mówimy, że *funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g* (i piszemy $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$) gdy dla dowolnego ciągu $A \setminus \{x_0\} \ni x_n \to x_0$ zachodzi równość $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.
Równoważnie, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $x \in A \setminus \{x_0\}$ warunek $|x - x_0| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Pierwsza z definicji znana jest jako definicja Heine'go, zaś druga jako definicja Cauchy'ego granicy funkcji. Definicja Heine'go pozostaje w mocy gdy x_0 lub g są równe $\pm\infty$. W takich przypadkach definicję Cauchy'ego trzeba nieco zmodyfikować.
Dla granic funkcji obowiązuje wiele analogicznych wyników jak dla granic ciągów, np. twierdzenie o arytmetyce granic, twierdzenie o trzech funkcjach, twierdzenie o zachowaniu nierówności słabej w granicy, itp.
Ponadto znamy już wiele elementarnych granic, np.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad , \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} .$$

`Zadania domowe na 10 stycznia:`

Dom 1. Wykaż, że liczby
(a) e^2 oraz
(b) $\cos(1)$
są niewymierne.

Dom 2. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x) - x}{x^3} .$$

`(10 stycznia 2020)`

Zadanie 7. Oblicz granice

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2020x)}{\sin(2019x)},$$

$$(b) \quad \lim_{x\to \pi} \frac{\sin(2020x)}{\sin(2019x)},$$

$$(c) \quad \lim_{x\to 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}},$$

$$(d) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$$

Zadanie 8. Zbadaj istnienie granicy

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\ .$$

Zadanie 9. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\ .$$

Zadanie 10. Zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left((-1)^n\frac{1}{n}\right)\quad \text{i}\quad \sum_{n=1}^{\infty}1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\ .$$

`Zadania domowe na 14 stycznia:`

Dom 3. Wykaż, że funkcje określone na zbiorze $D\subset\mathbb{R}$ o wartościach w $\mathbb{R}$ tworzą przestrzeń liniową (nad $\mathbb{R}$) z naturalnym dodawaniem $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ i mnożeniem $(\lambda\cdot f)(x)=\lambda\cdot f(x)$ dla $\lambda\in\mathbb{R}$. Sprawdź, że funkcje posiadające granicę w punkcie $x_0\in D$ tworzą podprzestrzeń liniową tej przestrzeni.

Dom 4. Oblicz granice

$$(a)\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}},\qquad (b)\quad \lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+3}\sin\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\ .$$

`Seria zadań pisemnych na 21 stycznia 2020:`

Dom 5. Oblicz sumę

$$1+\cos x+\cos(2x)+\ldots+\cos(nx)$$

i zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}\ .$$

Dom 6. Udowodnij że jeśli a_n jest ciągiem monotonicznie zbieżnym do 0, to zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left((-1)^n a_n\right).$$

Definicja. *Kosinusem hiperbolicznym* nazywamy funkcję

$$\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}).$$

Sinusem hiperbolicznym nazywamy funkcję

$$\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}).$$

Dom 7. Wykaż, że $\sinh 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$, sinh jest funkcją nieparzystą a cosh parzystą. Naszkicuj wykresy funkcji sinh i cosh.

Dom 8. Udowodnij tożsamość zwaną *jedynką hiperboliczną*

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Dom 9. Udowodnij wzory na sinus i kosinus hiperboliczny sumy kątów

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

Dom 10. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}.$$

Dom 11. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh x}{x^2}.$$

`(14 stycznia 2020)`

Zadanie 11. Oblicz granice

$$(a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[n]{1+x}-1},$$
$$(b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{\operatorname{tg}^2 x},$$
$$(c)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)\sin(\operatorname{tg} x)}{1-\cos 2x}.$$

`(17 stycznia 2020)`

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R} \supset A \to \mathbb{R}$ jest *ciągła w punkcie* $x_0 \in A$ gdy dla dowolnego ciągu $A \ni x_n \to x_0$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
Równoważnie (wersja Cauchy'ego), dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla punktów $x \in A$ warunek $|x - x_0| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Funkcję $f : A \to \mathbb{R}$ nazywamy *ciągłą na* A gdy jest ciągła w każdym punkcie dziedziny A.

Znane nam już przykłady funkcji ciągłych to $\exp(x)$, $\ln(x)$ *(dla* $x \in \mathbb{R}_+$*)*, $\sin(x)$, $\cos(x)$, *wielomiany*, x^a *(dla* $x \in \mathbb{R}_+$*)*, a^x *(dla* $a > 0$*).*

Zadanie 12. Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zadanie 13. Wykaż, że $\sin(x)$ jest ciągła na $\mathbb{R}$.

W definicji Cauchy'ego ciągłości funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ *zapisanej za pomocą kwantyfikatorów, tj.*

$$\forall_{\varepsilon>0}\forall_{x_0\in A}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in A} \text{ jeśli } |x-x_0| < \delta \text{ to } |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \ ,$$

dobieramy δ *do* ε *i* x_0*, a więc* $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$.

Jeśli przestawimy kwantyfikatory:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x_0\in A}\forall_{x\in A} \text{ jeśli } |x-x_0|<\delta \text{ to } |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \ ,$$

to jedno $\delta=\delta(\varepsilon)$ obsługuje wszystkie punkty x_0. Mówimy wówczas, że f jest jednostajnie ciągła *na A. Funkcja jednostajnie ciągła jest oczywiście ciągła, ale odwrotne twierdzenie nie zachodzi. Przykładem funkcji jednostajnie ciągłej (a nawet lipszycowskiej) jest* $\sin(x)$*, zaś funkcji ciągłej, która nie jest jednostajnie ciąga $\frac{1}{x}$.*

`Zadanie domowe na 21 stycznia:`

Dom 12. Podaj przykład funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, która

a) nie ma granicy w żadnym punkcie swojej dziedziny.

b) ma granicę w dokładnie jednym punkcie swojej dziedziny.

c) jest ciągła na zbiorach $(-\infty,0)$ i na zbiorach $[0,+\infty)$, ale nie jest ciągła na $\mathbb{R}$.

d) istnieje podział $\mathbb{R}=A\cup B$, $A\cap B=\emptyset$, taki że obcięcia $f|_A$ i $f|_B$ są ciągłe, ale f nie jest ciągła w żadnym punkcie $\mathbb{R}$.

`(21 stycznia 2020)`

Twierdzenie. *Rozważmy funkcje zmiennej rzeczywistej $f:A\to\mathbb{R}$ i $g:B\to\mathbb{R}$, gdzie $A\subset\mathbb{R}$ i $f(A)\subset B\subset\mathbb{R}$ (żeby złożenie $g(f)$ miało sens). Załóżmy, że f jest ciągła w punkcie $a\in A$, g jest ciągła w punkcie $b\in B$, oraz że $f(a)=b$. Wówczas złożenie $g(f):A\to\mathbb{R}$ jest ciągłe w a.*

Wynika stąd, że złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Zadanie 14. Dla jakich parametrów $a,b\in\mathbb{R}$ funkcja

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin ax}{x} & \text{dla } x<0\\ \frac{x^3-1}{x^2+x+2} & \text{dla } 0\le x<1\\ b & \text{dla } x\ge 1\end{cases}$$

jest ciągła?

Oto dwie bardzo ważne własności funkcji ciągłych:

Twierdzenie (Własność Darboux). *Rozważmy funkcję ciągłą $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Wówczas dla każdej wartości $\xi\in[f(a),f(b)]$ istnieje argument $c\in[a,b]$ taki, że $\xi=f(c)$.*

Innymi słowy, funkcja ciągła przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między dwoma danymi.

Twierdzenie (Weierstrassa o przyjmowaniu kresów). *Rozważmy funkcję ciągłą $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (ogólniej funkcję ciągłą na zbiorze zwartym). Wówczas istnieją argumenty $c,d\in[a,b]$ takie, że*

$$f(c)=\sup_{x\in[a,b]}f(x) \quad \text{oraz} \quad f(d)=\inf_{x\in[a,b]}f(x)\ .$$

Innymi słowy, fukcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy.

Zadanie 15. Wykaż, że ciągła funkcja $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest ograniczona ani z góry ani z dołu musi przyjmować nieskończenie wiele razy wartość 2020.

Zadanie 16. Funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (to znaczy jest addytywna). Wykaż, że $f(x) = ax$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ (tzn. f jest liniowa).

`Zadanie domowe na 24 stycznia:`

Dom 13. Wykaż że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągłą wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych $x_n, y_n \in A$ warunek $|x_n - y_n| \to 0$ implikuje $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$.

`(24 stycznia 2020)`

Przykład nie-liniowej funkcji addytywnej *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rozważmy liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ rozumiane jako przestrzeń liniową nad liczbami wymiernymi $\mathbb{Q}$. Przestrzeń taka ma bazę $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ (nazywaną bazą Hamela), tzn. każdy element $x \in \mathbb{R}$ możemy jednoznacznie zapisać w postaci skończonej sumy*

$$x = q_1 \cdot h_1 + q_2 \cdot h_2 + \dots q_n \cdot h_n \ ,$$

gdzie $h_i \in \mathcal{H}$, zaś $q_i \in \mathbb{Q}$.
Łatwo zauważyć, że każda funkcja addytywna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją liniową, rozumianą jako odwzorowanie pomiędzy przestrzeniami liniowymi nad $\mathbb{Q}$, tzn. dla dowolnych $x, x' \in \mathbb{R}$ oraz $q, q' \in \mathbb{Q}$ mamy

$$f(q \cdot x + q' \cdot x') = qf(x) + q'f(x') \ .$$

Określmy f wzorem

$$f(q_1 \cdot h_1 + q_2 \cdot h_2 + \dots q_n \cdot h_n) := q_1 + q_2 + \dots + q_n \ .$$

(innymi słowy $f|_{\mathcal{H}} \equiv 1$). Łatwo sprawdzić, że tak określona funkcja jest addytywna. Co więcej f przyjmuje tylko wartości wymierne, a więc nie może być funkcją liniową, bo zbiór wartości funkcji liniowej $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ lub $\{0\}$.

Jeszcze raz o jednostajnej ciągłości.
Następujące warunki są równoważne:

- *(i) funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła,*
- *(ii) (wersja Heine'go) dla dowolnych $x_n, y_n \in A$ warunek $|x_n - y_n| \to 0$ implikuje $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$,*
- *(iii) (wersja Cauchy'ego) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla dowolnych $x_0, x \in A$ jeśli $|x - x_0| < \delta$ to $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Twierdzenie (Heine'go-Cantora). *Funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest jednostajnie ciągła.*

Zadanie 17. Rozstrzygnij, które z poniższych funkcji są jednostajnie ciągłe: $f(x) = 1$, $g(x) = 5x$, $h(x) = x^2 + 7$, $\phi(x) = \sqrt{x}$, $\psi(x) = \cos(2x)$, $\zeta(x) = \sin^2(x)$, $\xi(x) = \cos(x^2)$?

`Zadania dodatkowe:`

Zadanie 18. Wykaż, że funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i okresowa jest jednostajnie ciągła. *Uwaga: Ważne jest, że dziedziną funkcji jest cała prosta rzeczywista. Przykładem okresowej funkcji ciągłej nie jednostajnie ciągłej jest* $\mathrm{tg}(x)$.

Zadanie 19. Zbadaj czy klasa funkcji jednostajnie ciągłych jest zamknięta ze względu na dodawanie, mnożenie, skalowanie przez liczby rzeczywiste, składanie?