AM I.1 2019/2020 (gr. 5)
Temat 5: Zbieżność szeregów o wyrazach dowolnych

(6 grudnia 2019)

Od tej pory będziemy się zajmować szeregami o wyrazach dowolnych, tj. niekoniecznie dodatnich. Tak jak poprzednio szereg $\sum_n a_n$ *nazwiemy* zbieżnym, *gdy zbieżny jest jego ciąg sum częściowych* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. *Mówimy, że szereg* $\sum_n a_n$ *jest* zbieżny bezwzględnie *gdy zbieżny jest szereg wartości bezwzględnych* $\sum_n |a_n|$. *Zbieżność bezwzględna implikuje zbieżność w zwykłym senie, ale są przykłady szeregów zbieżnych, które nie są zbieżne bezwzględnie. Mówimy wówczas o* zbieżności warunkowej.
Wyrazy szeregu zbieżnego bezwzględnie możemy swobodnie przestawiać bez zmiany sumy. Nie należy tego robić przy szeregu zbieżnym warunkowo – przestawiając odpowiednio jego wyrazy możemy otrzymać dowolną (skończoną bądź nieskończoną) sumę.
Podstawowym twierdzeniem, którego będziemy używać będzie

Twierdzenie (Abela). *Rozważmy ciągi* (a_n) *oraz* (b_n), *przez* $A_n := \sum_{k=1}^n a_k$ *oznaczmy ciąg sum częściowych ciągu* (a_n) *wówczas jeśli*

- *Ciąg* A_n *jest ograniczony oraz*
- *Szereg* $\sum_n (b_{n+1} - b_n)$ *jest zbieżny bezwzględnie*

to szereg $\sum_n (a_n \cdot b_n)$ *jest zbieżny.*

W praktyce zazwyczaj stosuje się następujące wnioski z tw. Abela:

Twierdzenie (kryterium Abela). *Jeśli szereg* $\sum a_n$ *jest zbieżny, a ciąg* b_n *monotoniczny i ograniczony, to szereg* $\sum_n (a_n \cdot b_n)$ *jest zbieżny.*

Twierdzenie (kryterium Dirchleta). *Jeśli ciąg sum częściowych* $A_n := \sum_{k=1}^n a_k$ *jest ograniczony, a ciąg* (b_n) *monotonicznie zbieżny do 0, to szereg* $\sum_n (a_n \cdot b_n)$ *jest zbieżny.*

Twierdzenie (kryterium Liebniza). *Niech* (b_n) *będzie ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0. Wówczas szereg* $\sum_n (-1)^n a_n$ *jest zbieżny.*
Szereg powyższej postaci nazywamy szeregiem naprzemiennym.

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right).$$

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Zadania domowe na 10 grudnia:

Dom 1. Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1).$$

Dom 2. Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots.$$

Dom 3. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

Z poprzedniej pracy domowej z poprawionymi nawiasami.

`(10 grudnia 2019)`

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\ldots.$$

Twierdzenie (o nawiasowaniu). *Niech a_n będzie ciągiem zbieżnym do 0. Rozważmy dowolny rosnący ciąg liczb naturalnych l_n (ten ciąg będzie mówił jak rozstawiamy nawiasy) (przyjmijmy dodatkowo $l_0=0$) i zdefiniujmy $A_n := a_{l_{n-1}+1}+a_{l_{n-1}+2}+\ldots+a_{l_n}$. Jeśli ciąg $l_{n+1}-l_n$ jest ograniczony (nawiasy są ograniczonej szerokości), to szeregi $\sum a_n$ oraz $\sum A_n$ są albo równocześnie zbieżne, albo rozbieżne (i mają tę samą sumę).*

Innymi słowy jeżeli ciąg a_n spełnia warunek konieczny zbieżności i pogrupujemy wyrazy szeregu w nie za duże paczki to zbieżność/rozbieżność się nie zmieni.

Uwaga 1. Niezależnie od tego jak rozstawiamy nawiasy (bez dodatkowych założeń o ciągu l_n) jeżeli $\sum A_n$ jest rozbieżny to rozbieżny będzie także $\sum a_n$. Jest to jasne, bo ciąg sum częściowych szeregu $\sum A_n$ to podciąg ciągu sum częściowych szeregu $\sum a_n$.

Uwaga 2. Przykład, że w twierdzeniu o nawiasowaniu założenie o tym, że nawiasy są skończonej długości jest konieczne:

$$\sum a_n = 1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$$

Rozstawiając nawiasy kolejno długości 2, 4, 8, itd. dostaniemy szereg zbieżny $\sum 0$. Tymczasem w wyjściowym szeregu występują sekwencje $\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^k}=1$, a więc nie jest spełniony warunek Cauchy'ego.

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor \log_2 n\rfloor}\frac{1}{n}.$$

Twierdzenie (Kryterium Raabe'go). *Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem o wyrazach dodatnich. Załóżmy, że d.d.d. n i pewnej stałej $p>1$ zachodzą nierówności $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>p>1$. Wówczas szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Jeżeli d.d.d. n zachodzą nierówności $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1$ to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.*

Idea dowodu przypomina dowód kryterium D'Alemberta – wykorzystując odpowiednią nierówność wynikającą z warunku granicznego jesteśmy w stanie oszacować badany szereg przez inny szereg o znanej zbieżności.

Zadanie 5. Korzystając z kryterium Raabe'go zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(1+p)(2+p) \cdot \ldots \cdot (n+p)}.$$

w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}_+$.

(17 grudnia 2019)

Zadanie 6. Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\lfloor \ln(\ln(n^2 + \exp(\frac{n^2+5}{n\sqrt{n}+8})) + 1) \rfloor} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{n}.$$

Uwaga: po scaleniu wyrazów tego samego znaku dostajemy szereg naprzemienny $\sum_k (-1)^k b_k$, którego sumy częściowe to sumy postaci S_{k^2-1} wyjściowego szeregu. Zbieżności $\sum_k (-1)^k b_k$ dowodzimy z Tw. Abela: sumy częściowe $\sum_k (-1)^k$ są ograniczone, a $\sum_k |b_k - b_{k+1}|$ jest zbieżny. Następnie dowodzimy, że $S_n \in [S_{\lfloor n \rfloor^2-1}, S_{(\lfloor n \rfloor+1)^2-1}]$, a więc S_n jest ograniczony z góry i z dołu przez dwa podciągi zbieżnego ciągu S_{k^2-1}.

Mnożenie szeregów.

Definicja. *Iloczynem Cauchy'ego* szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nazywamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, którego n-tym wyrazem jest

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0 \ .$$

(Tzn. na c_n składają się wszystkie iloczyny $a_i b_j$ sumarycznego indeksu $i + j = n$.)

Twierdzenie (Mertens'a). *Jeśli szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne, przy czym co najmniej jeden z nich bezwzględnie, to zbieżny jest ich iloczyn Cauchy'ego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ i ponadto*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) \ .$$

Ponadto jeśli oba szeregi są zbieżne bezwzględnie, to $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ też jest zbieżny bezwzględnie.

Uwaga 3. Iloczyn dwóch szeregów warunkowo zbieżnych nie musi być zbieżny, ale jeśli jest zbieżny to do iloczynu sum wyjściowych szeregów.

Zadanie 8. Oblicz iloczyn Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Zadanie 9. Oblicz sumę $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ dla $|q| < 1$.

`Zadania domowe na 20 grudnia:`

Dom 4. Korzystając z kryterium Raabe'go zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p+1)(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+n)}{q(q+1)(q+2)\cdot\ldots\cdot(q+n)}$$

w zależności od liczb dodatnich p i q.

Dom 5. Wykaż, że iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n - r^n}{q - r}$.
