AM I.1 2019/2020 (gr. 5)
Temat 4: Zbieżność szeregów o wyrazach dodatnich

(22 listopada 2019)

Zadanie 1. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Ciąg (x_n) spełnia zależność rekurencyjną

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \ .$$

Wykaż, że (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego i oblicz jego granicę.
Nie ma pracy domowej na 26 listopada

(26 listopada 2019)

Twierdzenie (Kryterium porównawcze (wersja 1)). *Załóżmy że ciągi o wyrazach nieujemnych (a_n) i (b_n) spełaniają (dla dostatecznie dużych n) nierówność $a_n \leq b_n$. Wówczas*

(i) Jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest również szereg $\sum a_n$.

(ii) Jeśli szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny to rozbieżny jest również szereg $\sum b_n$

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4 + (-1)^n}{6} \right)^n .$$

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4 + 3(-1)^n}{6} \right)^n .$$

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n + 5}{n^3 + 4n - 3}.$$

Twierdzenie (Kryterium powrównawcze (wersja 2)). *Dla szeregów o wyrazach dodatnich $\sum a_n$ i $\sum b_n$, jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g > 0$ to oba szeregi są albo równocześnie zbieżne, albo równocześnie rozbieżne.*

W przypadku gdy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ wówczas

(i) Jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest również szereg $\sum a_n$.

(ii) Jeśli szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny to rozbieżny jest również szereg $\sum b_n$.

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1).$$

Zadanie 6. Zbadaj zbieżność szeregu w zależności od wartości parametru β

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)^{\beta}.$$

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{1001}}{1,001^n}.$$

Twierdzenie (Kryterium D'Alemberta (ilorazowe))**.** *Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem o wyrazach dodatnich spełniającym warunek $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=g$. Wówczas*

- *jeżeli $g<1$ to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny,*
- *jeżeli $g>1$ to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.*

Twierdzenie (Kryterium Cauchy'ego (pierwiastkowe))**.** *Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem o wyrazach dodatnich spełniającym warunek $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=g$. Wówczas*

- *jeżeli $g<1$ to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny,*
- *jeżeli $g>1$ to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.*

Uwaga! Jeśli ktoś ma kłopoty z zapamiętaniem dla jakiego g rozważany ciąg jest zbieżny, a dla jakiego rozbieżny, niech sprawdzi co się dzieje dla szeregu geometrycznego $\sum_n q^n$. (Nawiasem mówiąc kryterium d'Alemberta i kryterium Cauchy'ego sprowadzają się de facto do kryterium proównawczego z szeregiem geometrycznym.)

`Zadania domowe na 29 listopada:`

Dom 1. Zastosuj kryterium d'Alemberta i kryterium Cauchy'ego do ostatniego zadania.

Dom 2. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}}\right)^n .$$

Dom 3. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})^n} .$$

`(29 listopada 2019)`

Zadanie 8. Zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}.$$

Zadanie 9. Zbadaj zbieżność szeregów

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^{\ln n}} \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/4}$$

$$(c)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{4^n} \qquad\qquad (d)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$$

$$(e)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \qquad\qquad (f)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{n}}$$

$$(g)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\ .$$

Twierdzenie (o zagęszczaniu). *Niech (a_n) będzie malejącym ciągiem liczb dodatnich. Wówczas szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest szereg $\sum_n 2^n a_{2^n}$.*

Korzystając z kryterium zagęszczającego łatwo zbadać zbieżność szeregów postaci $\sum_n \frac{1}{n^p}$, a także $\sum_n \frac{1}{n\cdot\ln(n)^p}$.

`Zadania domowe na 3 grudnia 2019:`

Dom 4. Wykaż, że jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$. *To zadanie dowodzi, że kryterium Cauchy'ego jest co najmniej tak silne jak kryterium D'Alemberta.*

Dom 5. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(\ln(n))^p},$$

w zależności od paraemtru $p \in \mathbb{R}$.

Dom 6. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-(-1)^n)^n \frac{1}{n+2^n}\ .$$

Dom 7 (dodatkowe). Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}\ .$$

`(3 grudnia 2019)`

Zadanie 10. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln n)}.$$

Zadanie 11. Zbadaj zbieżność szeregu w zależności od parametru α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^{\alpha}.$$

`Zadania domowe na 6 grudnia:`

Dom 8. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha}$$

korzystając z kryterium zagęszczającego (uzasadnij, że spełnione są złożenia!).

Dom 9. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n 10^{\ln(\ln n)}}.$$

Dom 10. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{\ln n^{\ln n}}.$$

Uzupełnienie – uogólnienie twierdzenia o zagęszczaniu

Twierdzenie. *Załóżmy, że*

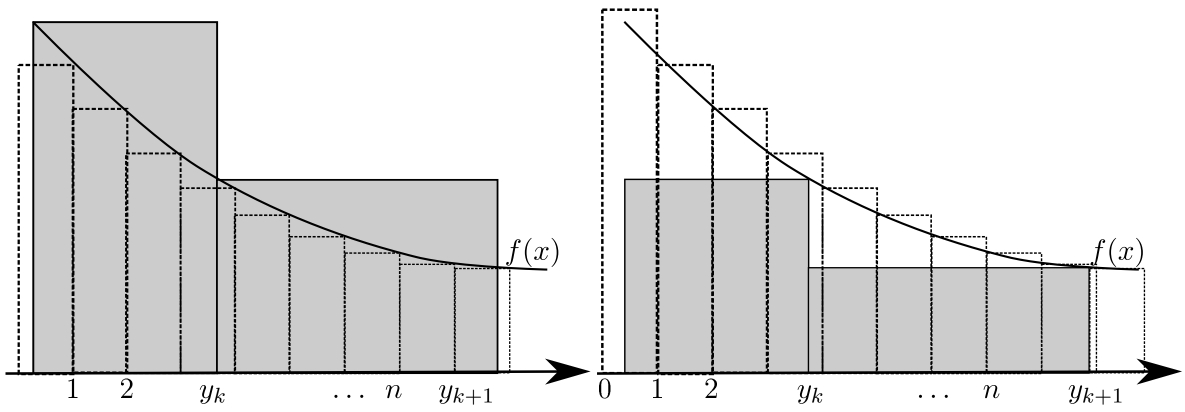
- $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *jest funkcją niemalejącą;*
- (y_k) *jest rosnącym ciągiem liczb dodatnich, rozbieżnym do* $+\infty$*;*
- *istnieje stała dodatnia* $C \in \mathbb{R}_+$*, taka że dla każdego* $k \in \mathbb{N}$ *zachodzi nierówność*

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{y_k - y_{k-1}} \leq C\ .$$

Wówczas szereg $\sum_n f(n)$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest szereg* $\sum_k (y_{k+1} - y_k) f(y_k)$*.*

Uwaga 1. Kładąc $y_k = 2^k$ otrzymujemy standardowe kryterium zagęszczeniowe (wtedy $y_{k+1} - y_k = 2^{k+1} - 2^k = 2^k$), zaś dla $y_k = \xi^k$, gdzie $\xi > 1$, jego uogólnienie z ostatnich ćwiczeń – zauważmy, że $y_{k+1} - y_k = \xi^{k+1} - \xi^k = \xi^k(\xi - 1)$, więc zbieżność szeregu $\sum_k (\xi^{k+1} - \xi^k) f(\xi^k)$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum_k \xi^k \cdot f(\xi^k)$.

Uwaga 2. Łatwo znaleźć kontrprzykład na warunek $\frac{y_{k+1} - y_k}{y_k - y_{k-1}} \leq C$. Weźmy $f(x) = \frac{1}{x^2}$, wówczas szereg $\sum_n f(n) = \sum_n \frac{1}{n^2}$ jest oczywiście zbieżny. Ciąg y_k skonstruujmy indukcyjnie. Niech $y_1 = 1$. Mając y_k, wybieramy y_{k+1} tak aby $\frac{1}{(y_k)^2}(y_{k+1} - y_k) = 1$, tzn. $y_{k+1} = y_k + (y_k)^2$, wówczas $\sum_k (y_{k+1} - y_k) f(y_k) = \sum_k 1$ będzie rozbieżny. Pozostawiamy jako ćwicznie sprawdzenie, że w omawianej sytuacji dodatkowe założenie nie jest spełnione.



Rysunek 1: Graficzna interpretacja dowodu

Dowód twierdzenia. Na rysunku po lewej graficznie zaznaczyliśmy sumę $\sum_n f(n)$ – suma pól przerywanych prostokątów i sumę $\sum(y_{k+1} - y_k)f(y_k)$ – suma pól szarych prostokątów. Po prawej mamy sumy $\sum_n f(n-1)$ – suma pól przerywanych prostokątów i sumę $\sum(y_k - y_{k-1})f(y_k)$ – suma pól szarych prostokątów.
Łatwo zauważyć, że zachodzą następujące nierówności (z dokładnością do, być może, kilku początkowych wyrazów sumy)

$$S_1 := \sum_k (y_{k+1} - y_k)f(y_k) \geq \sum_n f(n) \qquad \text{oraz} \qquad S_2 := \sum_k (y_k - y_{k-1})f(y_k) \leq \sum_n f(n-1)\ .$$

Ponadto na mocy założenia $S_1 = \sum_k (y_{k+1} - y_k)f(y_k) \leq C \cdot \sum_k (y_k - y_{k-1})f(y_k) = C \cdot S_2$. Podsumowując mamy:

$$f(0) + S_1 \geq f(0) + \sum_n f(n) = \sum_n f(n-1) \geq S_2 \qquad \text{oraz} \qquad S_1 \leq C \cdot S_2\ .$$

Z powyższych nierówności widzimy, że jeśli $\sum_n f(n)$ jest skończona, to skończona jest też S_2, a stąd także S_1. Odwrotnie, jeśli $\sum_n f(n)$ jest nieskończona to nieskończona jest też S_1 (i dodatkowo S_2). □

`Zadania dodatkowe:`

Zadanie 12. Podaj przykład szeregu, dla którego Kryterium Cauchy'ego rozstrzyga o zbieżności (istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \neq 1$), natomiast kryterium D'Alemberta takiej odpowiedzi nie daje (granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ nie istnieje).

Zadanie 13. Podaj przykład szeregów zbieżnego i rozbieżnego, dla których odpowiednia granica z kryterium Cauchy'ego i kryterium D'Alemberta wynosi 1.

Zadanie 14. Zbadaj zbieżność szeregów w zależności od parametru α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)}.$$

Zadanie 15. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \left(\ln(\ln n)\right)^2}.$$