AM I.1 2019/2020 (gr. 5)
Temat 3: Ciągi i ich granice

(22 października 2019)

Zadanie 1. Rozważy ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ określony następująco

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots \; .$$

Rozstrzygnij czy ciąg ten jest a) rosnący? b) ograniczony?

Zadanie 2. Ciąg Fibonacciego zdefiniowany jest rekurencyjnie $F_1 = F_2 = 1$ oraz $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Udowodnij, że n-ty wyraz tego ciągu dany jest wzorem Bineta

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Zadania domowe na 25 października:

Dom 1. Czy ciąg Fibonacci'ego jest a) monotoniczny? b) ograniczony?

Dom 2. Znajdź (zgadnij i udowodnij) wzór na n-ty wyraz ciągu spełniającego rekurencję

$$x_{x+2} = 4x_{n+1} - 4x_n,$$

Jeżeli: a) $x_0 = 0$, $x_1 = 4$; b) $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

(25 października 2019)

Rozwiązywanie rekurencji liniowych (na przykładzie ciągu Fibonacci'ego).
Zastanówmy się jak można by wymyślić wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacci'ego? Pomysł polega na szukaniu ciągów spełniających rekurencję

(1)
$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

w postaci $x_n = a^n$ *dla pewnego* $a \in \mathbb{R}$. *Taki ciąg spełnia* (1) *wtedy i tylko wtedy gdy* $a^{n+2} = a^{n+1} + a^n$, *co prowadzi do* $a^2 = a + 1$. *Stąd już łatwo dostaniemy dwa pierwiastki* $a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. *Zauważmy na koniec, że jeśli ciągi* (x_n) *oraz* (y_n) *spełniają rekurencję* (1), *to spełnia ją również ich dowolna kombinacja liniowa postaci* $(\lambda \cdot x_n + \mu \cdot y_n)$, *gdzie* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Stąd mamy ogólną postać ciągu spełniającą rekurencję* (1) *postaci*

$$x_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \; .$$

Współczynniki λ *i* μ *dobieramy tak, aby spełnione były warunki początkowe* $x_1 = x_2 = 1$.
Uwaga! Analogicznie możemy rozwiązywać wszystkie inne rekurencje liniowe. Z zastrzeżeniem, że gdy pojawi się pierwiastek wielokrotny pojawiają się dodatkowe rozwiązania postaci $x_n = na^n$ *– zob. zadanie domowe 2 a).*

Zadanie 3. Oblicz granice następujących ciągów

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \frac{n}{n^3+3}, \quad c_n = \frac{n^2+5n+3}{3n^2-5n+8} \; .$$

Twierdzenie (Arytmetyczne własności granic). *Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne odpowiednio do granic a oraz b, to wówczas zbieżne są ciągi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$. Ponadto, o ile $b \neq 0$, zbieżny jest ciąg $\frac{a_n}{b_n}$; gdy $b > 0$ zbieżny jest ciąg $(b_n^{a_n})$, zaś gdy $a, b > 0$, zbieżny jest ciąg $(\log_{a_n} b_n)$. Ponadto*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b, \quad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b, \quad \lim_{n\to\infty} \log_{a_n} b_n = \log_a b\ .$$

Zadanie 4. Oblicz granice następujących ciągów

$$a_n = \sqrt[n]{n^2}, \quad b_n = \sqrt[n]{3n+1}, \quad c_n = \sqrt[n^2]{n^2}, \quad d_n = \frac{n^5}{3^n}.$$

Twierdzenie (O trzech ciągach). *Jeśli wyrazy ciągów (a_n), (b_n) i (c_n) spełniają dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zależność $a_n \leq b_n \leq c_n$, oraz jeśli ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g, wówczas ciąg (b_n) jest również zbieżny do granicy g.*

`Zadania domowe na 29 października:`

Dom 3. Oblicz granicę ciągu $e_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Dom 4. Oblicz granicę ciągu $f_n = \sqrt[n]{1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}$.

Dom 5. Znajdź wzór na n-ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, \quad a_0 = 4, \quad a_1 = 7.$$

`(29 października 2019)`

Zadanie 5. Wykaż, że dla dowolnych liczb $\alpha > 0$ i $c > 1$, ciąg $a_n = \frac{n^\alpha}{c^n}$ zbiega do 0 przy $n \to \infty$. (Pozostało nam do wykazania, że dla $|a| < 1$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.)

Zadanie 6. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+3}}.$$

Zadanie 7. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+5} - \sqrt[3]{n+2})\sqrt[3]{n^2}.$$

Zadanie 8. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+5} - \sqrt[3]{n+2})(\sqrt[3]{2n^2 + 4n + 5}).$$

Zadanie 9. Oblicz granice ciągów $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ oraz $b_n = \frac{\cos(n!)}{n^2}$.

Stwierdzenie. *Jeśli (a_n) jest ciągiem zbieżnym do 0, zaś (b_n) ciągiem ograniczonym (tzn. jeśli istnieje takie $M \in \mathbb{R}$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $|b_n| \leq M$), to ciąg $(a_n \cdot b_n)$ zbiega do 0 przy $n \to \infty$.*

`Zadania domowe na 5 listopada:`

Dom 6. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}.$$

Dom 7. Rozważmy podzbiór $A \subset \mathbb{R}$. Wykaż, że jeśli $c \in \mathbb{R}$ jest ograniczeniem górnym A, oraz istnieje ciąg (a_n) elementów A zbieżny do c, to $c = \sup A$.

`(5 listopada 2019)`

Zadanie 10. Oblicz granice ciągów $a_n = \sqrt[n^2]{n^2}$, $b_n = \sqrt[n]{3^n + n^3}$.

Twierdzenie (O ciągu monotonicznym i ograniczonym). *Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

Zadanie 11. Wykaż, że ciąg $s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.
Obliczenie granicy jest bardzo trudne

Zadanie 12. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie: $a_1 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Wykaż, że (a_n) jest zbieżny i oblicz jego granicę.

Zadanie 13. Oblicz następujące granice

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n,$$

$$(b) \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{2n+3}.$$

Zadanie 14. Wykaż, że jeśli ciąg x_n jest rozbieżny do $+\infty$ przy $n \to +\infty$ to

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)^{x_n} = e \ . \quad \text{Ogólniej dla dowolnego } a \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{x^n}\right)^{x_n} = e^a \ .$$

Zadanie 15. Oblicz granice:

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \left(1.001 + \frac{5}{n}\right)^{2n+3},$$

$$(b) \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n,$$

$$(c) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n+4}.$$

`Zadania domowe na 8 listopada:`

Dom 8. Czy ciąg $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ jest zbieżny?

Dom 9. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5} .$$

`Zadania pisemne na 12 listopada:`

Dom 10. Ciąg a_n określony jest rekurencyjnie

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n^2 + 2a_n.$$

Wykaż, że jest to ciąg zbieżny i oblicz jego granicę.

Dom 11. Znajdź wzór na n- ty wyraz ciągu X_n zadanego rekurencyjnie

$$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n + 1, \quad X_1 = X_2 = 1.$$

`(8 listopada 2019)`

Zadanie 16. Oblicz granice:

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n n} ,$$

$$(b) \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{2n+1}} .$$

Zadanie 17. Wykaż, że ciąg $f_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}$ jest zbieżny. Dla chętnych: obliczyć jego granicę.

Zadanie 18. Udowodnij, że dla każdego $x > -1$ prawdziwe jest oszacowanie

$$\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x .$$

Zadanie 19. Wykaż, że jeśli ciąg x_n zbiega do 0 to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1 .$$

`Zadania domowe na 12 listopada:`

Dom 12. Wykaż, że jeśli ciąg x_n rozbiega do $+\infty$ to

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{x_n}}{x_n} = +\infty .$$

Dom 13. Oblicz granicę ciągu $f_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}$.

`(12 listopada 2019)`

Zadanie 20. Oblicz granice

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n^3}{n},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

Zadanie 21. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^3+2n)}{\sqrt{n}}\ .$$

Twierdzenie (Stolza). *Niech (y_n) będzie ciągiem ściśle monotonicznym (od pewnego miejsca). Załóżmy ponadto, że zachodzi jeden z warunków:*

a) $\lim_{n\to\infty} y_n = \pm\infty$

b) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Wówczas jeśli ciąg $\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right)$ *jest zbieżny, to zbieżny jest też ciąg* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ *oraz*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\ .$$

`Zadania domowe na 15 listopada:`

Dom 14. Wykaż, że dla dowolnej liczby $\alpha\in\mathbb{R}$ i dowolnej liczby $\beta>0$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n^\alpha}{n^\beta}=0.$$

Innymi słowy logarytm rośnie wolniej niż n w dowolnej potędze dodatniej.

Dom 15. Wykaż, że jeśli ciąg x_n zbiega do 0 to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=1\ .$$

Wskazówka: Wykorzystaj wiedzę o zachowaniu się logarytmu w okolicy 1.

`(15 listopada 2019)`

Zadanie 22. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^3+\ldots+n^2}{n^3}.$$

Zadanie 23. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}.$$

Zadanie 24. Ciąg a_n jest zbieżny do granicy g. Wykaż, że ciąg średnich arytmetycznych tego ciągu $s_n := (a_1+a_2+\ldots+a_n)\frac{1}{n}$ jest także zbieżny do g.

Zadanie 25. Ciąg $a_n>0$ jest zbieżny do granicy $g>0$. Wykaż, że ciąg średnich geometrycznych tego ciągu $s_n := \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$ jest także zbieżny do g.

Zadanie 26. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^3+5n+1)}{\ln(n^2+6n+5)} \ .$$

`Zadania domowe na 19 listopada:`

Dom 16. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1!+3!+5!+\ldots+(2n-1)!}{2!+4!+\ldots+(2n)!}.$$

Dom 17. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n}\right)}{\ln(n)^2} \ .$$

Dom 18. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}} \ .$$

`(19 listopada 2019)`

Twierdzenie (Bolzano-Weierstrassa). *Z każdego ciągu ograniczonego (a_n) da się wybrać podciąg zbieżny.*

Wniosek. Z każdego ciągu da się wybrać podciąg zbieżny (być może do granicy niewłaściwej).

Definicja. Dla danego ciągu (a_n) przez $\omega(a_n)$ oznaczmy zbiór wszystkich *punktów skupienia* tego ciągu (inaczej zbiór wszystkich *granic częściowych* ciągu), a więc zbiór granic wszystkich zbieżnych podciągów ciągu (a_n).
Granicą górną (odpowiednio *dolną*) ciągu (a_n) nazywamy liczbę

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \sup\omega(a_n) \quad \text{(odpowiednio } \liminf_{n\to+\infty} a_n := \inf\omega(a_n)\text{)}.$$

Innymi słowy granica górna (odp. dolna) to najmniejsze ograniczenie górne (odp. największe ograniczenie dolne) zbioru wszystkich granic częściowych danego ciągu.

Zadanie 27. Wyznacz zbiory punktów skupienia następujących ciągów

$$a_n = (-1)^n \ , \qquad b_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\cdot\frac{\ln(2^n+2)}{\ln(3^n+2)} \ .$$

Zadanie 28. Wykaż, że w definicji granicy górnej (odp. dolnej) supremum (odp. infimum) możemy zastąpić przez maksimum (odp. minimum)

Rozwiązanie: *Rozważmy ciąg (a_n) i przez $\omega(a_n)$ oznaczmy zbiór jego granic częściowych Chcemy pokazać, że $\sup\omega(a_n)=\max\omega(a_n)$, czyli że zbiór $\omega(a_n)$ ma element maksymalny.*
Oznaczmy przez $g := \sup\omega(a_n)$. Z definicji kresu górnego dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje element $w\in\omega(a_n)$ taki, że $w>g-\varepsilon$. Innymi słowy, istnieje pewien podciąg (a_{n_k}) ciągu (a_n) zbieżny do granicy $w>g-\varepsilon$. Ponieważ wyrazy tego podciągu mogą być dowolnie bliskie granicy w, znajdziemy wśród nich element (o dowolnie dużym indeksie) większy niż $w-\varepsilon>g-2\varepsilon$.

Teraz już łatwo skonstruujemy podciąg ciągu (a_n) zbieżny do g, a więc pokażemy, że $\sup \omega(a_n) = g \in \omega(a_n)$. Konstrukcja będzie indukcyjna: a_{n_1} wybieramy dowolnie, a w $(k+1)$-szym kroku wybieramy z ciągu (a_n) element $a_{n_{k+1}}$ o następujących własnościach: indeks n_{k+1} jest większy niż poprzedzający indeks n_k, oraz $a_{n_{k+1}} > g - \frac{2}{k}$. Na mocy poprzednich rozważań taki wybór jest możliwy. Na mocy wniosku z tw. Bolzano-Weierstrassa z ciągu a_{n_k} możemy wybrać podciąg zbieżny do granicy h (być może niewłaściwej). Z nierówności $a_{n_{k+1}} > g - \frac{2}{k}$ wynika, że $h \geq g$. Ponieważ $h \in \omega(a_n)$ (jako granica pewnego podciągu), zaś g było kresem górnym, musi zachodzić $h = g$. □

Uwaga! Powyższe rozumowanie dość łatwo rozszerzyć na przypadek gdy $\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Zadanie 29. Wykaż, że następujące warunki są równoważne

(1) $\limsup_{n\to+\infty} a_n = g$

(2) (a) dla dowolnie wybranego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze niż $g + \varepsilon$

(b) istnieje podciąg (a_{n_k}) ciągu (a_n) zbieżny do g.

Rozwiązanie: „(1) ⇒ (2)”. *(2)(b) wynika z (1) na mocy poprzedniego zadania. Pokażemy teraz, że zaprzeczenie (2)(a) pociąga za sobą zaprzeczenie (1). Istotnie, jeśli (2)(a) nie zachodzi, to dla pewnego $\varepsilon > 0$ w ciągu a_n istnieje nieskończenie wiele wyrazów większych niż $g + \varepsilon$. Na mocy wniosku z tw. Bolzano-Weierstrassa tych wyrazów możemy wybrać podciąg zbieżny do granicy h (być może niewłaściwej), ponieważ wszystkie wyrazy tego podciągu były większe niż $g+\varepsilon$, na mocy twierdzenia o porównywaniu mamy $h \geq g+\varepsilon$. A zatem h jest elementem zbioru $\omega(a_n)$ większym niż g, więc g nie mogło być supremum tego zbioru.*

„(2) ⇒ (1)”. *Niech (a_{n_k}) będzie podciągiem ciągu (a_n) zbieżnym do granicy h. Na mocy warunku (2)(a), dla dowolnego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy podciągu (a_{n_k}) są mniejsze niż $g+\varepsilon$, zatem również granica spełnia $h \leq g + \varepsilon$. Z dowolności ε wnioskujemy, że $h \leq g$, a więc g jest ograniczeniem górnym zbioru granic częściowych $\omega(a_n)$. Z kolei z (2)(b) wynika, że w istocie $g = \max \omega(a_n)$.* □

Zadanie 30. Niech (x_n) i (y_n) będą dowolnymi ciągami. Wykaż, że

$$\limsup_{n\to+\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n .$$

w poprzedniej wersji nierówność była odwrócona!

Wykaż, że równość nie musi zachodzić.

Rozwiązanie: *Z naszych wcześniejszych rozważań wynika, że $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq g$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu a_n są mniejsze niż $g + \varepsilon$.*

Teraz już łatwo pokazać tezę. Oznaczmy $a := \limsup_{n\to+\infty} x_n$ oraz $b := \limsup_{n\to+\infty} y_n$. Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wiemy, że prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są mniejsze niż $a + \varepsilon/2$ oraz że prawie wszystkie wyrazy ciągu (y_n) są mniejsze niż $b + \varepsilon/2$. Stąd wynika, że prawie wszystkie wyrazy ciągu $(x_n + y_n)$ są mniejsze niż $a + b + \varepsilon$, a zatem

$$\limsup_{n\to+\infty}(x_n + y_n) \leq a + b = \limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n .$$

.

Łatwo znaleźć kontrprzykład na równość w powyższej nierówności, np. $x_n = (-1)^n$ i $y_n = (-1)^{n+1}$. Wówczas granice górne obu ciągów wynoszą 1, zaś $x_n + y_n = 0$. □

`Zadanie domowe na 22 listopada:`

Dom 19. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\frac{1}{n}} .$$
