AM I.1 2019/2020 (gr. 5)
Temat 2: Zasada indukcji, podstawowe nierówności

(11 października 2019)

Zadanie 1. Wykaż, że dla każdego n naturalnego

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zadanie 2. Wykaż, że dla każdego n naturalnego

$$1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Zadania domowe na 15 października

Dom 1. Wykaż, że dla każdego naturalnego n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 5.

Dom 2. Wykaż, że dla każdego naturalnego n większego niż 2

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

(15 października)

Zadanie 3. Wykaż, że dla każdego n naturalnego

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < 1.$$

Wskazówka: spróbuj wyrazić lewą stronę explicite; sprytny sposób $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$.

Zadanie 4. Wykaż, że dla każdych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniających zależność $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$ prawdziwa jest nierówność

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Kiedy zachodzi równość?

Zadanie 5. Korzystając z wyników poprzedniego zadania udowodnij, że dla każdych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Zadania domowe na 18 października:

Dom 3. Udowodnij że dla każdego n naturalnego zachodzi równość

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

Dom 4. Udowodnij, że dla każdych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność między średnią geometryczną i harmoniczną

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \geq \left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_n}}{n} \right)^{-1} .$$

`(18 października)`

Zadanie 6. Udowodnij, że dla każdego n naturalnego prawdziwa jest nierówność

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n .$$

Twierdzenie (Nierówność Bernouli'ego). *Niech n będzie liczbą naturalną, zaś $x > -1$ liczbą rzeczywistą. Wówczas zachodzi nierówność*

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x .$$

`Pisemnie na 22 października:`

Dom 5. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

To jest wersja poprawiona.

Dom 6. Udowodnij nierówność Weierstrassa, która jest uogólnieniem nierówności Bernouliego. Dla liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, które wszystkie są tego samego znaku i z których każda jest większa od -1 zachodzi

$$(1+a_1)(1+a_2) \cdot \ldots \cdot (1+a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

`(22 października)`

Zadanie 7. (trudniejsze) Wyznacz kresy zbioru

$$P = \left\{ \sqrt[n]{n} : \ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \right\} .$$

Wskazówka: Spróbuj znaleźć oszacowanie postaci $\sqrt[n]{n} \leq (1+x)^2$, spróbuj wykazać, że ciąg $a_n := \sqrt[n]{n}$ jest malejący od pewnego miejsca.

`Zadania dodatkowe:`

Zadanie 8. Udowodnij, że dla każdych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Zadanie 9. (trudniejsze) Wyznacz kresy zbioru

$$E = \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{k}} + \frac{1}{\sqrt[k]{n}} : \ k, n \in \mathbb{N} \right\} .$$

Zadanie 10. (trudniejsze) Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$