AM I.1 2019/2020 (gr. 5)
Temat 1: Aksjomatyka liczb rzeczywistych, kresy zbiorów

`(5 października 2019)`

Zadanie 1. Które z aksjomatów ciała licz rzeczywistych $\mathbb{R}$ są (nie) spełnione przez zbiory: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

Zadanie 2. Wyznacz kres górny zbioru

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 6 < 0\}.$$

Zadanie 3. Wyznacz kres górny zbioru

$$B = \{x^2 + 6x + 8 \in \mathbb{R} \mid x \in (-2, 3)\}.$$

Zadanie 4. Wyznacz kres górny zbioru

$$C = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadanie 5. Wyznacz kres górny zbioru

$$D = \left\{ \frac{-n}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Wskazówka: Wykaż, że dla $n > 3$ zachodzi nierówność $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$.

`Zadania domowe na 8 października`

Dom 1. Dokończyć ostatnie zadanie.

Dom 2. Korzystając z aksjomatów ciała liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ wykaż, że $1 > 0$.

Dom 3. *Maksimum* zbioru $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy element $a =: \max A \in A$ taki, że dla każdego $b \in A$ zachodz $a \geq b$. Wykaż że jeśli podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ posiada maksimum $\max A$, to

$$\sup A = \max A.$$

`(8 października 2019)`

Przy wyznaczaniu kresu górnego korzystaliśmy z następującego faktu.

Lemat 1. *Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym podzbiorem, zaś $c \in \mathbb{R}$ pewnym ograniczeniem górnym zbioru A. Równoważne są następujące stwierdzenia:*

a) Element c jest najmniejszym ograniczeniem górnym A, tzn. jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi $b \geq a$, to $b \geq c$.

b) Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje element $a \in A$ taki, że $a > c - \varepsilon$.

Definicja. *Kresem dolnym* (*infimum*) zbioru $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy największe z ograniczeń dolnych A.

Z aksjomatu ciągłości wynika, że jeśli zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu to ma kres dolny w $\mathbb{R}$.

Zadanie 6. Czy zbiór $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ spełnia aksjomat ciągłości?

Zadanie 7. Wyznacz kresy zbioru

$$E = \left\{ \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \mid k, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadanie 8. (pomocnicze) Wyznacz kresy zbioru

$$U = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definicja. Rozważmy dwa podzbiory zbioru liczb rzeczywistych A i B. *Sumą algebraiczną* zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony z sum wszystkich par elementów ze zbiorów A i B

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Zadanie 9. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ będą dowolnymi podzbiorami. Oznaczmy iloczyn algebraiczny zbiorów A i B następująco $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$. Czy prawdziwe jest stwierdzenie:

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B \ ?$$

Zadanie 10. Wyznacz kresy zbioru

$$F = \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{n} : \ k, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadanie 11. Wyznacz kresy zbioru

$$G = \left\{ \frac{nk}{1 + n + k} : n, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

`Zadania domowe na 11 października:`

Dom 4. Dokończyć ostatnie zadanie.

Dom 5. Wykaż, że jeśli $A, B \subset \mathbb{R}$ są zbiorami niepustymi i ograniczonymi z góry to suma algebraiczna tych zbiorów posiada kres górny, oraz

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \ .$$

`Pisemnie na 15 października:`

Dom 6. Wyznacz kresy zbioru

$$B = \left\{ \frac{(n + m)^2}{2^{nm}} : \ n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

`(11 października 2019)`

Zadanie 12. Wykaż, że liczba $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ jest niewymierna.

`Zadania dodatkowe:`

Zadanie 13. Udowodnij, że dla dwóch podzbiorów ograniczonych $A, B \subset \mathbb{R}$ zachodzi

$$\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B).$$