Mecz matematyczny w piątek 13tego.

Przed Państwem lista kilku zadań zakresu całego przerobionego dotychczas materiału. Niektóre są trochę trudniejsze niż standardowe, inne mogą tylko wyglądać na trudne. Zadaniem każdej z Drużyn jest rozwiązanie jak największej liczby zadań w czasie ćwiczeń. Rozwiązanie należy oddać prowadzącemu ćwiczenia. Będą one punktowane w skali olimpijskiej 0-2-5-6. Zwycięzcy poza wiekopomną chwałą dostaną nagrodę.

Zadanie 1. (nierówność Czebyszewa) Rozważmy dwa jednomonotoniczne ciągi liczb rzeczywistych $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n$ oraz $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots \geq b_n$. Wówczas dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_n$ (σ to funkcja, która zamienia kolejność numerków w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$, S_n to standardowe oznaczenie zbioru wszystkich permutacji n-elementowych) prawdziwa jest nierówność

$$a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \ldots + a_n b_{\sigma(n)} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_n b_n.$$

Zadanie 2. (średnia arytmetyczno-geometryczna) Wybierzmy liczby dodatnie $x > y > 0$, a następnie określmy rekurencyjnie ciągi x_n i y_n w następujący sposób. Ustalamy wartości początkowe $x_1 = x$ oraz $y_1 = y$ a kolejne wyrazy wyliczamy ze wzorów

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n}.$$

Wykaż, że rozważane ciągi oraz są zbieżne i mają wspólną granicę $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. Liczbę tę nazywamy *średnią arytmetyczno-geometryczną* liczb x i y.

Zadanie 3. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n + \frac{(-1)^n}{n}}} .$$

Zadanie 4. Zapiszmy liczbę $(\sqrt{2}+1)^n$ w postaci $a_n\sqrt{2} + b_n$, gdzie a_n i b_n są liczbami całkowitymi. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt[4]{2}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{2} - \sqrt[n]{2}) .$$

Zadanie 6. Zbadaj zbieżność szeregu w zależności od wartości parametrów $p, q \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^2 \cdot (p+1)^2 \cdot (p+2)^2 \cdot \ldots \cdot (p+n)^2}{q^2 \cdot (q+1)^2 \cdot (q+2)^2 \cdot \ldots \cdot (q+n)^2} .$$

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{2n^2+n\sqrt{n}}}{(\sqrt[n]{n}+1)^n} .$$

Zadanie 8. Ciąg liczb nieujemnych a_n ma tę własność, że szeregi $\sum a_n$ oraz $\sum \ln n \cdot a_n$ są zbieżne. Rozstrzygnij czy zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\ln \ln n} \left[(\ln n)^{a_n} - 1 \right] \ ?$$

Zadanie 9. (twierdzenie o trzech szeregach) Niech a_n, b_n, c_n będą ciągami liczb rzeczywistych (niekoniecznie dodatnich) spełniającymi nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla prawie wszystkich n. Wykaż, że jeżeli zbieżne są szeregi $\sum a_n$ i $\sum c_n$ to zbieżny jest także szereg $\sum b_n$. Ponadto jeśli oba szeregi są zbieżne bezwzględnie to $\sum b_n$ jest również zbieżny bezwzględnie.

Zadanie 10. Rozważmy ciąg liczb dodatnich a_n i skonstruujmy z niego dwa ciągi $b_n = (1+a_1)(1+a_2) \cdot \ldots \cdot (1+a_n)$ oraz $c_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Wykaż, że b_n jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy c_n jest zbieżny. (Przez zbieżny rozumiemy „zbieżny do granicy skończonej”).

Zadanie 11. Niech a_n będzie ciągiem liczb dodatnich. Wykaż, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ jest zbieżny to zbieżny jest także szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}}.$$