Zadania gwiazdką (aktualizacja: 15 stycznia 2020)

Zadanie 1. ($*/2$) Udowodnij, że dla każdych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność między średnią arytmetyczną i kwadratową

$$\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}\right)^{1/2} \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} .$$

Zadanie 2. ($*$) Na zamku Camelot obraduje $2n$ rycerzy. Każdy z nich ma co najmniej n przyjaciół spośród pozostałych rycerzy. Udowodnij, że mężny król Artur przy pomocy mądrego maga Merlina będzie umiał ich tak usadzić przy okrągłym stole aby każdy z rycerzy miał za sąsiadów swoich przyjaciół. Bycie przyjacielem jest symetryczne, ale niekoniecznie przechodnie. Wykaż, że minimalnej liczby przyjaciół nie można zmniejszyć, to znaczy gdyby było wiadomo, że każdy z rycerzy miał co najmniej $n-1$ to mogłoby się zdarzyć, że nie można ich dobrze usadzić. *Dla tych, którzy lepiej orientują się w legendzie - wolnego miejsca czekającego dla sir Galaharda nie uwzględniamy.*

Zadanie 3. ($*$) Udowodnij, że dla każdych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność między średnią trzeciego stopnia i średnią kwadratową

$$\left(\frac{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3}{n}\right)^{1/3} \geq \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2}{n}\right)^{1/2} .$$

Zadanie 4. ($*$) Ciąg (x_n) określony jest rekurencyjnie

$$x_1 > 0 \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}.$$

Wykaż, że ciąg $\frac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$ jest zbieżny i oblicz jego granicę.

Zadanie 5. ($*$) Ciąg x_n określony jest rekurencyjnie $x_1 = 1$ oraz $x_{n+1} = x_n - ax_n^2$, gdzie $a \in (0, 1)$. Wykaż, że ciąg nx_n jest zbieżny i oblicz jego granicę.

Zadanie 6. ($*/2$) Oblicz granicę ciągu

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \ldots + \frac{n^2}{2^n}.$$

Zadanie 7. ($*/2$) Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{3n}$.

Zadanie 8. ($*$) Oblicz granicę

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \frac{n}{1} + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \ldots + \frac{n^n}{n!}}{e^n}.$$

Zadanie 9. ($*/2$) Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Wykaż, że wówczas

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n\right) = 0.$$

Zadanie 10. ($*$) Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Zadanie 11. ($*$) Wykaż zbieżność i oblicz granicę

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}.$$

Uwaga! Uznawane będą jedynie rozwiązania elementarne, nie korzystające z różniczkowania, reguły de l'Hospitala, rozwinięcia w szereg Taylora, itp.

Zadanie 12. ($*$) Czy istnieje funkcja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ posiadająca skończoną granicę w każdym punkcie swojej dziedziny, ale nieciągła w żadnym punkcie dziedziny?

Zadanie 13. ($*/2$) Znajdź wszystkie funkcje ciągłe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające tożsamość

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \quad \text{dla wszystkich } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 14. ($*/2$) Wykaż, że funkcja addytywna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tzn. taka, że $f(x+y) = f(x)+f(y)$ dla każdych x i y) i ograniczona na pewnym przedziale $[a,b] \subset \mathbb{R}$ jest liniowa.

Zadanie 15. ($*$) Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie $a_1 = 2019$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1} a_n$. Uwaga $642\pi < 2019 < 643\pi$.