AM II.2 2018/2019 – zadania przygotowawcze z form różniczkowych

Podstawy

Zadanie 1. Zapisz następujące 1-formy w bazie kanonicznej (w bazie $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$):

a) $x\mathrm{d}(\sin(x^2y)) + y\mathrm{d}(\cos(xy^2))$,

b) $\exp(-x - y + z)\mathrm{d}(\exp(x + y + z))$,

c) $\mathrm{d}(x \cos y \cos z)$

Formę $\omega \in \Omega^k(U)$ nazywamy dokładną *gdy istnieje forma $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ taka, że $\omega = \mathrm{d}\alpha$. Formę $\omega \in \Omega^k(U)$ nazywamy* zamkniętą *gdy $\mathrm{d}\omega = 0$. Każda forma dokładna jest zamknięta (bo $\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0$ dla dowolnej formy), ale niekoniecznie na odwrót.*

Dla 1-form postaci $\omega = g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$; $g'_y = h'_x$ zamkniętość odpowiada równości pochodnych $g'_y = h'_x$, i odpowiednio $g'_z = j'_x$ i $h'_z = j'_y$ dla 1-form postaci $\omega = g(x,y,z)\mathrm{d}x + h(x,y,z)\mathrm{d}y + j(x,y,z)\mathrm{d}z$.

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy następujące 1-formy są zamknięte/dokładne i ewentualnie znajdź funkcje pierwotne.

a) $\omega = \cos(x + y)\mathrm{d}x + \cos(x + y)\mathrm{d}y$,

b) $\omega = \frac{2xy}{1+x^4y^2}\mathrm{d}x + \frac{x^2}{1+x^4y^2}\mathrm{d}y$,

c) $\omega = 2xy \exp(x^2y)\mathrm{d}x + x^2 \exp(x^2y)\mathrm{d}y$,

d) $\omega = x^3\mathrm{d}x + (y^5 + x^2)\mathrm{d}y$.

Zadanie 3. Oblicz pullback $\Phi^*\omega$ dla:

a) $\omega = xy\mathrm{d}x + 2z\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z$ i $\Phi(u, v) = (uv, u^2, 3u + v)$,

b) $\omega = 4x\mathrm{d}x + 9y\mathrm{d}y$ i $\Phi(r, \phi) = (3r \cos \phi, 2r \sin \phi)$,

c) $\omega = x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$ i $\Phi(r, \phi) = (3r \cos \phi, 2r \sin \phi)$.

Zadanie 4. Oblicz różniczkę zewnętrzną form

a) $\sum_{i=1}^n (-x_i)^{i+1}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_n$.

b) $\det DF(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, gdzie $F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2$ jest odwzorowaniem gładkim.

c) $f_1(x_1, x_3)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 + f_2(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + f_3(x_2, x_3)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$

d) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}(f\partial_k g - g\partial_k f)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \mathrm{d}x_{k-1} \wedge \mathrm{d}x_{k+1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_n$, gdzie $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ są funkcjami gładkimi.

Zadanie 5. Czy forma

$$\omega = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y$$

jest zamknięta/dokładna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$?

Zadanie 6. Dla wektora $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ definiujemy formę $\omega_{\boldsymbol{a}} = a_1\mathrm{d}x_1 + a_2\mathrm{d}x_2 + a_3\mathrm{d}x_3$. Niech α będzie dowolną 1-formą w $\mathbb{R}^3$ i niech

$$\omega_{\boldsymbol{a}} \wedge \alpha = c_1\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + c_2\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + c_3\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\ .$$

Wykaż, że wektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ jest prostopadły do $\boldsymbol{a}$.

Zadanie 7. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania, wykaż że $\omega_{\boldsymbol{a}} \wedge \omega_{\boldsymbol{b}} = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ są liniowo zależne.

Zadanie 8. Oblicz rotację i dywergencję pól $\boldsymbol{F}(x,y,z) = [x,y,z]$ oraz $\boldsymbol{G}(x,y,z) = [\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{y}{x}]$.

Zadanie 9. Rozważmy formę $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}w \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$. Rostrzygnij, czy istnieją 1-formy $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ takie, że $\omega = \alpha \wedge \beta$?

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. a)$(\cos(x^2y)2x^2y - \sin(xy^2)y^3)\mathrm{d}x + (\cos(x^2y)x^3 - \sin(xy^2)2xy^2)\mathrm{d}x$; b) $e^{2z}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$, c) $\cos y \cos z \mathrm{d}x - x \sin y \cos z \mathrm{d}y - x \cos y \sin z \mathrm{d}z$.

Zadanie 2. a), b), c) formy są zamknięte i dokładne (określone na obszarze 1-spójnym $\mathbb{R}^2$), funkcje pierwotne to $\sin(x+y)$, $\mathrm{arctg}(x^2y)$, $\exp(x^2y)$. d) forma nie jest zamknięta, więc też nie jest dokładna.

Zadanie 3. a) $(u^3v^2 + 9u^2 + 4uv)\mathrm{d}u + (u^4v - u^2)\mathrm{d}v$, b) $36r\mathrm{d}r$, c) $6r^2\mathrm{d}\phi$

Zadanie 4. a) $\left[\sum_{i=1}^n (i+1)(x_i)^i\right]\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$, b) 0 – rozważana forma to $\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2$, c) 0, d) $\left[f(\sum_k \partial_k^2 g) - g(\sum_k \partial_k^2 f)\right]\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$.

Zadanie 5. I dokładna i zamknięta: $\omega = \mathrm{d}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)$.

Zadanie 6. i **Zadanie 7.** Można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Sposób bardziej geometryczny: Wprowadźmy oznaczenia: $\omega_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}\rangle$ oraz $\eta_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\rangle$. Zatem $\omega_{\boldsymbol{a}} = a_1\mathrm{d}x_1 + a_2\mathrm{d}x_2 + a_3\mathrm{d}x_3$ oraz $\eta_{\boldsymbol{a}} = a_1\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + a_2\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + a_3\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$. Teza wynka z faktu, że Wówczas $\omega_{\boldsymbol{a}} \wedge \omega_{\boldsymbol{b}} = \eta_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}$ i że każda jedno-forma α w $\mathbb{R}^3$ jest postaci $\alpha = \omega_{\boldsymbol{b}}$ dla pewnego pola wektorowego $\boldsymbol{b}$.

Zadanie 8. $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} = [0,0,0]$, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} = 3$, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{G} = [0, y(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}), -z(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2})]$; $\mathrm{div}\,\boldsymbol{G} = 0$.

Zadanie 9. Nie. Jeśli $\omega = \alpha\wedge\beta$ to $\omega\wedge\omega = \alpha\wedge\alpha\wedge\beta\wedge\beta = 0$ (uwaga: tożsamość $\alpha\wedge\alpha = 0$ zachodzi dla wszystkich form nieparzystego stopnia, ale niekoniecznie dla form parzystego stopnia). Tymczasem $\omega\wedge\omega = 2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}w \neq 0$.

Całkowanie form po podrozmaitościach

Zadanie 1. Rozważmy funkcje gładkie jednej zmiennej $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i 1-formę $\omega = f(x)\mathrm{d}x + g(y)\mathrm{d}y + h(z)\mathrm{d}z \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Wykaż, że ω ma własności niezależności całki od drogi.

Zadanie 2. Oblicz całkę

$$\int_C (x^2 - y)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y \ ,$$

gdzie C jest łukiem paraboli $y^2 = 8x$ zorientowanym od punktu $(0,0)$ do punktu $(2,4)$.

Zadanie 3. Oblicz całkę $\int_\Gamma \mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z$, gdzie $\Gamma = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in [0,1]\}$ z orientacją wyznaczoną przez rosnące t.

Zadanie 4. Oblicz całkę

$$\int_D (x^2 + y)\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}y \ ,$$

gdzie D to łuk paraboli $y^2 = x$ zorientowany od $(1,1)$ do $(1,-1)$.

Zadanie 5. Oblicz całkę

$$\int_{S^1} xe^{x^2+y^2}\mathrm{d}x + ye^{x^2+y^2}\mathrm{d}y \ ,$$

gdzie S^1 to okrąg jednostkowy zorientowany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Zadanie 6. Oblicz całkę z formy $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ po konturze będącym brzegiem kwadratu:

a) o środku $(3,3)$ i boku długości 1

b) o środku $(1,1)$ i boku długości 3.

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. Forma ω jest zamknięta ($\mathrm{d}\omega = 0$) i określona na obszarze 1-spójnym $\mathbb{R}^2$, a więc jest dokładna.
Zadanie 2. Odp. $\frac{16}{3}$.
Zadanie 3. Odp. 3. $\omega = \mathrm{d}(x + y + z)$.
Zadanie 4. Odp. -2. $\omega = \mathrm{d}(xy + \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2})$.
Zadanie 5. Odp. 0. $\omega = \mathrm{d}(\frac{1}{2}e^{x^2+y^2})$.
Zadanie 6. Odp. a) 0, b) 2π. Najprościej zauważyć że we współrzędnych biegunowych (r, ϕ) forma przyjmuje postać $\mathrm{d}\phi$.

Twierdzenie Stokes'a i okolice

Klasyczne wersje tw. Stokes'a - słownik

Rozważmy pole wektorowe $\boldsymbol{F} = (f, g, h) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Definicja klasyczna	***Definicja w języku form***
Krążenie pola $\boldsymbol{F}$ *wzdłuż konturu* Γ, *praca siły* $\boldsymbol{F}$ *wzdłuż* Γ $\int_\Gamma \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{t} \rangle \mathrm{d}\sigma^1$ $\boldsymbol{t}$ *oznacza jednostkowy wektor styczny do* Γ	*Całka z formy* $\omega_{\boldsymbol{F}} = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y + h\mathrm{d}z$ *po* Γ $\int_\Gamma f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y + h\mathrm{d}z$
Strumień (przepływ) pola $\boldsymbol{F}$ *przez powierzchnię* S $\int_S \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}\sigma^2$ $\boldsymbol{n}$ *oznacza wektor jednostkowy prostopadły do* S	*Całka z formy* $\eta_{\boldsymbol{F}} = f\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + g\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + h\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ *po* S $\int_S f\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + g\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + h\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$
Rotacja pola $\boldsymbol{F}$ $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = [h'_y - g'_z, f'_z - h'_x, g'_x - f'_y]$	$\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{F}} = \eta_{\operatorname{rot} \boldsymbol{F}}$
Dywergencja pola $\boldsymbol{F}$ $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \circ \boldsymbol{F} = f'_x + g'_y + h'_z$	$\mathrm{d}\eta_{\boldsymbol{F}} = (\operatorname{div} \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$
Tw. Greena, $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ $\int_{\partial S} \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{t} \rangle \mathrm{d}\sigma^1 = \int_S \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}\sigma^2$	*Tw. Stokes'a dla* $\omega_{\boldsymbol{F}}$ $\int_{\partial S} \omega_{\boldsymbol{F}} = \int_S \mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{F}}$
Tw. Gaussa, $M^3 \subset \mathbb{R}^3$ $\int_{\partial M} \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}\sigma^2 = \int_M \operatorname{div} \boldsymbol{F} \mathrm{d}\lambda^3$	*Tw. Stokes'a dla* $\eta_{\boldsymbol{F}}$ $\int_{\partial M} \eta_{\boldsymbol{F}} = \int_M \mathrm{d}\eta_{\boldsymbol{F}}$

Zadanie 1. Oblicz miarę obszaru ograniczonego krzywą

$$\begin{cases} x = a\cos^3(t) \\ y = a\sin^3(t) \end{cases},$$

gdzie $t \in [0, 2\pi]$.

Zadanie 2. Oblicz całkę z formy $\alpha = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ po torusie powstałym przez obrót okręgu o promieniu 7 i środku $(13, 0, 0)$ leżącego w płaszczyźnie $y = 0$, wokół osi z. Przyjmujemy orientację dziedziczoną ze standardowej orientacji wnętrza torusa.

Zadanie 3. Oblicz całkę

$$\int_A (y^2 + x^3)\mathrm{d}x + x^4\mathrm{d}y\ ,$$

gdzie A jest brzegiem kostki $[0, 1]^2$ zorientowanym zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Zadanie 4. Oblicz całkę z formy $x^3\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ po połówce torusa sparametryzowanej następująco

$$\begin{cases} x = (4 + \cos\alpha)\cos\theta \\ y = (4 + \cos\alpha)\sin\theta \\ z = \sin\alpha\ , \end{cases}$$

gdzie $\alpha \in [0, 2\pi]$ i $\theta \in [0, \pi]$. Orientację można przyjąć dowolnie.

Zadanie 5. Oblicz pole obszaru w $\mathbb{R}^2_+$ ograniczonego krzywą o równaniu $x^3 + y^3 = 3Rxy$, gdzie $R > 0$. *Wskazówka*: rozważ rozwiązania powyższego równania leżące na prostej $y = tx$.

Zadanie 6. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 > y, x^4 - xy^2 - y^3 = 0\}$. *Wskazówka*: rozważ punkty krzywej leżące na prostej $y = -tx$.

Zadanie 7. Niech T to powierzchnia zadana paretrycznie

$$((2+\cos v)\cos u, (2+\cos v)\sin u, \sin v)\ ,$$

gdzie $u, v \in [0, 2\pi]$. Policz całkę

$$\int_T (y^2+z^2)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (x^2+y^2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + (x^2+z^2)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x\ .$$

Zadanie 8. Oblicz całkę z 2-formy

$$\omega = (y^2-x^2)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (2xz-y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

po powierzchni M powstałej w wyniku obrotu cykloiody opisanej parametrycznie $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 0$, $z(t) = 1 - \cos t$, gdzie $t \in [0, \pi]$ wokół prostej $x = \pi$, $y = 0$. Wektor normalny zewnętrzny do M w punkcie $(\pi, 0, 2)$ to $[0, 0, 1]$.

Zadanie 9. Obliczyć całkę z $(k-1)$-formy

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j x_j \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j-1} \wedge \mathrm{d}x_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k$$

po sferze jednostkowej $S^{k-1}(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^k$ z naturalną orientacją sfery jako brzegu kuli jednostkowej $B^k(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^k$.

Zadanie 10. Dla pola wektorowego $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, 0, 0)$ oraz obszaru $\Omega = [0, 1]^3$, policz niezależnie od siebie całki $\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F} \mathrm{d}\lambda^3$, $\int_{\partial\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, oraz $\int_{\partial\Omega} \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}\sigma^2$, gdzie $\boldsymbol{n}$ to wektor normalny zewnętrzny.

Zadanie 11. Dla pola wektorowego $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, -y, 0)$ oraz obszaru $\Omega = \{\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$, policz niezależnie od siebie całki $\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F} \mathrm{d}\lambda^3$, $\int_{\partial\Omega} x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$, oraz $\int_{\partial\Omega} \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}\sigma^2$, gdzie $\boldsymbol{n}$ to wektor normalny zewnętrzny.

Zadanie 12. Rozmaitość $M = \{(x, y, z) \mid (x-z)^2 + 4y^2 + (1-z)^2 = 4\}$ jest zorientowana tak, że strona ujemna jest widoczna z punktu $(0, 0, 0)$. Oblicz strumień pola wektorowego $\boldsymbol{F}(x, y, z) = [x, y-1, z+1]$ przez M.

Zadanie 13. Rozstrzygnij, czy 2-forma

$$\omega = \frac{(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) \wedge (u\mathrm{d}x - w\mathrm{d}u)}{(x^2+y^2)(u^2+w^2)}$$

jest zamknięta? Czy jest dokładna?

__**Odpowiedzi i wskazówki:**__

Zadanie 1. Odp. $\frac{3}{8}\pi$. Wsk. $\cos^4(t)\sin^2(t) = \frac{1}{8}\sin^2(2t)(1+\cos(2t))$
Zadanie 2. Odp. 3 razy objętość torusa; $\mathrm{d}\alpha = 3\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.
Zadanie 3. Odp. 0.
Zadanie 4. Odp. $\frac{201}{2}\pi^2$.
Zadanie 5. Odp. $\frac{3}{2}R^2$.
Zadanie 6. Odp. $\frac{1}{210}$.
Zadanie 7. Odp. 0. Wygodnie jest skorzystać z tw. Stokes'a: $\mathrm{d}\omega = 0$, a T to brzeg pełnego torusa. Bezpośredni rachunek też prowadzi do dobrego wyniku, ale po dość żmudnych obliczeniach.
Zadanie 8. Odp. 0. Z tw. Stokes'a, $\mathrm{d}\omega = 0$, w związku z czym wystarczy policzyć całkę powierzchniową z ω po dysku $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-\pi)^2 + y^2 = \pi^2, z = 0\}$.
Zadanie 9. Odp. $k \cdot \lambda^k(B^k(\mathbf{0},1))$. Korzystamy z tw. Stokes'a: $\mathrm{d}\omega = k \cdot \mathrm{vol}$, gdzie vol to standardowa forma objętości w $\mathbb{R}^k$.
Zadanie 10. Odp. 1.
Zadanie 11. Odp. 0. Zauważ, że $\partial\Omega$ składa się z dwóch części opisanych, odpowiednio, równaniami $z = \sqrt{x^2+y^2}$ i $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, gdzie $x^2+y^2 \le \frac{1}{2}$.
Zadanie 12. Rozważany zbiór to elipsoida. Z tw. Stokes'a wystarczy policzyć 3 krotną objętość jej wnętrza, co łatwo zrobić zmieniając liniowo zmienne na $t = x - z$, $s = 2y$, $u = 1 - z$.
Zadanie 13. Forma jest postaci $\omega = \alpha \wedge \beta$, gdzie $\mathrm{d}\alpha = 0 = \mathrm{d}\beta$. Wobec $\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta) = \mathrm{d}\alpha\wedge\beta \pm \alpha\wedge\mathrm{d}\beta$ zachodzi $\mathrm{d}\omega = 0$. Forma nie jest zamknięta: Rozważmy rozmaitość $T = S^1 \times S^2 \subset \mathbb{R}^4$. Wobec $\partial T = \varnothing$ gdyby zachodziło $\omega = \mathrm{d}\eta$ mielibyśmy z Tw. Stokesa $\int_T \omega = \int_T \mathrm{d}\eta = \int_{\partial T}\eta = 0$. Tymczasem $\int_T \omega = \int_{S^1\times S^1} \alpha\wedge\beta = \int_{S^1}\alpha \cdot \int_{S^1}\beta = \pm(2\pi)^2$.

Orientacja

Na początek trochę teorii

Definicja. Rozważmy przestrzeń wektorową V. Na zbiorze baz tej przestrzeni wprowadźmy relację równoważności:

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \sim \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

wtedy i tylko wtedy gdy macierz przejścia między tymi bazami ma dodatni wyznacznik.
Orientacją V nazywamy wybór jednej z dwóch klas równoważności powyższej relacji

Definicja. *Orientacją rozmaitości* $N \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy lokalnie zgodny wybór orientacji każdej jej przestrzeni stycznej $\mathrm{T}_p N$, gdzie $p \in N$.
Nie każda rozmaitość daje się zorientować (np. wstęga Möbiusa). Jeśli się da to mówimy o rozmaitości *orientowalnej*. Rozmaitość z konkretnie wybraną orientacją nazywamy *rozmaitością zorientowaną*.

Podstawowe fakty:

1. *Rozmaitość $N \subset \mathbb{R}^n$ klasy C^1 będącą brzegiem rozmaitości n-wymiarowej $M \subset \mathbb{R}^n$ jest orientowalna.*
2. *Jeśli $N \subset \mathbb{R}^n$ jest orientowalna, to podrozmaitość $N' \subset N$ tego samego wymiaru co N również jest orientowalna.*
3. *Rozmaitość orientowalna i spójna ma dokładnie dwie orientacje, wyznaczone przez orientację jednej konkretnej przestrzeni stycznej.*

Sposoby definiowania orientacji *(na rozmaitości k-wymiarowej $N \subset \mathbb{R}^n$ orientowalnej i spójnej):*

1. *Wskazanie wyróżnionej bazy $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ przestrzeni $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}_0} N$, gdzie $\boldsymbol{p}_0 \in N$ to dowolnie wybrany punkt.*
2. *Załóżmy, że $\Phi : \mathbb{R}^k \overset{otw.}{\supset} U \to \mathbb{R}^n$ jest parametryzacją N. Wówczas standardowa orientacja w dziedzinie (tzn. taka że baza standardowa $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k\}$ w $\mathbb{R}^k$ jest dodatnio zorientowana) zadaje orientację w obrazie. Mianowicie, przyjmujemy, że baza $\{D\Phi[\boldsymbol{e}_1], D\Phi[\boldsymbol{e}_2], \dots, D\Phi[\boldsymbol{e}_k]\}$ jest dodatnio zorientowana.*
3. *Jeśli N jest brzegiem $(k+1)$-wymiarowej rozmaitości zorientowanej $M \subset \mathbb{R}^n$, wówczas N dziedziczy z M orientację. Mianowicie, powiemy, że baza $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ przestrzeni $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}_0} N$ jest dodatnio zorientowana, jeśli baza $\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$, powstała przez dopisanie wektora $\boldsymbol{n}$ – normalnego do N i skierowanego na zewnątrz N jest dodatnio zorientowaną bazą $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}_0} M$. W skrócie*

$$\{\boldsymbol{n}, \mathbf{or}_N\} = \mathbf{or}_M \ .$$

4. *Jeśli N jest jedno-wymiarowe $(k = 1)$ orientację możemy utożsamiać z kierunkiem obiegu krzywej N.*
5. *Jeśli N jest powierzchnią w $\mathbb{R}^3$ (a więc $k = 2$, $n = 3$), zadanie orientacji jest równoważne z wyróżnieniem jednego z dwóch kierunków prostopadłych do N, mianowicie jeśli $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ jest dodatnio zorientowaną bazą $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}_0} N$, takim wyróżnionym kierunkiem będzie $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$. Mówimy czasem, że ów wyróżniony kierunek wskazuje dodatnią stronę N.*

Uwaga. W typowych zadaniach orientacja jest zadana na jeden z powyższych sposobów. Zmieniając opis podrozmaitości (na przykład przechodząc do nowych zmiennych), albo używając twierdzenia Stokesa, trzeba zadbać aby wszystkie nasze wybory były zgodne z orientacją daną pierwotnie w zadaniu.

Zadanie 1. Niech $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni wektorowej. Wykaż, że dla dowolnej permutacji $\sigma \in \Sigma_n$ bazy $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i $\{v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}\}$ są zgodnie zorientowane wtedy i tylko wtedy gdy $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$.
Zadanie 2. Niech $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni wektorowej. Rozważmy skalary $a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wykaż, że bazy $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i $\{a_1 \cdot v_1, a_2 \cdot v_2, \dots, a_n \cdot v_n\}$ są zgodnie zorientowane wtedy i tylko wtedy gdy $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n > 0$.
Zadanie 3. Rozważmy paraboloidę $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$ zorientowaną tak, że wektor $\boldsymbol{n} = [2, 0, -1]$ jest wektorem normalnym skierowanym na zewnątrz P w punkcie $(1, 0, 1)$. Czy zgodne z tą orientacją są:

a) Orientacja P indukowana przez parametryzację $\Phi : (x,y) \mapsto (x,y,x^2+y^2)$ ze standardowej orientacji $\mathbb{R}^2 \ni (x,y)$?

b) Orientacja P indukowana przez parametyzację $\Psi : (r,\phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi, r^2)$ ze standardowej orientacji $\mathbb{R}^2 \ni (r,\phi)$?

c) Orientacja P zadana w punkcie $(0,0,0)$ przez bazę wektorów stycznych $\boldsymbol{w}_1 = [1,1,0]$ i $\boldsymbol{w}_2 = [1,0,0]$?

Zadanie 4. Rozważmy powierzchnię obrotową $S = \{(x,y,z) \mid z^2 + y^2 = \cos^2(x), x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$ zorientowaną tak, że dodatnia strona tej powierzchni jest widoczna z punktu $(0,0,0)$. Czy parametryzacja $\Phi : (x,\phi) \mapsto (x, \cos x \sin\phi, \cos x \cos\phi)$ gdzie $\mathbb{R}^2 \ni (x,\phi)$ ma orientację standardową jest zgodna z tą wybraną orientacją?

Zadanie 5. Rozważmy rozmaitość 3-wymiarową z brzegiem $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$ ze standardową orientacją dziedziczoną z $\mathbb{R}^3$. Brzeg $\partial M = S^2(\mathbf{0},1) \cup S^2(\mathbf{0},2)$ ma orientację dziedziczoną z orientacji M. Czy parametryzacja $\Phi : (\beta,\phi) \mapsto (\cos\beta\cos\phi, \cos\beta\sin\phi, \sin\beta)$, gdzie $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) \ni (\beta,\phi)$ ma orientację standardową, jest zgodna z tak przyjętą orientacją $S^1(\mathbf{0},1)$?

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. Macierz przejścia miedzy tymi bazami to macierz permutacji σ. Jej wyznacznik to $\operatorname{sgn}(\sigma)$

Zadanie 2. Macierz przejścia między tymi bazami to $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jej wyznacznik to $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n$.

Zadanie 3. a) Nie; $D\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$, stąd obrazem bazy standardowej $\boldsymbol{e}_1 = [1,0]^T$, $\boldsymbol{e}_2 = [0,1]^T$ w punkcie $(x,y) = (1,0) = \Phi^{-1}(1,0,1)$ są wektory $\boldsymbol{v}_1 = [1,0,2]$ i $\boldsymbol{v}_2 = [0,1,0]$. Ich iloczyn wektorowy to $[-2,0,1] = -\boldsymbol{n}$. b) Nie. Postępując analogicznie jak poprzednio, baza $\boldsymbol{v}_1 = [1,0,2]$, $\boldsymbol{v}_2 = [0,1,0]$ jest zorientowana zgodnie z parametryzacją, a przeciwnie niż zadana orientacja P. c) Tak. Łatwo zauważyć, że wektory normalne zewnętrzne do P mają wszystkie ujemną składową z. Z kolei $= \boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2 = [0,0,-1]$ też jest skierowany w dół.

Zadanie 4. Odp: nie. Wybierzmy dowolny punkt rozważanej powierzchni, na przykład $(0,1,0) = \Phi(0,\frac{\pi}{2})$. $D\Phi(0,\frac{\pi}{2}) = \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sin x \sin\phi & \cos x \cos\phi \\ -\sin x \cos\phi & -\cos x \sin\phi \end{pmatrix}\right|_{(0,\frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Stąd obrazem bazy $\boldsymbol{e}_1 = [1,0]^T$, $\boldsymbol{e}_2 = [0,1]^T$ jest baza $\boldsymbol{v}_1 = [1,0,0]$ i $\boldsymbol{v}_2 = [0,0,-1]$. Wyznacza ona kierunek prostopadły do S równy $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = [0,1,0]$, a więc orientacja zgodna z parametryzacją wskazuje od punktu $(0,0,0)$, a nie do punktu $(0,0,0)$ jak wyjściowa parametryzacja.

Zadanie 5. Odp: tak. Orientacja $S^2(\mathbf{0},1)$ jest zadana przez wektor normalny do ∂M skierowany na zewnątrz M, a więc jak łatwo zauważyć do środka rozważanej sfery. Macierz różniczki Φ to $D\Phi(\beta,\phi) = \begin{pmatrix} -\sin\beta\cos\phi & -\cos\beta\sin\phi \\ -\sin\beta\sin\phi & \cos\beta\cos\phi \\ \cos\beta & 0 \end{pmatrix}$. Obrazem bazy standardowej $\boldsymbol{e}_1 = [1,0]^T$, $\boldsymbol{e}_2 = [0,1]^T$ jest zatem baza $\boldsymbol{v}_1 = [-\sin\beta\cos\phi, -\sin\beta, \sin\phi, \cos\beta]$, $\boldsymbol{v}_2 = [-\cos\beta\sin\phi, \cos\beta\cos\phi, 0]$. Wyznacza ona wektor normalny $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = [-\cos^2\beta\cos\phi, -\cos^2\beta\sin\phi, -\cos\beta\sin\beta] = (-\cos\beta)\Phi(\phi,\beta)$, wobec $\cos\beta > 0$ wektor ten jest skierowany do środka sfery $S^2(\mathbf{0},1)$, tak jak w rozważanej orientacji.