AM II.2 2018/2019 – zadania przygotowawcze do kolokwium

Całka Lebesgue'a, twierdzenie Fubini'ego, podstawienie

Zadanie 1. Oblicz miarę zbioru

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, y^2 + z^2 < 1\} \ .$$

Zadanie 2. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą o równaniu $(x^2 + y^2)^{3/2} = y$.
Zadanie 3. Niech $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 1, 0 < x + y < 1, 0 < z < \frac{1}{x+y+1}\}$. Oblicz całkę

$$\int_A \frac{1}{(x + y + 1)^2} \mathrm{d}\lambda^3(x, y, z) \ .$$

Zadanie 4. Oblicz całkę

$$\int_{\{x>0,y>1,z>1\}} \frac{x}{1 + (xyz)^4} \mathrm{d}\lambda^3(x, y, z) \ .$$

Zadanie 5. Oblicz całkę

$$\int_{\{x^2+y^2 \leq y, x \geq 0\}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}\lambda^2(x, y) \ .$$

Zadanie 6. Niech $a < b$ będą liczbami dodatnimi. Oblicz miarę zbioru

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq xy \leq 2, a \leq \frac{y}{x^2} \leq b\} \ .$$

Zadanie 7. Oblicz całkę

$$\int_A \ln(x + y)(x - 2y)^2 \mathrm{d}\lambda^2(x, y) \ ,$$

gdzie $A \subset \mathbb{R}^2$ to równoległobok o wierzchołkach $(1, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$ i $(0, 1)$.
Zadanie 8. Oblicz całkę

$$\int_B x^4 y \mathrm{d}\lambda^2(x, y) \ ,$$

gdzie $B = \{(x, y) \mid \frac{1}{3}y^2 < x < \frac{1}{2}y^2, \frac{1}{x} < y < \frac{2}{x}\}$.
Zadanie 9. Oblicz miarę zbioru $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y > 0, xy < z, x^4 + z^4 < x^2 z\}$.
Zadanie 10. Oblicz całkę

$$\int_0^1 \int_0^{1-2\sqrt{x}+x} x + y + 2\sqrt{xy} \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

Używając zamiany zmiennych $x = s \cdot \cos^4(t)$, $y = s \cdot \sin^4(t)$.
Zadanie 11. Oblicz całkę z poprzedniego zdania używając zamiany zmiennych $t = \sqrt{x}$, $s = \sqrt{y}$.

Zadanie 12. Rozważmy funkcję całkowalną $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$2\int_a^b \int_x^b f(x)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 .$$

Zadanie 13. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a. Definiujemy funkcję $\phi(y) := \int_y^{y+1} f(x)\mathrm{d}x$. Wykaż, że $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, oraz

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x .$$

Zadanie 14. Zbiór $A \subset [0,1]$ jest mierzalny. Definiujemy funkcję $f(x) = \lambda^1(A \cap [0,x])$. Wykaż, że

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lambda(A)^2 .$$

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. Odp: $\frac{16}{3}$. Rozwiązanie: całkujemy kolejno po z, y i x w granicach, odpowiednio, $\pm\sqrt{1-y^2}$, $\pm\sqrt{1-x^2}$ i ± 1. W ostatniej całce wygodnie jest podstawić $x = \cos\alpha$.
Zadanie 2. Odp: 1. We współrzędnych biegunowych liczymy miarę zbioru $\{r^2 \leq \sin\ phi\}$.
Zadanie 3. Odp: $\frac{1}{8}$. Całkować kolejno po z, y i x.
Zadanie 4. Odp: $\frac{\pi}{2}$. *Wskazówka*: scałkuj po x (z podstawieniem $u = (xyz)^2$).
Zadanie 5. Odp: $\frac{1}{6}$. Można użyć podstawienia biegunowego.
Zadanie 6. Odp: $\frac{1}{3}\ln(b/a)$. *Wskazówka*: użyć podstawienia $xy = t$, $\frac{y}{x^2} = s$.
Zadanie 7. Odp: $8\ln 2 - 3$. *Wskazówka*: użyj podstawienia $s = x + y$, $t = x - 2y$.
Zadanie 8. Odp: $\frac{5}{24}$. *Wskazówka*: Użyj podstawienia $s = xy$, $t = \frac{y^2}{x}$.
Zadanie 9. Odp: 2. Całkujemy najpierw po y dochodząc do $\lambda^3(A) = \int_{x>0, x^4+z^4<x^2z} \frac{z}{x}\mathrm{d}\lambda^2(x,z)$. Teraz są co najmniej dwa sposoby rozwiązania: sprytny przekształcić $x^4 + z^4 < x^2z$ na $\frac{x^2}{z} + \frac{z^3}{x^2} < 1$ i użyć podstawienia $t = \frac{x^2}{z}$ oraz $s = \frac{z^3}{x^2}$. Mniej sprytny: rozwiazać nierówność bi-kwadratową na x względem z dochodząc do $x \in \left(\sqrt{\frac{z}{2} - \sqrt{\frac{z^2}{4} - z^4}}, \sqrt{\frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - z^4}}\right)$. Całkujemy najpierw po x, a potem po $z \in (0, \frac{1}{2})$ korzystając z własności logarytmu.
Zadanie 10. Zauważmy, że mamy do czynienia z całką z funkcji $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ po zbiorze $A = \{(x,t) \mid , x, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$. Jakobian przekształcenia $\Phi : (t,s) \mapsto (x = s \cdot \cos^4(t), y = s \cdot \sin^4(t))$ to $4s\cos^3(t)\sin^3(t)$. Przeciwdziedziną jest $\Phi^{-1}(A) = \{(s,t) \mid s \in [0,1], t \in [0, \pi/2]\}$. Stosując twierdzenie o zamianie zmiennych dostajemy

$$\int_{\Phi^{-1}(A)} s \cdot 4s\cos^3(t)\sin^3(t)\mathrm{d}\lambda^2(t,s) \overset{\text{Fubini}}{=} 4\int_0^1 s^2\mathrm{d}s \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^3(t)\sin^3(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{9} .$$

Zadanie 11. Jakobian przekształcenia $\Psi : (x, y) \mapsto (t = \sqrt{x}, s = \sqrt{y})$ to $\frac{1}{4\sqrt{xy}}$, zatem

$$\int_A (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \mathrm{d}\lambda^2(x, y) = \int_A (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot 4\sqrt{xy} \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy}} \mathrm{d}\lambda^2(x, y) \overset{\text{podst.}}{=} \int_{\Psi(A)} (t + s)^2 4ts \mathrm{d}\lambda^2(t, s) = \frac{1}{9} ,$$

gdzie $A = \{(x, y) \mid x \in [0, 1], y \in [0, (1 - \sqrt{x})^2]\} = \{(x, y) \mid x, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$, zaś $\Psi(A) = \{(t, s) \mid t, s \geq 0, t + s < 1\}$.

Zadanie 12. Stosując twierdzenie Fubini'ego (dlaczego można?) łatwo uzasadnić, że $\int_a^b \int_x^b f(x)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ to całka z funkcji $F(x, y) := f(x)f(y)$ po trójkącie $\Delta_{y>x} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid b \geq y \geq x \geq a\}$. Zamieniając nazwy x i y dostaniemy, że jest to również całka z funkcji $F(x, y) := f(x)f(y)$ po trójkącie $\Delta_{x>y} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid b \geq x \geq y \geq a\}$. Zatem

$$2 \int_{\Delta_{y>x}} F = \int_{\Delta_{y>x}} F + \int_{\Delta_{x>y}} F = \int_{[a,b]^2} F \overset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right)^2 .$$

Zadanie 13. Używając tw. Fubini'ego (uzasadnij dlaczego można) mamy

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_y^{y+1} f(x)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x-1}^{x} f(x)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) 1 \mathrm{d}x .$$

Zadanie 14. Używając tw. Fubini'ego (uzasadnij dlaczego można) mamy

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \chi_A(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \chi_A(x) \left(\int_0^x \chi_A(y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\Delta_x} \chi_A(x)\chi_A(y)\mathrm{d}\lambda^2(x, y) ,$$

gdzie $\Delta_x = \{(x, y) \mid 1 > x > y > 0\}$. Z symetrii x i y jest to również równe całce z $\chi_A(x)\chi_A(y)$ po zbiorze $\Delta_y = \{(x, y) \mid 1 > y > x > 0\}$. Zatem

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{\Delta_x \cup \Delta_y} \chi_A(x)\chi_A(y)\mathrm{d}\lambda^2(x, y) = \frac{1}{2} \int_{[0,1]^2} \chi_A(x)\chi_A(y)\mathrm{d}\lambda^2(x, y) = \frac{1}{2}\lambda(A)^2 .$$

Przejścia graniczne w całce

Zadanie 1. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{(\sin x+\cos x)^n}{1+(\sin x+\cos x)^{2n}}e^{-2x}\mathrm{d}x \ .$$

Zadanie 2. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} \ .$$

Zadanie 3. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-2\pi n}^{2\pi n}\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\exp(-2x^2)\mathrm{d}x \ .$$

Zadanie 4. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{x^2+y^2\le 1\}}\frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^n+y^n)\mathrm{d}\lambda^2(x,y).$$

Zadanie 5. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{nx+x^5+1}\mathrm{d}x \ .$$

Zadanie 6. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x^n+2^n)}{nx^2}\mathrm{d}x \ .$$

Zadanie 7. Niech $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0<x^2+y^2<1, 0<z<2\}$. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \frac{z}{n}\ln\left[(x^2+y^2)^n+(x^2+y^2)^{-n}\right]\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) \ .$$

Zadanie 8. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_A \ln\left[1+\frac{x^2+y^2}{n}\right]\ln\left[1+\frac{z}{n}\right]e^{(x^2+y^2-z^2)}\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) \ ,$$

gdzie $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1, x^2+y^2\ge z^2, z>0\}$.

<u>**Odpowiedzi i wskazówki**</u>:

Zadanie 1. Odp: 0. Pod całką mamy wyrażenie postaci $\frac{a^n}{1+a^2n}$, gdzie $|a| < 2$ zbieżne punktowo do 0 poza zbiorem miary zero $|a| = 1$ (rozpatrujemy 2 przypadki $|a| > 1$ i $|a| < 1$) i ograniczone przez 1. Korzystając z tw.Lebesgue'a o zbieżności zmajowanej przechodzimy do granicy pod całką.
Zadanie 2. Mamy zbieżność punktową do $\frac{1}{x^3}$. Majorantę otrzymamy z nierówności $\ln(1+y) \geq \frac{y}{1+y}$.
Zadanie 3. Mamy zbieżność punktową do $\exp(-x^2)$ na $\mathbb{R}$. To jest też majoranta.
Zadanie 4. $(x^n + y^n)$ zbiega punktowo p.w. do 0 na kole $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Majorantą jest $2\frac{|\ln(x^2+y^2)|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ – całkowalność tej funkcji w kole jednostkowym widać łatwo we współrzędnych biegunowych.
Zadanie 5. Odp: $+\infty$. Ciąg funkcji podcałkowych jest dodatni i monotonicznie rosnący. Granicą punktową jest $\frac{1}{x}$.
Zadanie 6. Funkcja podcałkowa jest większa niż $\frac{\ln(2)}{x^2}$ dla $x < 2$, a więc nie jest całkowalna.
Zadanie 7. Odp: π. Po zamianie na współrzędne walcowe mamy $\int_B \frac{z}{n} \ln\left[r^{-2n}(1+r^{4n})\right] r dz dr d\phi$, gdzie $B = \{r \in (0,1), \phi \in (0, 2\pi), z \in (0,2)\}$. Granicą punktową jest $-2zr\ln(r)$, a majorantą $-2zr\ln(r) + zr\ln(2)$.
Zadanie 8. Po zamianie na współrzędne walcowe mamy $n^2 \int_B \ln(1+\frac{r^2}{n})\ln(1+\frac{z}{n})e^{r^2}e^{-z^2} r dr dz d\phi$, gdzie $B = \{r^2 \leq z^2 \leq 1 - r^2\}$. Granicą punktową (i jednocześnie majorantą) jest $r^3 e^{r^2} z e^{-z^2}$. Całkujemy podstawiając $u = z^2$, a następnie $w = r^2$.

Całka z parametrem

Zadanie 1. Niech
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(xy)}{1+|x|y^2} \mathrm{d}y \ .$$
Dla jakich wartości $x \in \mathbb{R}$ funkcja f jest określona i ciągłą w x.
Zadanie 2. Niech $f : [-1,1]^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną. Udowodnij, że funkcja
$$g(\boldsymbol{y}) = \int_{[-1,1]^n} f(\boldsymbol{x}) \sin(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle) \mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x})$$
Jest funkcją klasy C^1 na $\mathbb{R}^n$. Sybmol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza tutaj standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$.
Zadanie 3. Dla $a > 0$ oblicz pochodną funkcji
$$g(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2} \mathrm{d}x \ .$$
Zadanie 4. Korzystając z wyników poprzedniego zadania wyznacz funkcję $g(a)$.
Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na $[a,b] \times [c,d]$. Dla $x, y \in (a,b) \times (c,d)$ definiujemy funkcję
$$F(x,y) := \int_{[a,x]\times[c,y]} f(u,v) \mathrm{d}\lambda^2(u,v) \ .$$
Wykaż, że $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = f(x,y)$.

<u>**Odpowiedzi i wskazówki**:</u>

Zadanie 1. Odp: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Możemy oszacować $|\frac{\cos(xy)}{1+|x|y^2}| \le \frac{1}{1+|x|y^2}$ co jest całkowalne na $\mathbb{R}$ dla $x \neq 0$. Dla $x = 0$ funkcja jest stale równa 1 i nie ma całkowalności. Dla $x \in [a,b] \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mamy wspólne oszacowanie $|\frac{\cos(xy)}{1+|x|y^2}| \le \frac{1}{1+\min\{|a|,|b|\}\cdot y^2}$, a więc ciągłość$f(x)$ w (a,b) wynika z tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.
Zadanie 2. Stosujemy twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całki dla $h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) \sin(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle)$ do pochodnych cząstkowych ∂_{y^i} oraz $\partial_{y_i} \partial_{y^j}$. Wspólne (dla wszystkich $\boldsymbol{y}$) oszacowanie przez funkcję całkowalną uzyskamy szacując $\sin(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle)$ i $\cos(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle)$ przez 1 oraz x_i przez 1 na $[-1,1]^n$ oraz korzystając z całkowalności f.
Zadanie 3. Odp: $g'(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$. Stosujemy twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całki. Kładąc $f(x,a) := \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}$ mamy $|f(x,a)| \le \min\{a, \frac{1}{x^2}\}$, co jest całkowalne na $\mathbb{R}_+$. Dla $a \in (\varepsilon, +\infty)$, $\varepsilon > 0$, mamy $|\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}| \le e^{-\varepsilon x^2}$, a więc wspólne ograniczenie przez funkcję całkowalną. Stąd możemy wejść z pochodną pod całkę i różniczkowalność $g(a)$ na każdym przedziale $(\varepsilon, +\infty)$.
Zadanie 4. Odp: $g(a) = \sqrt{\pi \cdot a}$. Odcałkowując $g'(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$ dostajemy $g(a) = \sqrt{\pi \cdot a} + C$ dla $a > 0$. Ciągłość $g(a)$ w zerze łatwo uzasadnić z tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej i oszacowania $|f(x,a)| \le \min\{a, \frac{1}{x^2}\}$. Oczywiście $g(0) = 0$, stąd $C = 0$.
Zadanie 5. Liczymy z definicji, korzystając z (jednostajnej) ciągłości f na zbiorze $[a,b] \times [c,d]$. Mamy $\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_c^y \int_x^{x+h} f(u,v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \int_c^y f(x,v) \mathrm{d}v$. Analogicznie kolejne różniczkowanie daje nam $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = f(x,y)$.

Przestrzeń funkcji całkowalnych, splot

Zadanie 1. Rozstrzygnij czy funkcja

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

jest całkowalna na $\mathbb{R}^2$.
Zadanie 2. Czy funkcja $f(x,y) = e^{-xy}$ jest całkowalna na $\mathbb{R}^2_+$?
Zadanie 3. Dla funkcji całkowalnej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określamy $\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(\xi x)\mathrm{d}x$. Wykaż, że:

a) $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona.

b) Jeśli $f_n \to f$ w normie $L_1(\mathbb{R})$, to $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ jednostajnie.

c) Dla $f = \chi_{[0,\pi]}$, funkcja $\widehat{f}$ nie jest całkowalna na $\mathbb{R}$.

Zadanie 4. Rozważmy $f_0(t) := \chi_{[0,1]}(t)$ i zdefiniujmy indukcyjnie $f_n := f_0 * f_{n-1}$. Udowodnij, że

a) Nośnik f_n to $[0, n+1]$.

b) $f_n \geq 0$.

c) f_n na każdym przedziale $[k, k+1]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ jest wielomianem stopnia nie większego niż n.

d) f_n jest klasy C^{n-1}, dla $n \geq 1$.

Zadanie 5. Rozważmy funkcję całkowalną $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taką, że $\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}) = 1$. Funkcję $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określamy wzorem

$$g(\boldsymbol{y}) = \int_{B(\boldsymbol{y},1)} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}) \ .$$

Udowodnij, że g jest całkowalna na $\mathbb{R}^n$ (i ciągła) i oblicz całkę $\int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{y})$.
Zadanie 6. Podaj przykład ciągu $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ takiego, że

a) $f_n \to 0$ w normie $L^1(\mathbb{R})$ ale dla każdego $x \in \mathbb{R}$ ciąg $f_n(x)$ nie jest zbieżny do 0.

b) $f_n(x) \to 0$ punktowo, ale f_n nie ma żadnego pociągu zbieżnego w normie $L^1(\mathbb{R})$.

Zadanie 7. Udowodnij, że zbiór $B = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid \|f\|_{L^1} \leq 1\}$ nie jest zwartym podzbiorem $L^1(\mathbb{R})$.

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. Nie. Na przykład dość łatwo oszacować z dołu wartość całki z f na zbiorze $0 < y < \frac{x}{2}$ przez

$$\int_{0<y<\frac{x}{2}} \frac{x^2(1-\frac{1}{4})}{x^4(1+\frac{1}{4})^2} \mathrm{d}\lambda^2(x,y) = c\int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{z}{x}2} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = +\infty\ .$$

Inny sposób: przejść do współrzędnych biegunowych – dostajemy całkę $\int \frac{1}{r}(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$ – mamy osobliwość typu $\int_0^1 \frac{1}{r}\mathrm{d}r$.

Zadanie 2. Nie. Funkcja jest stałego znaku, możemy więc zastosować tw. Fubini'ego i dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-xy}\mathrm{d}\lambda^2(x,y) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{-1}{y} e^{-xy}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{y}\mathrm{d}y = +\infty\ .$$

Podobnie dowodzi się używając podstawienia biegunowego.

Zadanie 3. a) Mamy wspólne oszacowanie przez funkcję całkowalną $|f(x)\sin(\xi x)| < |f(x)|$, skąd ograniczoność i ciągłość (tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej). b) $|\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \cdot |\sin(\xi x)|\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ i oszacowanie nie zależy od ξ. c) $\widehat{f}(\xi) = \frac{1-\cos(\xi\pi)}{\xi}$. Dość łatwo oszacować z dołu całkę z modułu tej funkcji przez sumę szeregu harmonicznego.

Zadanie 4. a) Łatwo sprawdzić, że $\mathrm{supp}(f*g) \subset \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$, supp oznacza tutaj nośnik funkcji, zaś $+$ sumę algebraiczną zbiorów. b) splot funkcji nieujemnych jest nieujemny – całkujemy iloczyn funkcji nieujemnych. c) indukcyjnie – $f_n(x) = \int_0^1 f_{n-1}(x-t)\mathrm{d}t$ – dla $x \in [k, k+1]$ całkujemy wielomian, wynikiem jest wielomian wyższego stopnia. d) indukcyjnie $f_n(x) = \int_x^{x+1} f_{n-1}(t)\mathrm{d}t = F_{n-1}(x+1) - F_{n-1}(x)$, gdzie F_{n-1} oznacza funkcje pierwotną f_{n-1}. Jeśli f_{n-1} było klasy C^{n-2} to F_{n-1} jest klasy C^{n-1}.

Zadanie 5. Ciągłość g wynika z ciągłości całki jako funkcji zbioru. Stosując tw. Fubini'ego (dlaczego można?) mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{B(\boldsymbol{y},1)} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{y}) = \int_A f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^{2n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\ ,$$

gdzie $A = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| < 1\}$. A zatem

$$\int_A f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^{2n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{B(\boldsymbol{x},1)} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}) = \lambda^n(B(\boldsymbol{0},1))\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x})\ .$$

Zadanie 6. a) Wystarczy aby dla każdego x co pewien czas wartość $f_n(x)$ wynosiła 1. Łatwo zbudować taki przykład dla funkcji na odcinku $[0,1]$ – patrz rozwiązanie zadania 2 w dziale zadnia różne. Tę konstrukcję można rozszerzyć kładąc na przykład $F_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} f_n(x)(\chi_{[k,k+1]}(x) + \chi_{[k,k+1]}(-x))$, gdzie f_n to funkcja z tego rozwiązania. Innymi słowy: na każdym odcinku całkowitoliczbowym $[k, k+1]$ skonstruowana funkcja F_n to funkcja f_n przeskalowana w taki sposób, aby mieć całkowalność na całym $\mathbb{R}$. b) Rozwiązaniem jest wędrujący pagórek $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$. Oczywiście mamy zbieżność punktową do 0, ale $\|f_n - f_m\|_{L^1} = 2$ gdy $m \neq n$, a więc nie ma żadnego podciągu w f_n będącego ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $L^1(\mathbb{R})$.

Zadanie 7. Przykład z punktu b) z poprzedniego zadania rozwiązuje problem. Mamy ciąg funkcji $\|f_n\| \leq 1$ i $\|f_n - f_m\| > 1$. Wówczas $A = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest domkniętym podzbiorem kuli B, a zatem gdyby B była zwarta to również A byłby zwarty, a jak wiemy ten ciąg nie ma żadnego podciągu zbieżnego.

Miara i całka na podrozmaitościach

Zadanie 1. Oblicz długość krzywych

1. $\gamma = \{(3t, 3t^2, 2t^3) \mid t \in [0,1]\}$,

2. $\eta = \{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$.

Zadanie 2. Wyznacz położenie środka ciężkości krzywych z poprzedniego zadania.
Zadanie 3. Wyznacz położenie środka ciężkości jednorodnego drutu w kształcie łuku krzywej o równaniu $r = 1 + \cos\phi$, gdzie $\phi \in [0, \pi]$.
Zadanie 4. Krzywa γ jest zadana we współrzędnych sferycznych

$$(x, y, z) = (r\cos\beta\cos\phi, r\cos\beta\sin\phi, r\sin\beta)$$

gdzie $r \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i $\phi \in (0, 2\pi)$; zależnością $\gamma = \{(r(t), \beta(t), \phi(t)) \mid t \in [a, b]\}$. Wykaż, że

$$l(\gamma) = \int_{[a,b]} \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\left(\beta'(t)^2 + \cos^2(\beta(t))\phi'(t)^2\right)}\,\mathrm{d}t\ .$$

Zadanie 5. Oblicz moment bezwładności sfery o promieniu R i jednorodnej gęstości powierzchniowej ρ względem osi przechodzącej przez jej środek.
Zadanie 6. Oblicz całkę

$$\int_F xyz\mathrm{d}\sigma^2(x, y, z)$$

gdzie F to brzeg kostki sześciennej $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x, y, z \le 1\}$.
Zadanie 7. Niech $f(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $x \in [0, 1]$. Obliczyć pole powierzchni powstałej w wyniku pełnego obrotu wykresu funkcji f wokół osi OX.
Zadanie 8. Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu obszaru

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 5x^2, 0 \le x \le 2\}$ wokół osi OX,

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le y \le 20, 0 \le x \le 2\}$ wokół osi OY.

Zadanie 9. Oblicz całkę powierzchniową

$$\int_\Sigma \sqrt{\frac{z}{1+2z}}\mathrm{d}\sigma^2\ ,$$

gdzie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2 + y^2 \le \sqrt{x}\}$.
Zadanie 10. Na powierzchni walca $W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}$ leży zbiór A, mierzalny względem miary powierzchniowej na W. Połóżmy $A_{<t} = A \cap \{z < t\}$ i $f(t) = \sigma^2(A_{<t})$. Wykaż, że $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_A (1 - z)\mathrm{d}\sigma^2(x, y, z)$.
Zadanie 11. Rozważmy krzywą gładką $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ zawartą w płaszczyźnie $z = h$ i stożek powstały przez połączenie punktów tej krzywej z punktem $(0, 0, 0)$. Wykaż, że powierzchnia tak otrzymanego stożka jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2}hl(\gamma)$, gdzie $l(\gamma)$ oznacza długość wyjściowej krzywej. Znajdź wszystkie krzywe dla których zachodzi równość.

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. Odp: a) 5, b) $\sqrt{3}$.

Zadanie 2. Odp: a) $(\frac{9}{5}, \frac{33}{25}, \frac{7}{10})$ b) $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2})$.

Zadanie 3. Odp: $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$.

Zadanie 4. $\sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\left(\beta'(t)^2 + \cos^2(\beta(t))\phi'(t)^2\right)}$ to długość pochodnej $(x(t), y(t), z(t))$.

Zadanie 5. Odp: $\frac{2}{5}MR^2$, gdzie $M = 4\pi R^2\rho$ to masa sfery. Trzeba policzyć całkę $\int_{S^2(\mathbf{0},R)} \rho \cdot (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma^2$. Wygodnie jest pracować we współrzędnych walcowych, bądź biegunowych.

Zadanie 6. Odp: $\frac{3}{4}$. Brzeg kostki to zbiór, w którym co najmniej jedna z nierówności $0 \le x, y, z \le 1$ staje się równością. Oczywiście brzegi, na których jedna ze współrzędnych jest zero nic nie wnoszą do całki. Całka z xyz na kwadracie $B_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1, 0 \le y, z \le 1\}$ wynosi $\frac{1}{4}$. Z symetrii pozostałe dwa nietrywialne kawałki brzegu (odpowiednio, gdy $y = 1$ i $z = 1$) wnoszą taki sam wkład do całki.

Zadanie 7. Odp: $\frac{6}{5}\pi$. Korzystamy z reguły Pappusa-Guldina: $S = 2\pi\int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$.

Zadanie 8. Odp: a) 180π; b) 72π.

Zadanie 9. Odp: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Zadanie 10. Rozważmy parametryzację walca $\psi : (\phi, z) \mapsto (\cos\phi, \sin\phi, z)$. Wowczas

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\int_0^t \int_0^{2\pi} \chi_A \mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t \overset{Fubini}{=} \int_0^1 \left(\int_z^1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-z)\chi_A \mathrm{d}\phi\mathrm{d}z \ .$$

Zadanie 11. Rozważmy parametryzację $t \mapsto (x(t), y(t), h)$ krzywej γ, gdzie $t \in [a,b]$. Łatwo się przekonać, że $(t,z) \mapsto (\frac{z}{h}x(t), \frac{z}{h}y(t), z)$, gdzie $(t,z) \in K = [a,b] \times [0,h]$ jest parametryzacją powierzchni stożka. Wzór na pole powierzchni daje

$$\begin{aligned}\sigma^2(S) = \int_K \sqrt{\frac{z^2}{h^2}\left[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\right]^2 + \frac{z^2}{h^2}\left[x'(t)^2 + y'(t)^2\right]}\mathrm{d}\lambda^2(t,z) \ge \\ \int_K \frac{z}{h}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}\lambda^2(t,z) = \frac{1}{2}hl(\gamma)\ .\end{aligned}$$

Równość zachodzi gdy $x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = 0$ co po prostych rachunkach prowadzi do równania prostej przechodzącej przez $(0,0)$.

Zadania różne

Zadanie 1. Ciąg funkcji całkowalnych $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spełnia warunek $\int_A (f_n)^2 d\lambda^n \leq C$ dla pewnej stałej $C > 0$ i wszystkich n. Wykaż, że ciąg $\frac{1}{n} f_n$ jest zbieżny do 0 p.w. na A.
Zadanie 2. Funkcje mierzalne nieujemne $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają warunek $\int_{\mathbb{R}} f_n < \frac{1}{n}$. Czy ciąg f_n jest zbieżny do 0 p.w.?
Zadanie 3. Funkcja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest ciągła, oraz $\int_{B(\mathbf{0},1)} f(\boldsymbol{x}) d\lambda^3(\boldsymbol{x}) = 0$, gdzie $B(\mathbf{0}, 1)$ to kula jednostkowa. Wykaż, że istnieje czworościan foremny K o dodatniej mierze taki, że $\int_K f(\boldsymbol{x}) d\lambda^3(\boldsymbol{x}) = 0$.
Zadanie 4. Rozważmy zbiór mierzalny skończonej miary $A \subset \mathbb{R}^2$. Wykaż, że istnieje prosta $l \subset \mathbb{R}^2$ taka że $\lambda^2(A_-) = \lambda^2(A_+)$, gdzie A_- i A_+ oznaczają części zbiorów leżące po lewej i po prawej stronie prostej l.

Odpowiedzi i wskazówki:
Zadanie 1. Zauważmy, że $\frac{1}{n} f_n(\boldsymbol{x}) \not\to 0$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $a > 0$ takie, że dla każdego n_0 istnieje $n > n_0$ takie, że $|\frac{1}{n} f_n(\boldsymbol{x})| > a$. Dla ustalonego a oszacujemy miarę zbioru $\boldsymbol{x}$ które mają taką własność. Zauważmy, że

$$\lambda^n \left(\{\boldsymbol{x} \mid |\frac{1}{n} f_n(\boldsymbol{x})| > a\} \right) \cdot n^2 a^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_n(\boldsymbol{x})^2 d\lambda^n(\boldsymbol{x}) < C \ ,$$

skąd $\lambda^n \left(\{\boldsymbol{x} \mid |\frac{1}{n} f_n(\boldsymbol{x})| > a\} \right) < \frac{C}{n^2 a^2}$. Teraz miarę zbioru $\boldsymbol{x}$ takich, że nierówność $|\frac{1}{n} f_n(\boldsymbol{x})| > a$ zachodzi dla pewnego $n > n_0$ szacujemy przez sumę miar takich zbiorów po $n \geq n_0$, a więc przez $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{C}{n^2 a^2}$, co jest ogonem szeregu zbieżnego, a więc dąży do 0 przy ustalonym a, dla $n_0 \to \infty$.
Zadanie 2. Nie. Próbując postępować jak w poprzednim zadaniu dostaniemy oszacowanie na zbiór punktów $x \in \mathbb{R}$ w których $f_n(x)$ nie zbiega do 0 przez ogon szeregu harmonicznego $\sum_n \frac{1}{n}$, który jest rozbieżny. Odpowiedni kontrprzykład może wyglądać następująco: na odcinku $[0, 1]$ kolejno odkładamy jeden po drugim odcinki długości $\frac{1}{n}$, ewentualnie przesuwając część wystającą ponad 1 z powrotem do 0, a więc $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [0, \frac{1}{2}]$, $A_3 = [\frac{1}{2}, \frac{5}{6}]$, $A_4 = [\frac{5}{6}, 1] \cup [0, \frac{1}{12}]$, $A_5 = [\frac{1}{12}, \frac{17}{60}]$, itd i bierzemy $f_n(x) = \chi_{A_n}(x)$. Wówczas oczywiście $\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n}$ oraz dla każdego $x \in [0, 1]$ $f_n(x) = 1$ dla nieskończenie wielu n, a zatem $f_n(x) \not\to 0$ na $[0, 1]$.
Zadanie 3. Rozważmy pokrycie kuli jednostkowej przeliczalną rodziną czworościanów $B(\mathbf{0}, 1) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$, tak że sąsiednie czworościany stykają się tylko brzegiem, a więc $\lambda^3(K_i \cap K_j) = 0$ gdy $i \neq j$. Z addytywności całki $0 = \int_B f = \sum_i \int_{K_i} f$. Możliwe są dwie sytuacje: 1. dla każdego $i \in \mathbb{N}$ zachodz $\int_{K_i} f = 0$ i po zadaniu, 2. istnieją indeksy $i_+, i_- \in \mathbb{N}$ takie, że $\int_{K_{i_+}} f > 0 > \int_{K_{i_-}} f$. Rozważmy rodzinę czworościanów $K_t = tK_{i_-} + (1 - t)K_{i_+}$, gdzie $t \in [0, 1]$. Z ciągłości f i ciągłości całki jako funkcji zbioru mamy, że $F(t) := \int_{K_t} f$ jest funkcją ciągłą taką, że $F(0) < 0 < F(1)$. Z własności Darboux F przyjmuje wartość 0 w pewnym punkcie odcinka $[0, 1]$.
Zadanie 4. Ustalmy punkt $p \in \mathbb{R}^2$ i poprowadźmy przez niego dowolną prostą l_0. Poprzez l_ϕ oznaczmy prostą powstałą z obrotu l_0 wokół punktu p o kąt ϕ i odpowiednio niech $A_-(\phi)$ oraz $A_+(\phi)$ oznaczają części zbioru A wyznaczone przez prostą l_ϕ. Funkcja $f(\phi) = \lambda^2(A_+(\phi)) - \lambda^2(A_-(\phi))$ jest ciągła (to wymaga pewnego uzasadnienia, na przykład korzystającego z jednego z twierdzeń Lebesgue'a o zbieżności) i oczywiście $f(0) = -f(\pi)$, więc z własności Darboux $f(\phi) = 0$ dla pewnego kąta.