Zadania gwiazdką (aktualizacja: 9 maja 2019)

Zadanie 1. $(**)$ Funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ spełnia tożsamości

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)-y\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+x\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0\ .$$

Wykaż, że f jest stała.
Podaj przykład niestałej funkcji dwukrotnie różniczkowalnej, która spełnia tożsamości (w pierwszej tożsamości zmieniamy znak)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+x\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0\ .$$

Zadanie 2. $(*)$ Oblicz całkę (nie korzystając z wiedzy z analizy zespolonej)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\ .$$

Zadanie 3. $(*)$ Rozważmy prostokąt P o bokach $a\times b$ i rodzinę kul $B_i:=B(\boldsymbol{a}_i,r_i)\subset P$, gdzie $i=1,2,3,\cdots$. Załóżmy, że kule B_i pokrywają P z dokładnością do zbioru miary zero (tzn. $\lambda^2(P\setminus\cup_{i\in\mathbb{N}}B_i)=0$). Wykaż, że $\sum_{i\in\mathbb{N}}r_i=+\infty$.
Zadanie 4. $(*/2)$ Funkcje $P,Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ są ciągłe w otoczeniu punktu $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^2$ i różniczkowalne w tym punkcie. Wykaż, że

$$\lim_{r\to0_+}\frac{1}{r^2}\int_{S(\boldsymbol{a},r)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\pi\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\boldsymbol{a})-\frac{\partial P}{\partial y}(\boldsymbol{a})\right)\ .$$

$S(\boldsymbol{a},r)$ oznacza okrąg o promieniu r i środku w $\boldsymbol{a}$ zorientowany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.
Uwaga: nie zakładamy, że P i Q są różniczkowalne w otoczeniu $\boldsymbol{a}$, a więc nie można powoływać się na twierdzenie Greena.

Michał Jóźwikowski, 9 maja 2019.