Zadanie 4 – rozwiązanie wzorcowe i kryteria oceniania

Zad. 4. Oblicz całkę z formy $\omega = xz^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + yz^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ po powierzchni $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \mathrm{tg}(z), z \in [0, \pi/3]\}$ zorientowanej tak, że wektor $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, -1]$ jest wektorem normalnym zewnętrznym do S w punkcie $(1, 0, \frac{\pi}{4})$.

Kryteria oceniania
Rozwiązanie z użyciem tw. Stokesa:

- do **4 pt.** Użycie tw. Stokesa z policzeniem $\mathrm{d}\omega$ (**1 pt.**) i prawidłową identyfikacją obydwu kawałków brzegu $\partial M = S \cup D$ (**2 pt.**).
- do **2 pt.** Obliczenie $\int_M \mathrm{d}\omega$.
- do **2 pt.** Obliczenie $\int_D \omega$.
- do **2 pt.** Prawidłowe zorientowanie wszystkich składników.

Rozwiązanie rachunkowe:

- do **2 pt.** Prawidłowe sparametryzowanie powierzchni S.
- do **3 pt.** Obliczenie cofnięcia formy ω względem parametryzacji.
- do **3 pt.** Obliczenie całki z cofniętej formy.
- do **2 pt.** Prawidłowe wyznaczenie orientacji.

Błędy rachunkowe (dość liczne) traktowałem raczej łagodnie.

Rozwiązanie 1 *– z tw. Stokesa.* Rozważany zbiór wygląda jak rożek do lodów i jest fragmentem brzegu zbioru

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \mathrm{tg}\,(z)\,, z \in [0, \pi/3]\}\ .$$

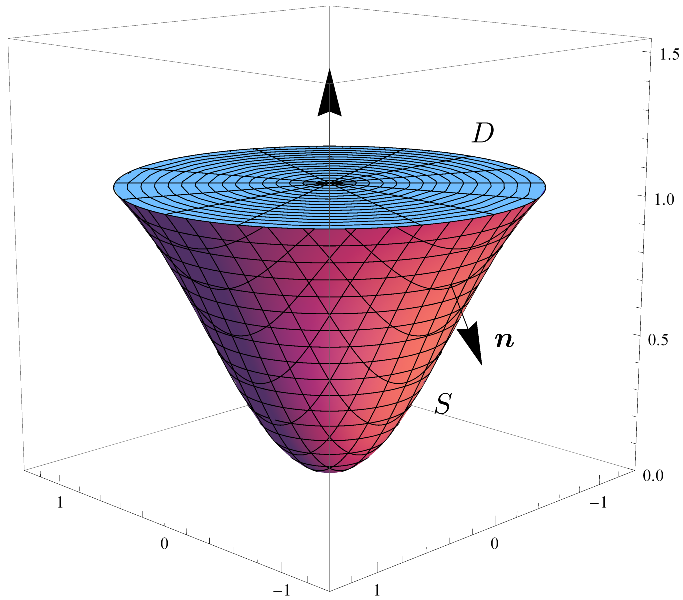
Ściślej mówiąc ∂M jest sumą zbioru S i „denka"

$$D = \{(x, y, z) \mid z = \frac{\pi}{3}, x^2 + y^2 = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\}\ .$$

Z twierdzenia Stokes'a i addytywności całki

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_S \omega + \int_D \omega\ , \quad \text{a zatem} \quad \int_S \omega = \int_M \mathrm{d}\omega - \int_D \omega$$

przy czym rozważane zbiory należy odpowiednio zorientować. Przyjmując standardową orientację $M \subset \mathbb{R}^3$ (w której $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ jest formą objętości), łatwo otrzymujemy orientacje S i D tak jak na rysunku, a więc standardowa orientacja M indukuje orientację S taką jak w zadaniu.



Zauważmy, że $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$, wobec czego $\int_M d\omega = \lambda^3(M)$. Tę wielkość łatwo obliczyć używając podstawienia biegunowego (albo jeszcze prościej z tw. Fubini'ego zauważając, że zbiory $M \cap \{z = const\}$ to koła o promieniu $\sqrt{\operatorname{tg}(z)}$), a więc

$$\lambda^3(M) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \pi \sqrt{\operatorname{tg}(z)}^2 dz = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin z}{\cos z} dz = -\pi \ln(\cos z)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi \ln 2 \ .$$

Z kolei na denku D współrzędna z jest stale równa $\frac{\pi}{3}$, a zatem $dz = 0$ i w konsekwencji $\omega|_D = \frac{\pi}{3} dx \wedge dy$. Łatwo zauważyć, że $dx \wedge dy$ jest formą objętości na D przy rozważanej orientacji, stąd

$$\int_D \omega = \int_D \frac{\pi}{3} dx \wedge dy = \frac{\pi}{3} \lambda^2(D) = \frac{\pi}{3} \pi \sqrt{3} = \frac{\pi^2}{\sqrt{3}} \ .$$

Ostatecznie $\int_S \omega = \pi \ln 2 - \frac{\pi^2}{\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie 2 – *bezpośredni rachunek.* W podstawieniu

$$\Phi : \ x = \sqrt{\tan(z)} \cos\alpha, \ y = \sqrt{\tan(z)} \sin(\alpha), \ z = z \ ,$$

rozważana forma przyjmuje postać (dość złożony rachunek)

$$\Phi^* \omega = [(z^2 \operatorname{tg}(z)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - z \frac{1}{2\cos^2(z)}] d\alpha \wedge dz \ .$$

Przyjmijmy, że dziedzina $(\alpha, z) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{3}]$ jest zorientowana tak, że α jest pierwszą zmienną, a z drugą. Prosty rachunek pokazuje wówczas, że indukowana orientacja w obrazie w punkcie $\Phi(\alpha = 0, z = \frac{\pi}{4}) = (1, 0, \frac{\pi}{4})$ jest zadana przez bazę uporządkowaną

$$v_1 = D_{(0,\frac{\pi}{4})}\Phi[1,0]^T = [0,1,0], \quad v_2 = D_{(0,\frac{\pi}{4})}\Phi[0,1]^T = [1,0,1] \ .$$

Wobec $v_1 \times v_2 = [1, 0, -1]$, co jest równoległe ze zwrotem zgodnym do $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, -1]$, wnosimy że rozważana parametryzacja jest zgodną z orientacją daną w zadaniu . Wobec tego pozostaje scałkować

$$\int_S \omega = \int_{[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{3}]} [(z^2 \operatorname{tg}(z)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - z\frac{1}{2\cos^2(z)}] \mathrm{d}\lambda^2(\alpha, z) \overset{\text{Fubini}}{=}$$
$$\int_0^{2\pi} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\mathrm{d}\alpha \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} z^2 \operatorname{tg}(z)\mathrm{d}z - \int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}\alpha \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{z}{2\cos^2(z)}\mathrm{d}z \ .$$

Całka z $(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))$ po pełnym kącie znika, stąd

$$\int_S \omega = -\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} z \operatorname{tg}'(z)\mathrm{d}z \overset{\text{części}}{=} -\pi \cdot [z \operatorname{tg}(z) - \ln(\cos(z))]\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi \ln 2 - \frac{\pi^2}{\sqrt{3}} \ .$$

Oczywiście można stosować też inne podstawienia, np.

$\Psi: \ x = x, \ y = y, \ z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ albo $\Upsilon: \ x = r\cos(\alpha), \ y = r\sin(\alpha), \ z = \operatorname{arctg}(r^2)$.

Prowadzi to do rachunków podobnej trudności co wyżej.

Michał Jóźwikowski, 19 czerwca 2019.