AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 13 czerwca 2019

`Twierdzenie Stokes'a i jego klasyczne wersje`

Omówienie zadań domowych

Zadanie 1. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial D_n} \omega_n \ ,$$

gdzie $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leq y \leq 1 + \frac{1}{n}\}$ ma standardową orientacją dziedziczoną z $\mathbb{R}^2$, zaś

$$\omega_n = \frac{n\sin(\frac{x}{n})\mathrm{d}x + (y+1)\mathrm{d}y}{(1+\frac{1}{n})x^2 + y^2} \ .$$

'

Powodzenia na egzaminie!!!

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 6 czerwca 2019

`Twierdzenie Stokes'a i jego klasyczne wersje`

Klasyczne wersje twierdzenia Stokes'a w $\mathbb{R}^3$.

Niech $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie polem wektorowym w $\mathbb{R}^3$. Możemy z nim stowarzyszyć następujące formy

$$\omega_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle \qquad \text{oraz} \qquad \eta_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle \ .$$

Zatem $\omega_{\boldsymbol{a}} = a_1 \mathrm{d}x_1 + a_2 \mathrm{d}x_2 + a_3 \mathrm{d}x_3$ oraz $\eta_{\boldsymbol{a}} = a_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + a_2 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + a_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$. Widać stąd, że w $\mathbb{R}^3$ każda 1-forma jest postaci $\omega_{\boldsymbol{a}}$, zaś każda 2-forma jest postaci $\eta_{\boldsymbol{a}}$ dla pewnego pola $\boldsymbol{a}$.

Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią 2-wymiarową z brzegiem ∂S. Całkę

$$\int_{\partial S} \omega_{\boldsymbol{a}} = \int_{\partial S} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{t} \rangle \mathrm{d}\sigma^1 \ ,$$

gdzie $\boldsymbol{t}$ oznacza wektor jednostkowy styczny do konturu ∂S (zgodnie z orientacją), a $\mathrm{d}\sigma^1$ miarę powierzchniową na ∂S, nazywamy krążeniem *pola $\boldsymbol{a}$ wokół konturu ∂S.*

Całkę

$$\int_S \eta_{\boldsymbol{a}} = \int_S \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}\sigma^2 \ ,$$

gdzie $\boldsymbol{n}$ oznacza wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni S (zgodnie z orientacją), zaś $\mathrm{d}\sigma^2$ oznacza miarę powierzchniową na S, nazywamy strumieniem *(*przepływem*) pola $\boldsymbol{a}$ przez powierzchnię S.*

Z twierdzenia Stokes'a mamy

$$\int_{\partial S} \omega_{\boldsymbol{a}} = \int_S \mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{a}} \ .$$

Różniczkując formę $\omega_{\boldsymbol{a}}$ łatwo dostaniemy, że $\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{a}} = \eta_{\operatorname{rot} \boldsymbol{a}}$, gdzie $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = [(a_3)'_y - (a_2)'_z, (a_1)'_z - (a_3)'_x, (a_2)'_x - (a_1)'_y]$. Powyższe pole wektorowe nazywamy rotacją *(*wirowością*) pola $\boldsymbol{a}$.*

Rozważmy teraz rozmaitość trójwymiarową $M \subset \mathbb{R}^3$ z brzegiem ∂M. Ponownie korzystając tw. Stokes'a mamy

$$\int_{\partial M} \eta_{\boldsymbol{a}} = \int_M \mathrm{d}\eta_{\boldsymbol{a}} \ .$$

Formę po prawej stronie możemy zapisać jako $\mathrm{d}\eta_{\boldsymbol{a}} = \operatorname{div}(\boldsymbol{a}) \cdot \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, gdzie $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}) = \nabla \circ \boldsymbol{a} = (a_1)'_x + (a_2)'_y + (a_3)'_z$. Powyższą funkcję nazywamy dywergencją *(*źródłowością*) pola $\boldsymbol{a}$.*

Zadanie 1. Oblicz dywergencję i rotację pól wektorowych

a) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = [x, y, z]$,

b) $\boldsymbol{G}(x, y, z) = [y, -x, 0]$,

c) $\boldsymbol{H}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}[x, y, z]$.

Zadanie 2. Dla pola wektorowego $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (1, xy, z)$ oraz obszaru $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 3z^2, z \in (0, 3)\}$, policz niezależnie od siebie całki $\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F} \mathrm{d}\lambda^3$, $\int_{\partial\Omega} \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}\sigma^2$ oraz $\int_{\partial\Omega} \eta_{\boldsymbol{F}}$, gdzie $\boldsymbol{n}$ to wektor normalny zewnętrzny do $\partial\Omega$.

Dom 1. Dokończyć ostatnie zadanie, w szczególności wyznaczyć pole wektorów normalnych $\boldsymbol{n}$ do $\partial\Omega$ i miarę powierzchniową na $\partial\Omega$. Zwróć uwagę, że $\partial\Omega$ składa się z dwóch kawałków.

Dom 2. Rozważmy funkcję gładką $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i pole wektorowe $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Wykaż, że $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ oraz $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = 0$. Oblicz $\operatorname{div}(\nabla f)$.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 30 maja 2019

`Twierdzenie Stokes'a`

Omówienie zadań domowych.

Kartkówka

Zadanie 1. Rozważmy formę $\omega = x^2 z e^{yz} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$. Znajdź (jakąś) funkcję $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ aby forma $\alpha = \omega + f(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$ była zamknięta, tzn. $\mathrm{d}\alpha = 0$.

Zadanie 2. Wykaż, że przyporządkowanie

$$\omega(x,y,z) : (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \longmapsto \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 + \sin x & y\cos x & 0 \end{pmatrix}$$

określa 2-formę $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Oblicz całkę z tej formy po zbiorze

$$M = \{(x,y,z) \mid y^2 + z^2 = (1 - \sin x)^2, 0 < x < \frac{\pi}{6}\} ,$$

zorientowanym tak, że zewnętrznym wektorem normalnym do M w punkcie $(0,0,1)$ jest wektor $[1,0,1]$.

Dom 1. Zrobić ostatnie zadanie bez korzystania z tw. Stokesa.

Dom 2 (Pisemnie na 6 czerwca). Oblicz całkę

$$\int_{S^2(\mathbf{0},R)} r^\alpha (x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) ,$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, zaś $S^2(\mathbf{0},R)$ oznacza sferę o środku $\mathbf{0}$ i promieniu R z naturalną orientacją pochodzącą od kuli $B(\mathbf{0},R)$.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 27 maja 2019

`Całkowanie wielo-form, twierdzenie Stokes'a`

Zastawienie podstawowych własności różniczki zewnętrznej:

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge (\mathrm{d}\beta), \qquad \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0, \qquad \Phi^* \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\Phi^* \omega) \ ,$$

gdzie α, β, ω to formy różniczkowe, a Φ jest odwzorowaniem gładkim.

Kilka uwag o orientacji:

1. *Rozmaitość, która jest brzegiem obszaru (lub też podzbiorem takiego brzegu) jest orientowalna.*
2. *Na rozmaitość orientowalnej i spójnej orientację wystarczy zadać w jednym punkcie.*
3. *Na powierzchni 2-wymiarowej $M \subset \mathbb{R}^3$ podanie orientacji jest równoważne wskazaniu pola wektorów normalnych do M: bazie uporządkowanej $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} \subset \mathrm{T}M$ przypisujemy wektor $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 \perp \mathrm{T}M$.*

Omówienie zadań domowych.

Zadanie 1. Oblicz całkę

$$\int_S \frac{\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{z}$$

po zbiorze $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2, 1 < z < 2\}$. Gdzie orientacja jest zadana przez pole wektorów normalnych skierowanych do osi OZ.

Zadanie 2. Oblicz pole obszaru w $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ograniczonego krzywą $(x + y)^4 = x^2 y$.
Wskazówka: rozważ punkty przecięcia badanej krzywej z prostymi $y = tx$.

Dom 1. Doliczyć ostatnie zadanie.

Dom 2. Oblicz całkę

$$\int_S z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z,$$

gdzie $S = \{(x, y, x^2 + y^2) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ z dowolnie wybraną orientacją.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 23 maja 2019

`Całkowanie wielo-form, twierdzenie Stokes'a`

Omówienie zadania domowego

Zadanie 1. Oblicz cofnięcie formy $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ za pomocą odwzorowania $\Phi(u,v) = (uv, u^2, 3u+v)$. Uzasadnij wynik bez wykonywania obliczeń.

Definicja. Powiemy, że dwie bazy $\{e_1, \dots, e_k\}$ oraz $\{f_1, \dots, f_k\}$ zadają tę samą *orientację* przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^k$, gdy wyznacznik macierzy przejścia między nimi jest dodatni. Każda przestrzeń wektorowa ma zatem dwie kanoniczne orientacje.
Orientacją rozmaitości różniczkowej, nazywamy zgodny wybór orientacji jej wszystkich przestrzeni stycznych. Intuicyjnie rozumiemy, że wybrane orientacje zmieniają się w sposób ciągły od punktu do punktu. Formalna definicja wymaga wprowadzenia pojęcia atlasu zorientowanego. Nie wszystkie rozmaitości da się zorientować (np. wstęga Moebiusa). Te które dopuszczają orientację nazywamy *orientowalnymi.*

Definicja (Całka z k-formy różniczkowej)**.** Dla zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^k$ z kanoniczną orientacją $\{e_1, \cdots, e_k\}$ definiujemy

$$\int_U f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k = \int_U f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\lambda^k(\boldsymbol{x}) \ ,$$

a więc całka z k-formy $f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k$ pokrywa się ze standardową całką Lebesgue'a, z dokładnością do zmiany znaku przy innym wyborze orientacji. Formę $\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k$ nazywamy *formą objętości.*
Całkę z formy różniczkowej na podrozmaitości definiujemy przechodząc od krzywych do płaskich współrzędnych.
Niech $S \subset \mathbb{R}^n$ będzie k-wymiarową podrozmaitością zorientowaną. *Całkę z k–formy $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ na S* definiujemy jako

$$\int_S \alpha = \int_U \Phi^* \alpha \ ,$$

gdzie $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ jest dowolną parametryzacją $S = \Phi(U)$ zgodną z orientacją S. To znaczy, jeśli $\{e_1, \dots, e_k\}$ jest standardową orientacją $\mathbb{R}^k$, to baza $\{D\Phi(e_1), \dots, D\Phi(e_k)\}$ jest zgodna z orientacją S.

Zadanie 2. Oblicz całkę z formy $\alpha = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ po połówce torusa sparametryzowanej następująco $(x = (4+\cos\alpha)\cos\theta, y = (4+\cos\alpha)\sin\theta, z = \sin\alpha)$, gdzie $\alpha \in [0, 2\pi]$ i $\theta \in [0,\pi]$. Przyjmujemy, że orientacja torusa jest dziedziczona z orientacji $\mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\theta$ w $\mathbb{R}^2$ za pomocą rozważanej parametryzacji.

Różniczkę zewnętrzną $\mathrm{d} : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ *można zdefiniować poprzez następujące własności:*

- *dla funkcji* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$, *a więc* $\mathrm{d}f$ *to znana już różniczka zewnętrzna funkcji,*
- $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$,
- *dla dowolnych form* α *i* β, *zachodzi* $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\mathrm{d}\beta)$.

W praktyce wystarczy wzór $\mathrm{d}\left(\sum_{(i_0,\dots,i_k)} f_{i_0} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\right) = \left(\sum_{(i_0,\dots,i_k)} \mathrm{d}f_{i_0} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\right.$.

Zadanie 3. Oblicz $\mathrm{d}(x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$.

Zadanie 4. Wykaż, że dla formy $\omega = g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ warunek $\mathrm{d}\omega = 0$ jest równoważny warunkowi koniecznemu istnienia funkcji pierwotnej dla ω, a więc $g'_y = h'_x$.

Twierdzenie (Stokes'a)**.** *Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie $(k+1)$-wymiarową zorientowaną rozmaitością z brzegiem ∂M. Rozważmy k-formę $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, wówczas*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega \ ,$$

gdzie ∂M ma naturalną orientację dziedziczoną z M:

$$\boldsymbol{or}_M = \{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{or}_{\partial M}\} \ .$$

$\boldsymbol{n}$ oznacza tutaj wektor normalny do brzegu ∂M skierowany na zewnątrz M.

Twierdzenie Stokes'a stanowi daleko idące uogólnienie Zasadniczego Twierdzenia Analizy.

Zadanie 5. Korzystając z twierdzenia Stokes'a oblicz pole wnętrza elipsy

$$E = \{(a\cos\phi, b\sin\phi) \mid \phi \in [0, 2\pi]\} \ .$$

Zadanie 6. Oblicz całkę z zadania o torusie korzystając z twierdzenia Stokes'a. Zauważ, że rozważany zbiór nie był pełnym brzegiem półtorusa!

Dom 1. Oblicz $\mathrm{d}\omega$ dla

1. $\omega = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$,
2. $\omega = xy^2z^3\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - yz^2x^3\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$,
3. $\omega = \sum_{1\le i\le j\le 4} x_i x_j \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$.

Dom 2. Sprawdź twierdzenie Stokes'a dla $M = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ i $\omega = y\exp(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 16 maja 2019

`Wprowadzenie do wieloform`

Zadanie 1. Oblicz $\alpha \wedge \alpha$, gdzie $\alpha = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4} f_{ij}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$

Kartkówka

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy forma $\omega = e^y \mathrm{d}x + (xe^y + y)\mathrm{d}y$ jest różniczką jakiejś funkcji gładkiej $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Jeśli tak, to wskaż taką funkcję.

Zadanie 3. Zbadać, czy forma $\omega = |x+y|\mathrm{d}x + |x+y|\mathrm{d}y$ ma w $\mathbb{R}^2$ własność niezależności całki od drogi?

Zadanie 4. Niech $\boldsymbol{F} = (f, g, h) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie polem wektorowym (gładkim odwzorowaniem z $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$). Wykaż, że odwzorowanie:

$$\alpha(\boldsymbol{x}) : (\mathbb{R}^3)^2 \ni (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \longmapsto \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\rangle \in \mathbb{R}$$

jest 2-formą różniczkową w $\mathbb{R}^3$. Wyraź tę formę w bazie $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$.

Dla wieloform możemy zdefiniować operację cofania analogicznie jak dla 1-form.

Definicja. *Cofnięciem* (*przeciągnięciem*, albo *pull-backiem*) formy $\omega \in \Omega^k(U)$ za pomocą odwzorowania gładkiego $\Phi : V \to U$ nazywamy formę $\Phi^*\omega \in \Omega^k(V)$ określoną wzorem

$$\Phi^*\omega(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k] = \omega(\Phi(\boldsymbol{x}))[D_{\boldsymbol{x}}\Phi[\boldsymbol{v}_1], \cdots, D_{\boldsymbol{x}}\Phi[\boldsymbol{v}_k]] \ .$$

Praktyczna metoda liczenia przeciągnięć pozostaje bez zmian dla wieloform: do wzorów na ω w U wstawiamy wyrażenia wynikające z odwzorowania Φ. Wynika to z faktu, że operacja cofania jest przemienna z operacjami różniczki zewnętrznej d i produktem $\wedge$:

Lemat. *Dla form $\alpha, \beta \in \Omega^\bullet(U)$ i funkcji $f \in C^\infty(U)$ zachodzą wzory $\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = (\Phi^*\alpha) \wedge (\Phi^*\beta)$, $\Phi^* f(\boldsymbol{x}) = f(\Phi(\boldsymbol{x}))$, oraz $\Phi^*(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}(\Phi^*\alpha)$.*

Zadanie 5. Oblicz formę $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ we współrzędnych biegunowych $(x = r\cos\phi, y = r\sin\phi)$.

Zadanie 6. Znajdź $\Phi^*\omega$ dla $\Phi(u, v) = (uv, u^2, 3u + v)$, $\omega = y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$.

Dom 1 (pisemnie na 23 maja). Zbadać, czy forma $\omega = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+xy+y^2}$ ma w obszarze $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ własność niezależności całki od drogi.

Dom 2. Znajdź 2-formę $\alpha = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ we współrzędnych sferycznych $(x = r\cos\phi\cos\beta, y = r\sin\phi\cos\beta, z = r\sin\beta)$.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 13 maja 2019

`Całka z 1-formy, wprowadzenie do wieloform.`

Zadanie 1. Oblicz całkę $\int_C (2x+y)\mathrm{d}x + (x-2y)\mathrm{d}y$ wzdłuż krzywej $C = \{(x,y) \mid x^4 + y^3 = 1, x \le 0 \le y\}$ zorientowanej tak, że jej początkiem jest punkt $(0,1)$, a końcem punkt $(-1,0)$.

Omówienie zadań domowych

Zadanie 2. Niech $C = \{(x,y) \mid 4x^2 + y = 5, y \ge 1\}$ będzie krzywą zorientowaną w kierunku wzrastania zmiennej x oblicz całkę

$$\int_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \ .$$

Wieloformy różniczkowe, operacja „wedge" (dziubek) $\wedge$.

Zadanie 3. Oblicz

a) $(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x) \wedge (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$,

b) $(x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \wedge (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$.

Dom 1. Oblicz całkę

$$\int_\Gamma (y+z)\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$$

po krzywej $\Gamma = \{(t, t(1-\cos t), t\sin t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$.

Dom 2. Niech $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ i $\beta \in \Omega^l(\mathbb{R}^n)$ będą, odpowiednio, k i l-formami. Wykaż, że

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \alpha \ .$$

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 9 maja 2019

`Formy różniczkowe: kryterium dokładności 1-formy, zamiana zmiennych (pull-back).`

Zadanie 1. Wyznacz funkcję pierwotną z 1-formy (o ile istnieje)

$$\omega = (1 + \sin y)\mathrm{d}x - (2y - x\cos y)\mathrm{d}y \ .$$

Omówienie zadania domowego.

Zadanie 2. Wykaż, że forma $\omega = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ nie jest *dokładna* (to znaczy, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taka, że $\omega = \mathrm{d}f$), ale spełnione są warunki konieczne dla dokładności ω, tzn. pochodne cząstkowe $\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x$ i $\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)'_y$ są równe (mówimy wówczas, że ω jest *zamknięta*).

Twierdzenie. *Rozważmy 1-formę $\omega = g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ określoną na obszarze $U \subset \mathbb{R}^2$. Jeśli spełnione są dwa warunki:*

- *obszar U jest jednospójny (tzn. wszystkie pętle w U są ściągalne, inaczej mówiąc "w U nie ma dziur"),*
- *zachodzi równość pochodnych cząstkowych $g'_y = h'_x$,*

wówczas ω jest dokładna, tzn. istnieje funkcja gładka $f : U \to \mathbb{R}$ taka, że $\omega = \mathrm{d}f$.

Definicja. *Cofnięciem* (*przeciągnięciem*, albo *pull-backiem*) formy $\omega \in \Omega^1(U)$ za pomocą odwzorowania gładkiego $\Phi : V \to U$ nazywamy formę $\Phi^*\omega \in \Omega^1(V)$ określoną wzorem

$$\Phi^*\omega(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v}] = \omega(\Phi(\boldsymbol{x}))[D_{\boldsymbol{x}}\Phi[\boldsymbol{v}]] \ .$$

Innymi słowy, aby policzyć wartość formy $\Phi^*\omega$ na wektorze $\boldsymbol{v}$ w punkcie $\boldsymbol{x}$ przepychamy ten wektor do U za pomocą pochodnej Φ i liczymy wartość formy ω na obrazie.
Uwaga: Φ nie musi być dyfeomorfizem, a nawet U i V nie muszą być tego samego wymiaru!

Lemat. *Dla funkcji $f : U \to \mathbb{R}$ zachodzą wzory $\Phi^* f(\boldsymbol{x}) = f(\Phi(\boldsymbol{x}))$ (pull-back funkcji to po prostu złożenie) oraz $\Phi^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\Phi^* f)$ (przeciąganie jest przemienne z operacją różniczki zewnętrznej* d*). Z ich pomocą można policzyć pull-back każdej formy.*

Zatem w praktyce, na przykład, dla $\Phi : (r,\phi) \mapsto (x = r\cos\phi, y = r\sin\phi)$ i $\omega = y^2\mathrm{d}x$, aby obliczyć $\Phi^*\omega$ wstawiamy po prostu wyrażenia $x = r\cos\phi$ i $y = r\sin\phi$ do wzoru na ω:

$$\Phi^*(y^2\mathrm{d}x) = (r\sin\phi)^2\mathrm{d}(r\cos\phi) = r^2\sin^2\phi(\cos\phi\mathrm{d}r - r\sin\phi\mathrm{d}\phi) \ .$$

Zadanie 3. Znajdź postać formy z poprzedniego zadania we współrzędnych biegunowych (oblicz pull-back $\Phi^*\omega$ dla $\omega = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ i $\Phi(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$).
Pull-back formy różniczkowej ma podobne znaczenie co zamiana zmiennych w całce

Lemat. *Rozważmy odwzorowanie gładkie $\Phi : V \to U$, krzywą zorientowaną $\Gamma \subset V$ i formę $\omega \in \Omega^1(U)$ wówczas*

$$\int_\Gamma \Phi^*\omega = \int_{\Phi(\Gamma)} \omega \ ,$$

gdzie orientacja krzywej $\Phi(\Gamma)$ jest indukowana z Γ.

Zadanie 4. Oblicz całkę z formy $\omega = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ po łuku elipsy $E = \{(2\cos\phi, 3\sin\phi) \mid \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$.

Dom 1. Wyznacz funkcję pierwotną z 1-formy (o ile istnieje)

$$\omega = (1 + yze^{xy})\mathrm{d}x + (1 + xze^{xy})\mathrm{d}y + e^{xy}\mathrm{d}z \ .$$

Dom 2. Znajdź postać formy $\omega = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ we współrzędnych biegunowych $\Phi(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 29 kwietnia 2019

`Wprowadzenie do form różniczkowych.`

Jeśli $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest funkcją gładką, to przez jej różniczkę zewnętrzną *w punkcie $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ rozumiemy funkcjonał liniowy $\mathrm{d}f(\boldsymbol{p}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wyznaczony przez*

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{p})[\boldsymbol{v}] := D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{p}) \ .$$

W szczególności dla funkcji współrzędnościowej $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i wektora $\boldsymbol{v} = (v^1, \ldots, v^n)$ mamy $\mathrm{d}x^i(\boldsymbol{v}) = v^i$, a więc $\mathrm{d}x^i$ to funkcjonał liniowy, który zwraca i-tą składową wektora. Podobnie $\mathrm{d}f(\boldsymbol{p})[\boldsymbol{v}] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{p})v^i$, a więc $\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$ – różniczka f to kombinacja liniowa funkcjonałów $\mathrm{d}x^i$ ze współczynnikami będącymi pochodnymi cząstkowymi f.

Nieformalnie mówiąc 1-formy różniczkowe to skończone napisy postaci $\omega = \sum_i h_i \mathrm{d}g^i$, gdzie $h_i, g^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Przestrzeń 1-form $\Omega^1(\mathbb{R}^n)$ zawiera zatem wszystkie różniczki zupełne funkcji gładkich na $\mathbb{R}^n$ i ich kombinacje liniowe ze współczynnikami będącymi funkcjami gładkimi. Ponieważ każdą różniczkę $\mathrm{d}f$ można zapisać jako kombinację form $\mathrm{d}x^i$, wystarczy rozważać 1-formy postaci $\omega \sum_i f_i \mathrm{d}x^i$.

Definicja. Rozważmy 1-wymiarową podrozmaitość $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ zorientowaną i 1-formę $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$. *Całką z formy ω po Γ* nazywamy liczbę

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))[\dot\gamma(t)]\mathrm{d}t \ ,$$

gdzie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ jest dowolną parametryzacją podrozmaitości Γ zgodną z orientacją.

Uwaga. Wartość $\int_\Gamma \omega$ nie zależy od wyboru parametryzacji γ. Zmiana orientacji zmienia znak całki na przeciwny $\int_{\Gamma,\circlearrowleft} \omega = -\int_{\Gamma,\circlearrowright} \omega$.

Jeśli $\omega = \sum_i f_i \mathrm{d}x^i$, gdzie $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, wówczas

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \sum_i f_i(\gamma(t))\dot\gamma^i(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \mathrm{d}t \ ,$$

gdzie $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t))$ zaś $F(\boldsymbol{x}) := (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(t))$. Innymi słowy, możemy interpretować $\int_\Gamma \omega$ jako pracę siły F wykonywaną wzdłuż krzywej Γ.

Zadanie 1. Oblicz całkę z formy $\omega = (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$ wzdłuż elipsy $E = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ z orientacją $\circlearrowleft$.

Twierdzenie (Zasadnicze tw. analizy). *Całka z różniczki zupełnej $\mathrm{d}f$ dla dowolnej funkcji gładkiej $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wynosi*

$$\int_\Gamma \mathrm{d}f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \ .$$

A więc całka z 1-formy dokładnej nie zależy od drogi po której ją całkujemy. W szczególności całka z $\mathrm{d}f$ po krzywej zamkniętej wynosi 0.

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli forma $\omega = g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ jest różniczką zupełną, wówczas $g'_y = h'_x$. Sprawdź, że ten warunek zachodzi dla formy z poprzedniego zadania. Znajdź funkcję f taką, że $\mathrm{d}f = (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$.

Zadanie 3. Oblicz całkę z formy $\omega = x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$ po konturze C gdzie

a) C jest brzegiem prostokąta $[-a,a] \times [-b,b] \subset \mathbb{R}^2$ zorientowanym $\circlearrowleft$,

b) C jest okręgiem $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ zorientowanym $\circlearrowleft$.

Co zauważyłeś?

Dom 1. Oblicz całkę z formy $\omega = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ po okręgu $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ zorientowanym $\circlearrowleft$.

Michał Jóźwikowski, 29 kwietnia 2019.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 25 kwietnia 2019

`Miara i całka powierzchniowa, rozmaitości zanurzone.`

Omówienie zadań domowych

Rozmaitości zanurzone *Rozmaitość n-wymiarową (klasy C^k) $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ definiowaliśmy jako zbiór, który lokalnie wygląda jak wykres jakiejś funkcji klasy C^k. Umiemy opisywać rozmaitości jako poziomice:*

Twierdzenie (Wniosek z TFU). *Niech $F : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ będzie odwzorowaniem klasy C^k. Zdefiniujmy zbiór $M = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{n+k} \mid F(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}\}$. Jeśli dla każdego $\boldsymbol{p} \in M$ różniczka $DF(p) : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ jest maksymalnego rzędu (jest „na") to M jest rozmaitością klasy C^k i ponadto $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M = \ker DF(\boldsymbol{p})$.*

Na wykładzie poznaliśmy inny opis rozmaitości z użyciem pojęcia parametryzacji.

Definicja. Odwzorowanie $\Psi : \mathbb{R}^n \supset V \to \mathbb{R}^{n+k}$ klasy C^k określone na podzbiorze otwartym $V \subset \mathbb{R}^n$, nazywamy *parametryzacją* (klasy C^k) gdy

- jest homoeomorfizmem V na obraz $\Psi(V)$,
- dla każdego $\boldsymbol{x} \in V$ różniczka $D\Psi(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ jest maksymalnego rzędu (jest różnowartościowa).

Twierdzenie. *$M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ jest n-wymiarową rozmaitością klasy C^k wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\boldsymbol{p} \in M$ istnieje otoczenie $p \in U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ takie, że $U \cap M = \Psi(V)$ dla pewnej parametryzacji $\Psi : \mathbb{R}^n \supset V \to \mathbb{R}^{n+k}$. Ponadto wówczas $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M = \operatorname{Im} D\Psi(\Psi^{-1}(\boldsymbol{p}))$.*

Generalnie aby sprawdzić, czy zbiór $\Psi(V)$ zadany przez odwzorowanie $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ jest rozmaitością, nie wystarczy tylko pokazać maksymalności rzędu różniczki $D\Psi$ (jak w przypadku TFU), ale należy też zbadać jak jest położony obraz $\Psi(V)$ w $\mathbb{R}^{n+k}$.

Zadanie 1. Rozstrzygnij, czy zbiór $M = \{e^{2t}(\cos(t), \sin(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ jest rozmaitością zanurzoną w $\mathbb{R}^2$?

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy zbiór $\Gamma = \{(1+t^2)(\cos(t), \sin(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ jest rozmaitością zanurzoną w $\mathbb{R}^2$?

Dom 1. Czy zbiór $M_2 = \{(2 + \cos t)(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ jest rozmaitością zanurzoną w $\mathbb{R}^2$?

Michał Jóźwikowski, 25 kwietnia 2019.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 15 kwietnia 2019

`Miara i całka powierzchniowa, reguły Pappusa-Guldina.`

Omówienie zadania domowego

Zadanie 1. Oblicz masę miseczki parabolicznej $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2 + y^2, z \in [0, 1]\}$ o gęstości powierzchniowej $\rho(x, y, z) = z$.

Zadanie 2. Wyprowadź wzór na pole powierzchni powstałej przez obrót wykresu funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ klasy C^1 wokół osi OX.

I reguła Pappusa-Guldina. *Dla powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f z poprzedniego zadania jej pole wynosi*

$$\sigma^2(\Sigma) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x = 2\pi l \cdot \langle R \rangle \ ,$$

gdzie $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$ to długość wykresu, zaś $\langle R \rangle = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$ to odległość środka masy wykresu od osi obrotu.

Zadanie 3. Korzystając z reguły Pappusa-Guldina oblicz pole powierzchni bocznej torusa o promieniach r i R.

Zadanie 4. Znajdź parametryzację torusa o promieniach r i R.

II reguła Pappusa-Guldina. *Objętość bryły M powstałej przez obrót figury płaskiej $A \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (x, y)$ wokół osi obrotu OY wynosi*

$$\sigma^3(M) = \sigma^2(A) \cdot 2\pi\langle R \rangle \ ,$$

gdzie $\sigma^2(A)$ oznacza miarę dwuwymiarową figury A, zaś $\langle R \rangle$ to odległość środka masy firury A od osi obrotu.

Dom 1. Udowodnij II regułę Pappusa-Guldina. Użyj jej do wyznaczenia objętości torusa o promieniach r i R.

Dom 2. Oblicz powierzchnię zbioru $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^x + e^{-x} = z - \sqrt{3}y, 0 < y < x \leq 1\}$.

Dom 3. Znaleźć położenie środka masy jednorodnej półsfery $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 11 kwietnia 2019

`Miara i całka powierzchniowa.`

Omówienie zadania domowego. Omówienie zadania z kartkówki

Zadanie 1. Rozważmy krzywą zadaną parametrycznie we współrzędnych biegunowych (r, ϕ) zależnością gładką $\gamma = \{(r(t), \phi(t)) \mid t \in [a, b]\}$. Wykaż że

$$l(\gamma) = \int_{[a,b]} \sqrt{r'(t)^2 + r^2\phi'(t)^2}\mathrm{d}t \ .$$

Miara i całka powierzchniowa. *Rozważmy podrozmaitość k-wymiarową $M \subset \mathbb{R}^n$ sparametryzowaną przekształceniem gładkim $\Psi : \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}^n$ (tzn. $M = \Psi(U)$). Wówczas k-wymiarowa miara podrozmaitości M to*

$$\sigma^k(M) = \int_U \sqrt{\det\left[D\Psi^T(\boldsymbol{x})D\Psi(\boldsymbol{x})\right]}\mathrm{d}\lambda^k(\boldsymbol{x}) \ .$$

Wielkość $\sqrt{\det\left[D\Psi^T(\boldsymbol{x})D\Psi(\boldsymbol{x})\right]} = \sqrt{\det\left[\langle D\Psi(\boldsymbol{x})[e_i], D\Psi(\boldsymbol{x})[e_j]\rangle\right]}$ to pierwiastek z wyznacznika Gramma, a więc k-wymiarowa objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $\{D\Psi(\boldsymbol{x})[e_1], D\Psi(\boldsymbol{x})[e_2], \cdots, D\Psi(\boldsymbol{x})[e_k]\}$, gdzie $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ oznacza standardową bazę ortonormalną w $\mathbb{R}^k$. Tak zdefiniowana wielkość $\sigma^k(M)$ nie zależy od wyboru parametryzacji zbioru M (dowód używa twierdzenia o zamianie zmiennej w całce).

Ogólniej możemy określić całkę z funkcji $f : \mathbb{R}^n \supset M \to \mathbb{R}$ na zbiorze M względem miary powierzchniowej wzorem

$$\int_M f\mathrm{d}\sigma^k = \int_U f(\Psi(\boldsymbol{x})) \cdot \sqrt{\det\left[D\Psi^T(\boldsymbol{x})D\Psi(\boldsymbol{x})\right]}\mathrm{d}\lambda^k(\boldsymbol{x}) \ .$$

Również ta wielkość nie zależy od konkretnego wyboru parametryzacji zbioru M.

Zadanie 2. Oblicz pole powierzchni fragmentu sfery 2-wymiarowej o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0, 0)$ zawartego pomiędzy płaszczyznami $z = z_0$ i $z = z_1$.

Zadanie 3. Powierzchnia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ jest wykresem funkcji gładkiej $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ (tzn. $\sigma = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$). Wykaż, że

$$\sigma^2(\Sigma) = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2}\mathrm{d}\lambda^2(x, y) \ .$$

Zadanie 4. Oblicz pole wycinka sfery korzystając z opisu górnej półsfery jako wykresu funkcji $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Dom 1. Oblicz pole fragmentu powierzchni $z^2 = 2xy$ wyciętej płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 1$.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 4 kwietnia 2019

`Całka powierzchniowa.`

Omówienie zadania domowego.

Stwierdzenie. *Twierdzenia o zamianie zmiennych można używać w każdej sytuacji, wystarczy że mamy do czynienia z funkcją mierzalną.*

Dowód. Rozważmy $\int_A f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x})$, gdzie $f : A \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną określoną na zbiorze mierzalnym $A \subset \mathbb{R}^n$. Rozważmy dyfeomorfizm $\Phi : B \to A$. Twierdzenie o zamianie zmiennych mówi, że jeśli $f(\boldsymbol{x})$ jest całkowalna na A, to $f(\Phi(\boldsymbol{y}))|D\Phi(\boldsymbol{y})|$ jest całkowalna na B oraz

$$\int_A f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}) = \int_B f(\Phi(\boldsymbol{y}))|D\Phi(\boldsymbol{y})|\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{y}) \ . \tag{1}$$

Ale, jeśli bez sprawdzenia założenia o całkowalności f okaże się, że $f(\Phi(\boldsymbol{y}))|D\Phi(\boldsymbol{y})|$ jest całkowalna na B, to stosując twierdzenie o zamianie zmiennych dla $\Phi^{-1} : A \to B$ dostaniemy całkowalność $f(\boldsymbol{x})$ na A i równość (1). Stąd wynika, że całkowalność (niecałkowalność) $f(\boldsymbol{x})$ na A i całkowalność (niecałkowalność) $f(\Phi(\boldsymbol{y}))|D\Phi(\boldsymbol{y})|$ na B są równoważne. □

Miara krzywej parametrycznej. *Rozważmy krzywą gładką $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^n$. Wówczas długość tej krzywej to*

$$l(\gamma) = \int_\gamma 1 \cdot \mathrm{d}\sigma^2 := \int_I \|D\gamma(t)\|\mathrm{d}\lambda^1(t) \ ,$$

gdzie $\|D\gamma(t)\|$ oznacza długość euklidesową różniczki odwzorowania γ w punkcie t. Intuicja jest taka, że wielkość $\|D\gamma(t)\|$ mówi jak bardzo nasza parametryzacja rozciąga albo skraca standardową miarę na $I \subset \mathbb{R}$.

Zadanie 1. Oblicz długość krzywych:

(a) $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \in \mathbb{R}^3$ gdzie $t \in [0, T]$.

(b) opisanej we współrzędnych biegunowych równaniem $r = 1 + \cos\phi$.

Dom 1. Wykaż, że długość krzywej zadanej we współrzędnych biegunowych równaniem $r = r(\phi)$, gdzie $\phi \in [0, 2\pi]$ wynosi

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2}\mathrm{d}\phi \ .$$

Dom 2 (Pisemnie na 11 kwietnia 2019). Rozważmy funkcję całkowalną $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Definiujemy

$$F(x) := \int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(tx)f(t)\mathrm{d}t \ .$$

Rozstrzygnij, czy

1. F jest różniczkowalna na $(0, +\infty)$?

2. F jest ciągła na $[0, +\infty)$?

3. F jest całkowalna na $[0, +\infty)$?

Michał Jóźwikowski, 4 kwietnia 2019.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 1 kwietnia 2019

`Całkowalność funkcji.`

Dokończenie zadania z ostatnich ćwiczeń – aproksymacja funkcji całkowalnych funkcjami ciągłymi o zwartym nośniku. Omówienie zadań domowych.

Zadanie 1. Rozstrzygnij czy funkcja $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{\|(x,y)\|^4}$ jest całkowalna na kwadracie $[0,1]^2$.

Zadanie 2. Rozstrzygnij czy funkcja

$$f(x,y) := \frac{\ln x + \ln y}{x^2+y^2+1} \ .$$

jest całkowalna na $(\mathbb{R}_+)^2$.

Dom 1. Dokończyć ostatnie zadanie.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 28 marca 2019

Omówienie zadań domowych. Inny dowód faktu, że splot funkcji całkowalnej oraz funkcji ciągłej i ograniczonej jest funkcją ciągłą.

Uwaga. Splot funkcji całkowalnych wykazuje własności operacji mnożenia w grupie przemiennej (jest przemienny i łączny), ale funkcje całkowalne $L^1(\mathbb{R}^n)$ ze splotem nie tworzą grupy, gdyż nie ma funkcji pełniącej rolę elementu neutralnego.
Element neutralny można uzyskać rozszerzając pojęcie splotu na przestrzeń *dystrybucji* (inaczej *funkcji uogólnionych*), jest nim wówczas tak zwana *delta Diraca*. Niemniej jednak również dystrybucje wraz ze splotem nie tworzą grupy, ale ich podzbiór – dystrybucje odwracalne tworzy grupę przemienną.

Zadanie 1. Zdefiniujmy rodzinę funkcji $f_\lambda(x) := \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$ dla $\lambda > 0$. Wykaż że dla dowolnej funkcji całkowalnej $g \in L^1(\mathbb{R})$ zachodzi

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|f_\lambda * g - g\|_{L^1} = 0 \ .$$

Wskazówki: (a) $\int_{\mathbb{R}} f_\lambda(x) \mathrm{d}x = 1$; (b) Znacznie prościej jest podać dowód dla g jednostajnie ciągłej.

Dom 1. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^\alpha$ jest całkowalna w kuli jednostkowej $B^n(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$. Uwaga: za rozwiązanie uznam też odpowiedź dla przypadków szczególnych $n = 1, 2, 3$.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 21 marca 2019

`Rzucanie przedmiotami w celach naukowych. Definicja i podstawowe własności splotu.`

Omówienie zadania domowego.

Zadanie 1. Oblicz moment bezwładności walca $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, |z| < \frac{1}{2}h\}$ o jednorodnej gęstości $\rho = \text{const}$, względem jego osi symetrii.

Przypomnijmy, że splotem funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcję zdefniowaną wzorem

$$(f * g)(\boldsymbol{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{y}) \ .$$

O wartości $(f * g)(x)$ można myśleć jak o funkcji powstałej przez uśrednianie f wokół x z gęstością zadaną przez funkcję g.

Generalnie splatanie funkcji całkowalnej f z funkcją „trochę lepiej niż przyzwoitą" g produkuje „funkcję przyzwoitą". Na przykład:

- *Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*
- *Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ (ciągła klasy C^k o zwartym nośniku), to $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ i ponadto $D^{|\alpha|}_{\boldsymbol{x}^\alpha}(f * g) = f * (D^{|\alpha|}_{\boldsymbol{x}^\alpha} g)$, gdzie α jest dowolnym wielowskaźnikiem długości nie większej niż k.*
- *Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i g ciągła i ograniczona, to $f * g$ jest ciągła.*

Zadanie 2. Rozważmy funkcję całkowalną $f \in L^1(\mathbb{R})$ i zdefiniujmy funkcję $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - t) \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \ .$$

Wykaż, że F jest:

a) dobrze określona,

b) ciągła (jednostajnie),

c) różniczkowalna.

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona, to splot $f * g$ jest funkcją ciągłą.

Dom 1 (Pisemnie na 28 marca 2019). Wyznacz funkcję

$$F(t) = \int_0^1 \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x \ .$$

Wskazówka: Całkując wyrażenie zawierające wyraz $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ wygodnie użyć podstawienia $x = \sin \alpha$, zaś całkując wyrażenie wymierne w $\sin^2 \alpha$ podstawienia $w = \operatorname{tg} \alpha$.

Dom 2. Wykaż, że operacja splotu jest łączna, tj. jeśli $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ są całkowalne to

$$(f * g) * h = f * (g * h) \ .$$

Michał Jóźwikowski, 21 marca 2019.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 18 marca 2019

`Środek ciężkości i moment bezwładności.`

Omówienie zadań domowych.

Zadanie 1. Znaleźć środek ciężkości zbioru $\{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1\}$.

Definicja. *Momentem bezwładności* zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ o gęstości $\rho : A \to [0, +\infty)$ względem prostej l nazywamy liczbę

$$I_l(A) := \int_A \operatorname{dist}(l, \boldsymbol{x})^2 \cdot \rho(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}) \ ,$$

gdzie $\operatorname{dist}(l, \boldsymbol{x})$ oznacza odległość punktu $\boldsymbol{x}$ od osi l.

Zadanie 2. Znaleźć moment bezwładności jednorodnej kuli (o gęstości $\rho = \text{const}$) o promieniu R względem osi przechodzącej przez jej środek.

Zadanie 3. Znaleźć moment bezwładności jednorodnej kuli (o gęstości $\rho = \text{const}$) o promieniu R względem osi odległej o d od jej środka.

Dom 1. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego walca $W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < R^2, |z| < h/2\}$ względem prostej $x = y = z$.

Michał Jóźwikowski, 18 marca 2018.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 14 marca 2019

`Całka Lebsegue'a, całka z parametrem`

Omówienie zadania domowego.

Zadanie 1. Wyznacz funkcję

$$I(a) := \int_0^{+\infty} \exp\left[-x^2 - a^2\frac{1}{x^2}\right]\mathrm{d}x \ .$$

Dom 1. Niech $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną. Wykaż, że

$$\lim_{y\to 0}\int_0^{\infty}\frac{y\cdot f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0) \ .$$

Wskazówka: łatwo rozwiązać to zadanie przy założeniu, że f jest stała.

Definicja. *Położeniem środka masy* (*ciężkości*) zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ o gęstości $\rho : A \to [0, +\infty)$ nazywamy wektor

$$\langle \boldsymbol{r}_\rho(A)\rangle = \frac{1}{M_\rho(A)}\int_A \boldsymbol{x}\cdot\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{M_\rho(A)}\left(\int_A x_1\cdot\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}), \dots, \int_A x_n\cdot\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x})\right) \ ,$$

gdzie $M_\rho(A) := \int_A \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x})$ jest *masą* zbioru A.

Należy myśleć, że współrzędne $\langle \boldsymbol{r}_\rho(A)\rangle$ to uśrednione współrzędne punktów zbioru A względem miary z gęstością ρ.

Dom 2. Znaleźć środek ciężkości jednorodnej ($\rho \equiv 1$) półsfery $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+x^2 \leq 1, z > 0\}$. *Wskazówka*: w zasadzie robiliśmy już to zadanie.

Michał Jóźwikowski, 11 marca 2019.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 7 marca 2019

Omówienie zadania domowego.
Zadanie 1. Oblicz dla $t > 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \ln(x^2+t^2)\mathrm{d}x \quad \text{i} \quad \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\ln(x^2+t^2)\mathrm{d}x\ .$$

Zadanie 2. Udowodnij twierdzenie o różniczkowaniu całki z parametrem.
Zadanie 3. Rozstrzygnij, czy różniczkowalne są funkcje

$$F(x,y) = \int_{A(x,y)}(t-s)\mathrm{d}\lambda^2(t,s) \quad \text{oraz} \quad G(x,y) = \int_{A(x,y)}|t-s|\mathrm{d}\lambda^2(t,s)\ ,$$

gdzie $A(x,y) = \{(t,s) \mid 0 < t < x^2, 0 < s < y^2\}$.

Dom 1 (pisemnie na 14 marca). Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot e^z}{n^2\left[1-\cos\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{n}\right)\right]}\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z)\ ,$$

gdzie $A = \{(x,y,z) \mid z^2 < x^2+y^2+z^2 \le 3z^2, x^2+y^2+z^2 \le 1, z > 0\}$.
Dom 2. Funkcja $h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Rozstrzynij, czy funkcja

$$\int_{x^2+y^2+z^2\le t} h(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z)$$

jest różniczkowalna.

Michał Jóźwikowski, 7 marca 2019.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 4 marca 2019

`Całkowanie funkcji wielu zmiennych, różniczkowanie pod znakiem całki.`

Zadanie 1. Oblicz miarę zbioru

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2 \le 4(x^2-y^2)\} \ .$$

Zadanie 2. Oblicz całkę

$$\int_{\{x>0,y>0\}} \frac{xy-1}{y} \exp[-x-2y] \mathrm{d}\lambda^2(x,y) \ .$$

W powyższym zadaniu używaliśmy następującego faktu

Lemat. *Niech $f,g:\mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi i niech dodatkowo g będzie funkcją całkowalną na A. Wówczas funkcja f jest całkowalna na A wtedy i tylko wtedy gdy funkcja $f+g$ jest całkowalna na A.*

Dowód. Wynika wprost z nierówności trójkąta

$$\int_A |f| - \int_A |g| \le \int_A |f+g| \le \int_A |f| + \int_A |g| \ .$$

Skoro $\int_A |g|$ jest skończona, to obie wielkości $\int_A |f|$ i $\int_A |f+g|$ są jednocześnie skończone lub jednocześnie nieskończone. □

Twierdzenie (Różniczkowanie pod znakiem całki). *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym, $I \subset \mathbb{R}$ otwartym podzbiorem prostej $\mathbb{R}$. Funkcja $f: I \times A \to \mathbb{R}$ ma następujące własności:*

- *Dla każdego $t \in I$ funkcja $f(t,\cdot): A \to \mathbb{R}$ jest całkowalna*
- *Pochodna $\frac{\partial}{\partial t} f(t,\boldsymbol{x})$ jest dobrze określona*
- *Istnieje funkcja całkowalna $g: A \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $t \in I$ zachodzi $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t,\boldsymbol{x})\right| \le g(x)$.*

Wówczas możemy różniczkować f pod znakiem całki, tzn.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_A f(t,\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x})\right] = \int_A \frac{\partial}{\partial t} f(t,\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}) \ .$$

Zadanie 3. Oblicz całkę

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{1-\cos tx}{x} \mathrm{d}x \ .$$

Dom 1. Oblicz całkę

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1+\cos^2 x) \mathrm{d}x \ .$$

Wskazówka: Wprowadź dodatkowy parametr do całki. Przydatne mogą być sposoby na całkowanie funkcji wymiernych od funkcji trygonometrycznych.

Michał Jóźwikowski, 4 marca 2018.

AM II.2 2018/2019 (grupa 2.), 28 lutego 2019

`Całkowanie funkcji wielu zmiennych, podstawienie sferyczne.`

Zadanie 1. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| < 1, y > 0\}$. Oblicz całkę

$$\int_A x \exp(-y^2) \mathrm{d}\lambda^2(x,y) \ .$$

W powyższym zadaniu używaliśmy następującego faktu

Lemat. *Niech $f, g : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi i niech dodatkowo g będzie funkcją całkowalną na A. Wówczas funkcja f jest całkowalna na A wtedy i tylko wtedy gdy funkcja $f+g$ jest całkowalna na A.*

Dowód. Wynika wprost z nierówności trójkąta

$$\int_A |f| - \int_A |g| \leq \int_A |f+g| \leq \int_A |f| + \int_A |g| \ .$$

Skoro $\int_A |g|$ jest skończona, to obie wielkości $\int_A |f|$ i $\int_A |f+g|$ są jednocześnie skończone lub jednocześnie nieskończone. □

Zadanie 2. Kula o promieniu R $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ została przecięta płaszczyzną $\{z = a\}$. Oblicz objętości powstałych części.

Podstawieniem sferycznym *nazywamy odwzorowanie (dyfeomorfizm na obraz)*

$$\Phi : (r, \phi, \beta) \longmapsto (x = r\cos\beta\cos\phi, y = r\cos\beta\sin\phi, z = r\sin\beta)$$

Opisujący punkty przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ za pomocą ich odległości od środka układu współrzędnych $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ i tak zwanych kątów Eulera*: $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ – kąta, który promień wodzący tworzy z płaszczyzną XY, oraz $\phi \in (0, 2\pi)$ – kąta rzutu pomiędzy rzutem promienia wodzącego na płaszczyznę XY a osią OX. Podstawienia sferycznego wygodnie używać w zadaniach cechujących się symetrią sferyczną.*

Zadanie 3. Oblicz Jakobian postawienia sferycznego.

Zadanie 4. Oblicz całkę z funkcji z po półsferze $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

Michał Jóźwikowski, 28 lutego 2019.