

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 13 czerwca 2019

Twierdzenie Stokes'a i jego klasyczne wersje

Omówienie zadań domowych

Zadanie 1. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial D_n} \omega_n ,$$

gdzie $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leq y \leq 1 + \frac{1}{n}\}$ ma standardową orientacją dziedziczną z \mathbb{R}^2 , zaś

$$\omega_n = \frac{n \sin(\frac{x}{n}) dx + (y + 1) dy}{(1 + \frac{1}{n})x^2 + y^2} .$$

,

Powodzenia na egzaminie!!!

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 6 czerwca 2019

Twierdzenie Stokes'a i jego klasyczne wersje

Omówienie zadania domowego.

Klasyczne wersje twierdzenia Stokes'a w \mathbb{R}^3 .

Niech $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie polem wektorowym w \mathbb{R}^3 . Możemy z nim stowarzyszyć następujące formy

$$\omega_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{oraz} \quad \eta_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle .$$

Zatem $\omega_{\mathbf{a}} = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$ oraz $\eta_{\mathbf{a}} = a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_2$. Widać stąd, że w \mathbb{R}^3 każda 1-forma jest postaci $\omega_{\mathbf{a}}$, zaś każda 2-forma jest postaci $\eta_{\mathbf{a}}$ dla pewnego pola \mathbf{a} .

Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią 2-wymiarową z brzegiem ∂S . Całkę

$$\int_{\partial S} \omega_{\mathbf{a}} = \int_{\partial S} \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle d\sigma^1 ,$$

gdzie \mathbf{t} oznacza wektor jednostkowy styczny do konturu ∂S (zgodnie z orientacją), a $d\sigma^1$ miarę powierzchniową na ∂S , nazywamy krążeniem pola \mathbf{a} wokół konturu ∂S .

Całkę

$$\int_S \eta_{\mathbf{a}} = \int_S \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle d\sigma^2 ,$$

gdzie \mathbf{n} oznacza wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni S (zgodnie z orientacją), zaś $d\sigma^2$ oznacza miarę powierzchniową na S , nazywamy strumieniem (przepływem) pola \mathbf{a} przez powierzchnię S .

Z twierdzenia Stokes'a mamy

$$\int_{\partial S} \omega_{\mathbf{a}} = \int_S d\omega_{\mathbf{a}} .$$

Różniczkując formę $\omega_{\mathbf{a}}$ łatwo dostaniemy, że $d\omega_{\mathbf{a}} = \eta_{\text{rot } \mathbf{a}}$, gdzie $\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = [(a_3)'_y - (a_2)'_z, (a_1)'_z - (a_3)'_x, (a_2)'_x - (a_1)'_y]$. Powyższe pole wektorowe nazywamy rotacją (wirowością) pola \mathbf{a} .

Rozważmy teraz rozmaitość trójwymiarową $M \subset \mathbb{R}^3$ z brzegiem ∂M . Ponownie korzystając tw. Stokes'a mamy

$$\int_{\partial M} \eta_{\mathbf{a}} = \int_M d\eta_{\mathbf{a}} .$$

Formę po prawej stronie możemy zapisać jako $d\eta_{\mathbf{a}} = \text{div}(\mathbf{a}) \cdot dx \wedge dy \wedge dz$, gdzie $\text{div}(\mathbf{a}) = \nabla \circ \mathbf{a} = (a_1)'_x + (a_2)'_y + (a_3)'_z$. Powyższą funkcję nazywamy dywergencją (źródłowością) pola \mathbf{a} .

Zadanie 1. Oblicz dywergencję i rotację pól wektorowych

a) $\mathbf{F}(x, y, z) = [x, y, z]$,

b) $\mathbf{G}(x, y, z) = [y, -x, 0]$,

c) $\mathbf{H}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} [x, y, z]$.

Dom 1. Dla pola wektorowego $\mathbf{F}(x, y, z) = [1, xy, z]$ oraz obszaru $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 3z^2, z \in (0, 3)\}$, policz niezależnie od siebie całki $\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{F} d\lambda^3$, $\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\sigma^2$ oraz $\int_{\partial\Omega} \eta_{\mathbf{F}}$, gdzie \mathbf{n} to wektor normalny zewnętrzny do $\partial\Omega$. Zwróć uwagę, że $\partial\Omega$ składa się z dwóch kawałków.

Dom 2. Rozważmy funkcję gładką $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ i pole wektorowe $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Wykaż, że $\text{rot}(\nabla f) = 0$ oraz $\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0$. Oblicz $\text{div}(\nabla f)$.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 3 czerwca 2019

Twierdzenie Stokes'a

Zadanie 1. Rozważmy odwzorowanie gładkie $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wykaż, że

$$df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_n = \det(DF(\mathbf{x})) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Omówienie zadań domowych.

Kartkówka

Zadanie 2. Rozważmy formę $\omega = e^{xy} dx \wedge dz$. Znajdź (jakaś) funkcję $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ aby forma $\alpha = f(x, y, z) \cdot \omega$ była zamknięta, tzn. $d\alpha = 0$.

Zadanie 3. Wykaż, że przyporządkowanie

$$\omega(x, y, z) : (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 + \sin x & y \cos x & 0 \end{pmatrix}$$

określa 2-formę $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Oblicz całkę z tej formy po zbiorze

$$M = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = (1 - \sin x)^2, 0 < x < \frac{\pi}{6}\} ,$$

zorientowanym tak, że zewnętrznym wektorem normalnym do M w punkcie $(0, 0, 1)$ jest wektor $[1, 0, 1]$.

Dom 1. Dokończyc ostatnie zadanie dowolnie wybranym sposobem.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 30 maja 2019

Całkowanie wielo-form, twierdzenie Stokes'a

Zastawienie podstawowych własności różniczki zewnętrznej:

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge (d\beta), \quad d(d\omega) = 0, \quad \Phi^* d\omega = d(\Phi^* \omega),$$

gdzie α, β, ω to formy różniczkowe, a Φ jest odwzorowaniem gładkim.

Kilka uwag o orientacji:

1. Rozmaitość, która jest brzegiem obszaru (lub też podzbiorem takiego brzegu) jest orientowalna.
2. Na rozmaitość orientowalnej i spójnej orientację wystarczy zadać w jednym punkcie.
3. Na powierzchni 2-wymiarowej $M \subset \mathbb{R}^3$ podanie orientacji jest równoważne wskazaniu pola wektorów normalnych do M : bazie uporządkowanej $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset TM$ przypisujemy wektor $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \perp TM$.

Omówienie zadań domowych.

Zadanie 1. Oblicz całkę

$$\int_S \frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z}$$

po zbiorze $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2, 1 < z < 2\}$. Gdzie orientacja jest zadana przez pole wektorów normalnych skierowanych do osi OZ .

Zadanie 2. Oblicz pole obszaru w $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ograniczonego krzywą $(x + y)^4 = x^2 y$.

Wskazówka: rozważ punkty przecięcia badanej krzywej z prostymi $y = tx$.

Dom 1. Doliczyć ostatnie zadanie.

Dom 2 (Pisemnie na 6 czerwca). Oblicz całkę

$$\int_{S^2(\mathbf{0}, R)} r^\alpha (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy),$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, zaś $S^2(\mathbf{0}, R)$ oznacza sferę o środku $\mathbf{0}$ i promieniu R z naturalną orientacją pochodzącą od kuli $B(\mathbf{0}, R)$.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 23 maja 2019

Całkowanie wielo-form, twierdzenie Stokesa

Dla wieloform możemy zdefiniować operację cofania analogicznie jak dla 1-form.

Definicja. Cofnięciem (przeciągnięciem, albo pull-backiem) formy $\omega \in \Omega^k(U)$ za pomocą odwzorowania gładkiego $\Phi: V \rightarrow U$ nazywamy formę $\Phi^*\omega \in \Omega^k(V)$ określoną wzorem

$$\Phi^*\omega(\mathbf{x})[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k] = \omega(\Phi(\mathbf{x})) [D_{\mathbf{x}}\Phi[\mathbf{v}_1], \dots, D_{\mathbf{x}}\Phi[\mathbf{v}_k]] .$$

Praktyczna metoda liczenia przeciągnięć pozostaje bez zmian dla wieloform: do wzorów na ω w U wstawiamy wyrażenia wynikające z odwzorowania Φ . Wynika to z faktu, że operacja cofania jest przemienna z operacjami różniczkowej zewnętrznej d i produktem \wedge :

Lemat. Dla form $\alpha, \beta \in \Omega^*(U)$ i funkcji $f \in C^\infty(U)$ zachodzą wzory $\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = (\Phi^*\alpha) \wedge (\Phi^*\beta)$, $\Phi^*f(\mathbf{x}) = f(\Phi(\mathbf{x}))$, oraz $\Phi^*(d\alpha) = d(\Phi^*\alpha)$.

Zadanie 1. Oblicz formę $dx \wedge dy$ we współrzędnych biegunowych ($x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$).

Zadanie 2. Znajdź $\Phi^*\omega$ dla $\Phi(u, v) = (uv, u^2, 3u + v)$, $\omega = ydx \wedge dz$.

Zadanie 3. Oblicz cofnięcie formy $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ za pomocą odwzorowania $\Phi(u, v) = (uv, u^2, 3u + v)$. Uzasadnij wynik bez wykonywania obliczeń.

Definicja. Powiemy, że dwie bazy $\{e_1, \dots, e_k\}$ oraz $\{f_1, \dots, f_k\}$ zadają tę samą orientację przestrzeni wektorowej \mathbb{R}^k , gdy wyznacznik macierzy przejścia między nimi jest dodatni. Każda przestrzeń wektorowa ma zatem dwie kanoniczne orientacje.

Orientację rozmaitości różniczkowej, nazywamy zgodny wybór orientacji jej wszystkich przestrzeni stycznych. Intuicyjnie rozumiemy, że wybrane orientacje zmieniają się w sposób ciągły od punktu do punktu. Formalna definicja wymaga wprowadzenia pojęcia atlasu zorientowanego. Nie wszystkie rozmaitości da się zorientować (np. wstęga Moebiusa). Te które dopuszczają orientację nazywamy *orientowalnymi*.

Definicja (Całka z k -formy różniczkowej). Dla zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^k$ z kanoniczną orientacją $\{e_1, \dots, e_k\}$ definiujemy

$$\int_U f(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_U f(\mathbf{x}) d\lambda^k(\mathbf{x}) ,$$

a więc całka z k -formy $f(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ pokrywa się ze standardową całką Lebesgue'a, z dokładnością do zmiany znaku przy innym wyborze orientacji. Formę $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ nazywamy *formą objętości*.

Całkę z formy różniczkowej na podrozmaitości definiujemy przechodząc od krzywych do płaskich współrzędnych.

Niech $S \subset \mathbb{R}^n$ będzie k -wymiarową podrozmaitością zorientowaną. Całkę z k -formy $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ na S definiujemy jako

$$\int_S \alpha = \int_U \Phi^* \alpha ,$$

gdzie $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest dowolną parametryzacją $S = \Phi(U)$ zgodną z orientacją S . To znaczy, jeśli $\{e_1, \dots, e_k\}$ jest standardową orientacją \mathbb{R}^k , to baza $\{D\Phi(e_1), \dots, D\Phi(e_k)\}$ jest zgodna z orientacją S .

Zadanie 4. Oblicz całkę z formy $\alpha = xdy \wedge dz$ po połowce torusa sparametryzowanej następująco ($x = (4 + \cos \alpha) \cos \theta, y = (4 + \cos \alpha) \sin \theta, z = \sin \alpha$), gdzie $\alpha \in [0, 2\pi]$ i $\theta \in [0, \pi]$. Przyjmujemy, że orientacja torusa jest dziedziczona z orientacji $d\alpha \wedge d\theta$ w \mathbb{R}^2 za pomocą rozważanej parametryzacji.

Różniczkę zewnętrzną $d: \Omega^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ można zdefiniować poprzez następujące własności:

- dla funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, a więc df to znana już różniczka zewnętrzna funkcji,
- $d(df) = 0$,

- dla dowolnych form α i β , zachodzi $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$.

W praktyce wystarczy wzór $d(\sum_{(i_0, \dots, i_k)} f_{i_0} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = (\sum_{(i_0, \dots, i_k)} df_{i_0} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$.

Zadanie 5. Oblicz $d(xdy \wedge dz)$.

Twierdzenie (Stokes'a). Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie $(k+1)$ -wymiarową zorientowaną rozmaitością z brzegiem ∂M . Rozważmy k -formę $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, wówczas

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

gdzie ∂M ma naturalną orientację dziedziczną z M :

$$\mathbf{or}_M = \{\mathbf{n}, \mathbf{or}_{\partial M}\}.$$

\mathbf{n} oznacza tutaj wektor normalny do brzegu ∂M skierowany na zewnątrz M .

Twierdzenie Stokes'a stanowi daleko idące uogólnienie Zasadniczego Twierdzenia Analizy.

Zadanie 6. Korzystając z twierdzenia Stokes'a oblicz pole wnętrza elipsy

$$E = \{(a \cos \phi, b \sin \phi) \mid \phi \in [0, 2\pi]\}.$$

Zadanie 7. Oblicz całkę z zadania o torusie korzystając z twierdzenia Stokes'a. Zauważ, że rozważany zbiór nie był pełnym brzegiem półtorusa!

Dom 1. Oblicz $d\omega$ dla

1. $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$,
2. $\omega = xy^2z^3 dx \wedge dy - yz^2x^3 dy \wedge dz$,
3. $\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j dx_i \wedge dx_j$.

Dom 2. Wykaż, że dla formy $\omega = g(x, y)dx + h(x, y)dy$ warunek $d\omega = 0$ jest równoważny warunkowi koniecznemu istnienia funkcji pierwotnej dla ω , a więc $g'_y = h'_x$.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 20 maja 2019

Wprowadzenie do wieloform

Zadanie 1. Oblicz $\alpha \wedge \alpha$, gdzie $\alpha = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 f_{ij}(\mathbf{x}) dx^i \wedge dx^j$

Kartkówka

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy forma $\omega = y^2 \cos(xy^2) dx + (2xy \cos(xy^2) + y) dy$ jest różniczką jakiejś funkcji gładkiej $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Jeśli tak, to wskaż taką funkcję.

Zadanie 3. Zbadać, czy forma $\omega = |x+y| dx + |x+y| dy$ ma w \mathbb{R}^2 własność niezależności całki od drogi?

Zadanie 4. Niech $\mathbf{F} = (f, g, h): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie polem wektorowym (gładkim odwzorowaniem z \mathbb{R}^3 w \mathbb{R}^3). Wykaż, że odwzorowanie:

$$\alpha(\mathbf{x}): (\mathbb{R}^3)^2 \ni (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \longmapsto \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle \in \mathbb{R}$$

jest 2-formą różniczkową w \mathbb{R}^3 . Wyraż tę formę w bazie $\{dx, dy, dz\}$.

Dom 1. Sprawdź, że jeśli $\beta \in \Omega^3(\mathbb{R}^n)$ jest trój-formą, zaś $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest gładkim polem wektorowym, to

$$\alpha(\mathbf{x})[\mathbf{v}, \mathbf{w}] := \beta(\mathbf{x})[\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{v}, \mathbf{w}]$$

jest 2-formą. Nazwywamy ją *zwężeniem formy β z polem \mathbf{F}* .

W szczególności 2-forma z ostatniego zadania, a więc $\alpha(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) dy \wedge dz + g(\mathbf{x}) dz \wedge dx + h(\mathbf{x}) dx \wedge dy$, jest równa

$$\alpha[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = (dx \wedge dy \wedge dz)[\mathbf{F}, \mathbf{v}, \mathbf{w}].$$

Dom 2 (pisemnie na 30 maja). Zbadać, czy forma $\omega = \frac{y dx - x dy}{x^2 + xy + y^2}$ ma w obszarze $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ własność niezależności całki od drogi.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 16 maja 2019

Całka z 1-formy, wprowadzenie do wieloform.

Zadanie 1. Oblicz całkę $\int_C (2x+y)dx + (x-2y)dy$ wzdłuż krzywej $C = \{(x, y) \mid x^4 + y^3 = 1, x \leq 0 \leq y\}$ zorientowanej tak, że jej początkiem jest punkt $(0, 1)$, a końcem punkt $(-1, 0)$.

Zadanie 2. Niech $C = \{(x, y) \mid 4x^2 + y = 5, y \geq 1\}$ będzie krzywą zorientowaną w kierunku wzrastania zmiennej x oblicz całkę

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Omówienie zadań domowych

Wieloformy różniczkowe, operacja „wedge” (dziubek) \wedge .

Zadanie 3. Oblicz

a) $(xdy + ydz + zdx) \wedge (dx + dy + dz),$

b) $(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \wedge (dx + dy + dz).$

Dom 1. Niech $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ i $\beta \in \Omega^l(\mathbb{R}^n)$ będą, odpowiednio, k i l -formami. Wykaż, że

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha.$$

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 9 maja 2019

Formy różniczkowe: kryterium dokładności 1-formy, zamiana zmiennych (pull-back).

Zadanie 1. Wyznacz funkcję pierwotną z 1-formy (o ile istnieje)

$$\omega = (1 + \sin y)dx - (2y - x \cos y)dy .$$

Omówienie zadania domowego.

Zadanie 2. Wykaż, że forma $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ nie jest *dokładna* (to znaczy, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $\omega = df$), ale spełnione są warunki konieczne dla dokładności ω , tzn. pochodne cząstkowe $\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x$ i $\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)'_y$ są równe (mówimy wówczas, że ω jest *zamknięta*).

Twierdzenie. Rozważmy 1-formę $\omega = g(x,y)dx + h(x,y)dy$ określoną na obszarze $U \subset \mathbb{R}^2$. Jeśli spełnione są dwa warunki:

- obszar U jest *jednospójny* (tzn. wszystkie pętle w U są *ściągalne*, inaczej mówiąc “w U nie ma dziur”),
- zachodzi równość pochodnych cząstkowych $g'_y = h'_x$,

wówczas ω jest *dokładna*, tzn. istnieje funkcja gładka $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $\omega = df$.

Definicja. Cofnięciem (przeciągnięciem, albo *pull-backiem*) formy $\omega \in \Omega^1(U)$ za pomocą odwzorowania gładkiego $\Phi : V \rightarrow U$ nazywamy formę $\Phi^* \omega \in \Omega^1(V)$ określoną wzorem

$$\Phi^* \omega(\mathbf{x})[\mathbf{v}] = \omega(\Phi(\mathbf{x}))[D_{\mathbf{x}} \Phi[\mathbf{v}]] .$$

Innymi słowy, aby policzyć wartość formy $\Phi^* \omega$ na wektorze \mathbf{v} w punkcie \mathbf{x} przepychamy ten wektor do U za pomocą pochodnej Φ i liczymy wartość formy ω na obrazie.

Uwaga: Φ nie musi być dyfeomorfizmem, a nawet U i V nie muszą być tego samego wymiaru!

Lemat. Dla funkcji $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzą wzory $\Phi^* f(\mathbf{x}) = f(\Phi(\mathbf{x}))$ (*pull-back funkcji to po prostu złożenie*) oraz $\Phi^*(df) = d(\Phi^* f)$ (*przeciąganie jest przemienne z operacją różniczki zewnętrznej d*). Z ich pomocą można policzyć *pull-back* każdej formy.

Zatem w praktyce, na przykład, dla $\Phi : (r, \phi) \mapsto (x = r \cos \phi, y = r \sin \phi)$ i $\omega = y^2 dx$, aby obliczyć $\Phi^* \omega$ wstawiamy po prostu wyrażenia $x = r \cos \phi$ i $y = r \sin \phi$ do wzoru na ω :

$$\Phi^*(y^2 dx) = (r \sin \phi)^2 d(r \cos \phi) = r^2 \sin^2 \phi (\cos \phi dr - r \sin \phi d\phi) .$$

Zadanie 3. Znajdź postać formy z poprzedniego zadania we współrzędnych biegunowych (oblicz *pull-back* $\Phi^* \omega$ dla $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ i $\Phi(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$).

Pull-back formy różniczkowej ma podobne znaczenie co zamiana zmiennych w całce

Lemat. Rozważmy odwzorowanie gładkie $\Phi : V \rightarrow U$, krzywą zorientowaną $\Gamma \subset V$ i formę $\omega \in \Omega^1(U)$ wówczas

$$\int_{\Gamma} \Phi^* \omega = \int_{\Phi(\Gamma)} \omega ,$$

gdzie orientacja krzywej $\Phi(\Gamma)$ jest indukowana z Γ .

Zadanie 4. Oblicz całkę z formy $\omega = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ po łuku elipsy $E = \{(2 \cos \phi, 3 \sin \phi) \mid \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$.

Zadanie 5. Znajdź postać formy $\omega = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ we współrzędnych biegunowych $\Phi(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$.

Dom 1. Wyznacz funkcję pierwotną z 1-formy (o ile istnieje)

$$\omega = (1 + yze^{xy})dx + (1 + xze^{xy})dy + e^{xy}dz .$$

Dom 2. Oblicz całkę

$$\int_{\Gamma} (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$$

po krzywej $\Gamma = \{(t, t(1 - \cos t), t \sin t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 6 maja 2019

Wprowadzenie do form różniczkowych.

Jeśli $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest funkcją gładką, to przez jej różniczkę zewnętrzną w punkcie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ rozumiemy funkcjonal liniowy $df(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wyznaczony przez

$$df(\mathbf{p})[\mathbf{v}] := D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p}) .$$

W szczególności dla funkcji współrzędnościowej $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i wektora $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n)$ mamy $dx^i(\mathbf{v}) = v^i$, a więc dx^i to funkcjonal liniowy, który zwraca i -tą składową wektora. Podobnie $df(\mathbf{p})[\mathbf{v}] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{p})v^i$, a więc $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ – różniczką f to kombinacja liniowa funkcjonałów dx^i ze współczynnikami będącymi pochodnymi cząstkowymi f .

Nieformalnie mówiąc 1-formy różniczkowe to skończone napisy postaci $\omega = \sum_i h_i dg^i$, gdzie $h_i, g^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Przestrzeń 1-form $\Omega^1(\mathbb{R}^n)$ zawiera zatem wszystkie różniczki zupełne funkcji gładkich na \mathbb{R}^n i ich kombinacje liniowe ze współczynnikami będącymi funkcjami gładkimi. Ponieważ każdą różniczkę df można zapisać jako kombinację form dx^i , wystarczy rozważać 1-formy postaci $\omega = \sum_i f_i dx^i$.

Definicja. Rozważmy 1-wymiarową podrozmiatość $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ zorientowaną i 1-formę $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$. Całką z formy ω po Γ nazywamy liczbę

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))[\dot{\gamma}(t)] dt ,$$

gdzie $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest dowolną parametryzacją podrozmiatości Γ zgodną z orientacją.

Uwaga. Wartość $\int_{\Gamma} \omega$ nie zależy od wyboru parametryzacji γ . Zmiana orientacji zmienia znak całki na przeciwny $\int_{\Gamma, \circlearrowleft} \omega = -\int_{\Gamma, \circlearrowright} \omega$.

Jeśli $\omega = \sum_i f_i dx^i$, gdzie $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, wówczas

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b \sum_i f_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) dt = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt ,$$

gdzie $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ zaś $F(\mathbf{x}) := (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$. Innymi słowy, możemy interpretować $\int_{\Gamma} \omega$ jako pracę siły F wykonywaną wzdłuż krzywej Γ .

Zadanie 1. Oblicz całkę z formy $\omega = (x+y)dx + (x-y)dy$ wzdłuż elipsy $E = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ z orientacją \circlearrowright .

Twierdzenie (Zasadnicze tw. analizy). Całka z różniczki zupełnej df dla dowolnej funkcji gładkiej $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wynosi

$$\int_{\Gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) .$$

A więc całka z 1-formy dokładnej nie zależy od drogi po której ją całkujemy. W szczególności całka z df po krzywej zamkniętej wynosi 0.

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli forma $\omega = g(x, y)dx + h(x, y)dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ jest różniczką zupełną, wówczas $g'_y = h'_x$. Sprawdź, że ten warunek zachodzi dla formy z poprzedniego zadania. Znajdź funkcję f taką, że $df = (x+y)dx + (x-y)dy$.

Zadanie 3. Oblicz całkę z formy $\omega = xdy - ydx$ po konturze C gdzie

a) C jest brzegiem prostokąta $[-a, a] \times [-b, b] \subset \mathbb{R}^2$ zorientowanym \circlearrowright ,

b) C jest okręgiem $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ zorientowanym \circlearrowright .

Co zauważyłeś?

Dom 1. Oblicz całkę z formy $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ po okręgu $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ zorientowanym \circlearrowright .

Michał Józwickowski, 6 maja 2019.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 25 kwietnia 2019

Miara i całka powierzchniowa, rozmaitości zanurzone.

Omówienie zadań domowych

Rozmaitości zanurzone Rozmaitość n -wymiarową (klasy C^k) $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ definiowaliśmy jako zbiór, który lokalnie wygląda jak wykres jakiejś funkcji klasy C^k . Umiemy opisywać rozmaitości jako poziomicę:

Twierdzenie (Wniosek z TFU). Niech $F : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ będzie odwzorowaniem klasy C^k . Zdefiniujemy zbiór $M = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n+k} \mid F(\mathbf{p}) = \mathbf{0}\}$. Jeśli dla każdego $\mathbf{p} \in M$ różniczka $DF(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest maksymalnego rzędu (jest „na”) to M jest rozmaitością klasy C^k i ponadto $T_{\mathbf{p}}M = \ker DF(\mathbf{p})$.

Na wykładzie poznaliśmy inny opis rozmaitości z użyciem pojęcia parametryzacji.

Definicja. Odwzorowanie $\Psi : \mathbb{R}^n \supset V \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ klasy C^k określone na podzbiorku otwartym $V \subset \mathbb{R}^n$, nazywamy parametryzacją (klasy C^k) gdy

- jest homeomorfizmem V na obraz $\Psi(V)$,
- dla każdego $\mathbf{x} \in V$ różniczka $D\Psi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ jest maksymalnego rzędu (jest różnowartościowa).

Twierdzenie. $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ jest n -wymiarową rozmaitością klasy C^k wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\mathbf{p} \in M$ istnieje otoczenie $p \in U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ takie, że $U \cap M = \Psi(V)$ dla pewnej parametryzacji $\Psi : \mathbb{R}^n \supset V \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$. Ponadto wówczas $T_{\mathbf{p}}M = \text{Im } D\Psi(\Psi^{-1}(\mathbf{p}))$.

Generalnie aby sprawdzić, czy zbiór $\Psi(V)$ zadany przez odwzorowanie $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ jest rozmaitością, nie wystarczy tylko pokazać maksymalności rzędu różniczki $D\Psi$ (jak w przypadku TFU), ale należy też zbadać jak jest położony obraz $\Psi(V)$ w \mathbb{R}^{n+k} .

Zadanie 1. Rozstrzygnij, czy zbiór $M = \{e^{2t}(\cos(t), \sin(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ jest rozmaitością zanurzoną w \mathbb{R}^2 ?

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy zbiór $\Gamma = \{(1+t^2)(\cos(t), \sin(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ jest rozmaitością zanurzoną w \mathbb{R}^2 ?

Dom 1. Czy zbiór $M_2 = \{(2 + \cos t)(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ jest rozmaitością zanurzoną w \mathbb{R}^2 ?

Dom 2. Czy zbiór $M_1 = \{(1 + \cos t)(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ jest rozmaitością zanurzoną w \mathbb{R}^2 ?

Michał Józwickowski, 25 kwietnia 2019.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 11 kwietnia 2019

Miara i całka powierzchniowa, reguły Pappusa-Guldina.

Omówienie zadania domowego

Zadanie 1. Oblicz masę miseczki parabolicznej $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2 + y^2, z \in [0, 1]\}$ o gęstości powierzchniowej $\rho(x, y, z) = z$.

Zadanie 2. Wyprowadź wzór na pole powierzchni powstałej przez obrót wykresu funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ klasy C^1 wokół osi OX.

I reguła Pappusa-Guldina. Dla powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f z poprzedniego zadania jej pole wynosi

$$\sigma^2(\Sigma) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi l \cdot \langle R \rangle,$$

gdzie $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ to długość wykresu, zaś $\langle R \rangle = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ to odległość środka masy wykresu od osi obrotu.

Zadanie 3. Ponownie oblicz pole wycinka sfery ograniczonego dwoma równoległymi płaszczyznami korzystając z wyników poprzedniego zadania.

Zadanie 4. Korzystając z reguły Pappusa-Guldina oblicz pole powierzchni bocznej torusa o promieniach r i R .

Zadanie 5. Znajdź parametryzację torusa o promieniach r i R .

II reguła Pappusa-Guldina. Objętość bryły M powstałej przez obrót figury płaskiej $A \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (x, y)$ wokół osi obrotu OY wynosi

$$\sigma^3(M) = \sigma^2(A) \cdot 2\pi \langle R \rangle,$$

gdzie $\sigma^2(A)$ oznacza miarę dwuwymiarową figury A , zaś $\langle R \rangle$ to odległość środka masy figury A od osi obrotu.

Dom 1. Udowodnij II regułę Pappusa-Guldina. Użyj jej do wyznaczenia objętości torusa o promieniach r i R .

Dom 2. Oblicz powierzchnię zbioru $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^x + e^{-x} = z - \sqrt{3}y, 0 < y < x \leq 1\}$.

Dom 3. Znaleźć położenie środka masy jednorodnej półsfery $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 8 kwietnia 2019

Miara i całka powierzchniowa.

Omówienie zadania domowego.

Zadanie 1. Rozważmy krzywą zadaną parametrycznie we współrzędnych biegunowych (r, ϕ) zależnością gładką $\gamma = \{(r(t), \phi(t)) \mid t \in [a, b]\}$. Wykaż że

$$l(\gamma) = \int_{[a,b]} \sqrt{r'(t)^2 + r^2 \phi'(t)^2} dt .$$

Miara i całka powierzchniowa. Rozważmy podrozmaitość k -wymiarową $M \subset \mathbb{R}^n$ sparametryzowaną przekształceniem gładkim $\Psi : \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (tzn. $M = \Psi(U)$). Wówczas k -wymiarowa miara podrozmaitości M to

$$\sigma^k(M) = \int_U \sqrt{\det [D\Psi^T(\mathbf{x})D\Psi(\mathbf{x})]} d\lambda^k(\mathbf{x}) .$$

Wielkość $\sqrt{\det [D\Psi^T(\mathbf{x})D\Psi(\mathbf{x})]} = \sqrt{\det [\langle D\Psi(\mathbf{x})[e_i], D\Psi(\mathbf{x})[e_j] \rangle]}$ to pierwiastek z wyznacznika Gramma, a więc k -wymiarowa objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $\{D\Psi(\mathbf{x})[e_1], D\Psi(\mathbf{x})[e_2], \dots, D\Psi(\mathbf{x})[e_k]\}$, gdzie $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ oznacza standardową bazę ortonormalną w \mathbb{R}^k . Tak zdefiniowana wielkość $\sigma^k(M)$ nie zależy od wyboru parametryzacji zbioru M (dowód używa twierdzenia o zamianie zmiennej w całce).

Ogólniej możemy określić całkę z funkcji $f : \mathbb{R}^n \supset M \rightarrow \mathbb{R}$ na zbiorze M względem miary powierzchniowej wzorem

$$\int_M f d\sigma^k = \int_U f(\Psi(\mathbf{x})) \cdot \sqrt{\det [D\Psi^T(\mathbf{x})D\Psi(\mathbf{x})]} d\lambda^k(\mathbf{x}) .$$

Również ta wielkość nie zależy od konkretnego wyboru parametryzacji zbioru M .

Zadanie 2. Oblicz pole powierzchni fragmentu sfery 2-wymiarowej o promieniu R i środka w punkcie $(0, 0, 0)$ zawartego pomiędzy płaszczyznami $z = z_0$ i $z = z_1$.

Zadanie 3. Powierzchnia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ jest wykresem funkcji gładkiej $f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ (tzn. $\sigma = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$). Wykaż, że

$$\sigma^2(\Sigma) = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2} d\lambda^2(x, y) .$$

Zadanie 4. Oblicz pole wycinka sfery korzystając z opisu górnej półsfery jako wykresu funkcji $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Zadanie 5. Oblicz pole fragmentu powierzchni $z^2 = 2xy$ wyciętej płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 1$.

Dom 1. Dokończyć ostatnie zadanie.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 4 kwietnia 2019

Całka wzdłuż krzywej.

Omówienie zadania domowego.

Miara krzywej parametrycznej. Rozważmy krzywą gładką $\gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wówczas długość tej krzywej to

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} 1 \cdot d\sigma^2 := \int_I \|D\gamma(t)\| d\lambda^1(t),$$

gdzie $\|D\gamma(t)\|$ oznacza długość euklidesową różniczki odwzorowania γ w punkcie t . Intuicja jest taka, że wielkość $\|D\gamma(t)\|$ mówi jak bardzo nasza parametryzacja rozciąga albo skraca standardową miarę na $I \subset \mathbb{R}$.

Zadanie 1. Oblicz długość krzywych:

(a) $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \in \mathbb{R}^3$ gdzie $t \in [0, T]$.

(b) opisanej we współrzędnych biegunowych równaniem $r = 1 + \cos \phi$.

Dom 1. Wykaż, że długość krzywej zadanej we współrzędnych biegunowych równaniem $r = r(\phi)$, gdzie $\phi \in [0, 2\pi]$ wynosi

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2} d\phi.$$

Michał Józwickowski, 4 kwietnia 2019.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 28 marca 2019

Całkowalność funkcji

Omówienie zadań domowych.

Stwierdzenie. Twierdzenia o zamianie zmiennych można używać w każdej sytuacji, wystarczy że mamy do czynienia z funkcją mierzalną.

Dowód. Rozważmy $\int_A f(\mathbf{x})d\lambda^n(\mathbf{x})$, gdzie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną określoną na zbiorze mierzalnym $A \subset \mathbb{R}^n$. Rozważmy dyfeomorfizm $\Phi : B \rightarrow A$. Twierdzenie o zamianie zmiennych mówi, że jeśli $f(\mathbf{x})$ jest całkowalna na A , to $f(\Phi(\mathbf{y}))|D\Phi(\mathbf{y})|$ jest całkowalna na B oraz

$$(1) \quad \int_A f(\mathbf{x})d\lambda^n(\mathbf{x}) = \int_B f(\Phi(\mathbf{y}))|D\Phi(\mathbf{y})|d\lambda^n(\mathbf{y}) .$$

Ale, jeśli bez sprawdzenia założenia o całkowalności f okaże się, że $f(\Phi(\mathbf{y}))|D\Phi(\mathbf{y})|$ jest całkowalna na B , to stosując twierdzenie o zamianie zmiennych dla $\Phi^{-1} : A \rightarrow B$ dostaniemy całkowalność $f(\mathbf{x})$ na A i równość (1). Stąd wynika, że całkowalność (niecałkowalność) $f(\mathbf{x})$ na A i całkowalność (niecałkowalność) $f(\Phi(\mathbf{y}))|D\Phi(\mathbf{y})|$ na B są równoważne. \square

Zadanie 1. Rozstrzygnij czy funkcja

$$f(x, y) := \frac{\ln x + \ln y}{x^2 + y^2 + 1} .$$

jest całkowalna na $(\mathbb{R}_+)^2$.

Dom 1. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x, y, z) := \frac{xyz}{\|(x, y, z)\|^\alpha}$ jest całkowalna na kuli jednostkowej $B^3(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^3$.

Dom 2 (Pisemnie na 8 kwietnia). Rozważmy funkcję całkowalną $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Definiujemy

$$F(x) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(tx) f(t) dt .$$

Rozstrzygnij, czy

1. F jest różniczkowalna na $(0, +\infty)$?
2. F jest ciągła na $[0, +\infty)$?
3. F jest całkowalna na $[0, +\infty)$?

Michał Józwickowski, 28 marca 2019.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 25 marca 2019

Własności splotu, całkowalność funkcji.

Omówienie zadania domowego

Zadanie 1. Wykaż, że splot jest łączny, tzn. dla dowolnych $f, g, h \in L(\mathbb{R}^n)$ zachodzi

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

Uwaga. Splot funkcji całkowalnych wykazuje własności operacji mnożenia w grupie przemiennej (jest przemienne i łączny), ale funkcje całkowalne $L^1(\mathbb{R}^n)$ ze splotem nie tworzą grupy, gdyż nie ma funkcji pełniącej rolę elementu neutralnego.

Element neutralny można uzyskać rozszerzając pojęcie splotu na przestrzeń *dystrybucji* (inaczej *funkcji uogólnionych*), jest nim wówczas tak zwana *delta Diraca*. Niemniej jednak również dystrybucje wraz ze splotem nie tworzą grupy, ale ich podzbiór – dystrybucje odwracalne tworzy grupę przemienne.

Zadanie 2. Zdefiniujmy rodzinę funkcji $f_\lambda(x) := \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ dla $\lambda > 0$. Wykaż że dla dowolnej funkcji całkowalnej $g \in L^1(\mathbb{R})$ zachodzi

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|f_\lambda * g - g\|_{L^1} = 0.$$

Wskazówki: (a) $\int_{\mathbb{R}} f_\lambda(x) dx = 1$; (b) Znacznie prościej jest podać dowód dla g jednostajnie ciągłej.

Dom 1. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^\alpha$ jest całkowalna w kuli jednostkowej $B^n(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$. *Wskazówka:* Jeśli odpowiedź dla dowolnego n jest zbyt trudna, można rozpatrzyć $n = 1, 2, 3$.

Dom 2. Rozstrzygnij czy funkcja $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\|(x, y)\|^4}$ jest całkowalna na kwadracie $[0, 1]^2$.

Michał Józwickowski, 25 marca 2019.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 21 marca 2019

Rzucanie przedmiotami w celach naukowych. Definicja i podstawowe własności splotu.

Omówienie zadania domowego.

Zadanie 1. Oblicz moment bezwładności walca $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, |z| < \frac{1}{2}h\}$ o jednorodnej gęstości $\rho = \text{const}$, względem jego osi symetrii.

Przypomnijmy, że splotem funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy funkcję zdefiniowaną wzorem

$$(f * g)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})d\lambda^n(\mathbf{y}) .$$

O wartości $(f * g)(\mathbf{x})$ można myśleć jak o funkcji powstałej przez uśrednianie f wokół \mathbf{x} z gęstością zadaną przez funkcję g .

Generalnie splatanie funkcji całkowlanej f z funkcją „trochę lepiej niż przyzwoitą” g produkuje „funkcję przyzwoitą”. Na przykład:

- Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
- Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ (ciągła klasy C^k o zwartym nośniku), to $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ i ponadto $D_{\mathbf{x}^\alpha}^{| \alpha |}(f * g) = f * (D_{\mathbf{x}^\alpha}^{| \alpha |}g)$, gdzie α jest dowolnym wielowskaźnikiem długości nie większej niż k .
- Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i g ciągła i ograniczona, to $f * g$ jest ciągła.

Zadanie 2. Rozważmy funkcję całkowlaną $f \in L^1(\mathbb{R})$ i zdefiniujmy funkcję $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - t) \frac{\sin t}{t} dt .$$

Wykaż, że F jest:

- a) dobrze określona,
- b) ciągła (jednostajnie),
- c) różniczkowalna.

Dom 1. Wykaż, że jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona, to splot $f * g$ jest funkcją ciągłą.

Michał Józwiowski, 21 marca 2019.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 14 marca 2019

Środek ciężkości i moment bezwładności.

Omówienie zadania domowego.

Zadanie 1. Znaleźć środek ciężkości zbioru $\{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1\}$.

Definicja. *Momentem bezwładności* zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ o gęstości $\rho : A \rightarrow [0, +\infty)$ względem prostej l nazywamy liczbę

$$I_l(A) := \int_A \text{dist}(l, \mathbf{x})^2 \cdot \rho(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}),$$

gdzie $\text{dist}(l, \mathbf{x})$ oznacza odległość punktu \mathbf{x} od osi l .

Zadanie 2. Znaleźć moment bezwładności jednorodnej kuli (o gęstości $\rho = \text{const}$) o promieniu R względem osi przechodzącej przez jej środek.

Zadanie 3. Znaleźć moment bezwładności jednorodnej kuli (o gęstości $\rho = \text{const}$) o promieniu R względem osi odległej o d od jej środka.

Dom 1 (pisemnie na 21 marca). Wyznacz funkcję

$$F(t) = \int_0^1 \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Wskazówka: Całkując wyrażenie zawierające wyraz $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ wygodnie użyć podstawienia $x = \sin \alpha$, zaś całkując wyrażenie wymierne w $\sin^2 \alpha$ podstawienia $w = \tan \alpha$.

Dom 2. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego walca $W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < R^2, |z| < h/2\}$ względem prostej $x = y = z$.

Michał Józwickowski, 14 marca 2018.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 11 marca 2019

Całka Lebesgue'a, całka z parametrem

Dokończenie zadania z poprzednich ćwiczeń.

Zadanie 1. Wyznacz funkcję

$$I(a) := \int_0^{+\infty} \exp\left[-x^2 - a^2 \frac{1}{x^2}\right] dx .$$

Zadanie 2. Niech $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną. Wykaż, że

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{y \cdot f(x)}{x^2 + y^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0) .$$

Definicja. *Położeniem środka masy (ciężkości) zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ o gęstości $\rho : A \rightarrow [0, +\infty)$ nazywamy wektor*

$$\langle \mathbf{r}_\rho(A) \rangle = \frac{1}{M_\rho(A)} \int_A \mathbf{x} \cdot \rho(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) = \frac{1}{M_\rho(A)} \left(\int_A x_1 \cdot \rho(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}), \dots, \int_A x_n \cdot \rho(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) \right) ,$$

gdzie $M_\rho(A) := \int_A \rho(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x})$ jest *masą* zbioru A .

Należy myśleć, że współrzędne $\langle \mathbf{r}_\rho(A) \rangle$ to uśrednione współrzędne punktów zbioru A względem miary z gęstością ρ .

Dom 1. Znaleźć środek ciężkości jednorodnej ($\rho \equiv 1$) półsfery $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z > 0\}$. *Wskazówka:* w zasadzie robiliśmy już to zadanie.

Michał Józwickowski, 11 marca 2019.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 7 marca 2019

Omówienie zadania domowego.

Zadanie 1. Oblicz dla $t > 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \ln(x^2 + t^2) dx \quad \text{i} \quad \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \ln(x^2 + t^2) dx .$$

Zadanie 2. Udowodnij twierdzenie o różniczkowaniu całki z parametrem.

Zadanie 3. Funkcja $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Rozstrzygnij, czy funkcja

$$\int_{x^2+y^2+z^2 \leq t} h(x^2 + y^2 + z^2) d\lambda^3(x, y, z)$$

jest różniczkowalna.

Dom 1. Rozstrzygnij, czy różniczkowalne są funkcje

$$F(x, y) = \int_{A(x, y)} (t - s) d\lambda^2(t, s) \quad \text{oraz} \quad G(x, y) = \int_{A(x, y)} |t - s| d\lambda^2(t, s) ,$$

gdzie $A(x, y) = \{(t, s) \mid 0 < t < x^2, 0 < s < y^2\}$.

Michał Józwickowski, 7 marca 2019.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 28 lutego 2019

Całkowanie funkcji wielu zmiennych, różniczkowanie pod znakiem całki.

Zadanie 1. Oblicz całkę z funkcji z po półsferze $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

Zadanie 2. Oblicz całkę

$$\int_{\{x>0, y>0\}} \frac{xy-1}{y} \exp[-x-2y] d\lambda^2(x, y).$$

W powyższym zadaniu używaliśmy następującego faktu

Lemat. Niech $f, g : \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi i niech dodatkowo g będzie funkcją całkowalną na A . Wówczas funkcja f jest całkowalna na A wtedy i tylko wtedy gdy funkcja $f + g$ jest całkowalna na A .

Dowód. Wynika wprost z nierówności trójkąta

$$\int_A |f| - \int_A |g| \leq \int_A |f+g| \leq \int_A |f| + \int_A |g|.$$

Skoro $\int_A |g|$ jest skończona, to obie wielkości $\int_A |f|$ i $\int_A |f+g|$ są jednocześnie skończone lub jednocześnie nieskończone. \square

Twierdzenie (Różniczkowanie pod znakiem całki). Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym, $I \subset \mathbb{R}$ otwartym podzbiorem prostej \mathbb{R} . Funkcja $f : I \times A \rightarrow \mathbb{R}$ ma następujące własności:

- Dla każdego $t \in I$ funkcja $f(t, \cdot) : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna
- Pochodna $\frac{\partial}{\partial t} f(t, \mathbf{x})$ jest dobrze określona
- Istnieje funkcja całkowalna $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $t \in I$ zachodzi $|\frac{\partial}{\partial t} f(t, \mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$.

Wówczas możemy różniczkować f pod znakiem całki, tzn.

$$\frac{d}{dt} \left[\int_A f(t, \mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) \right] = \int_A \frac{\partial}{\partial t} f(t, \mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}).$$

Zadanie 3. Oblicz całkę

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{1 - \cos tx}{x} dx.$$

Dom 1 (pisemnie na 7 marca). Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \frac{\exp[x^2 + y^2 + z^2]}{n \sin\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{n}\right)} d\lambda^3(x, y, z),$$

gdzie $A = \{(x, y, z) \mid 0 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \sqrt[3]{z}\}$.

Dom 2. Oblicz całkę

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 + \cos^2 x) dx.$$

Wskazówka: Wprowadź dodatkowy parametr do całki. Przydatne mogą być sposoby na całkowanie funkcji wymiernych od funkcji trygonometrycznych.

Michał Józwickowski, 28 lutego 2018.

AM II.2 2018/2019 (grupa 1.), 25 lutego 2019

Całkowanie funkcji wielu zmiennych, podstawienie sferyczne.

Zadanie 1. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| < 1, y > 0\}$. Oblicz całkę

$$\int_A x \exp(-y^2) d\lambda^2(x, y) .$$

Zadanie 2. Kula o promieniu R $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ została przecięta płaszczyzną $\{z = a\}$. Oblicz objętości powstałych części.

Zadanie 3. Oblicz miarę zbioru

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2)\} .$$

Podstawieniem sferycznym nazywamy odwzorowanie (dyfeomorfizm na obraz)

$$\Phi : (r, \phi, \beta) \mapsto (x = r \cos \beta \cos \phi, y = r \cos \beta \sin \phi, z = r \sin \beta)$$

Opisujący punkty przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^3 za pomocą ich odległości od środka układu współrzędnych $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ i tak zwanych kątów Eulera: $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ – kąta, który promień wodzący tworzy z płaszczyzną XY , oraz $\phi \in (0, 2\pi)$ – kąta rzutu pomiędzy rzutem promienia wodzącego na płaszczyznę XY a osią OX . Podstawienia sferycznego wygodnie używać w zadaniach cechujących się symetrią sferyczną.

Zadanie 4. Oblicz Jakobian podstawienia sferycznego.

Michał Józwickowski, 25 lutego 2019.