AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3)– zadania przygotowawcze do I kolokwium

Normy w $\mathbb{R}^n$, iloczyn skalarny

Standardowe typy zadań:

- *sprawdź czy dana funkcja jest normą*
- *sprawdź, czy dany zbiór jest kulą w jakiejś normie i oblicz normę wybranego wektora.*
- *sprawdź czy norma pochodzi od iloczynu skalarnego (tożsamość równoległoboku).*
- *własności iloczynu skalarnego. Porównywanie normy pochodzącej od iloczynu skalarnego z normą euklidesową.*

Zadanie 1. Niech $\|\cdot\|$ będzie normą w $\mathbb{R}^n$, zaś $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izomorfizmem liniowym. Wykaż, że funkcja $F(\boldsymbol{x}) = \|L\boldsymbol{x}\|$ również jest normą w $\mathbb{R}^n$.
Zadanie 2. Czy poniższe funkcje zadają normy w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$. Odpowiedź uzasadnij:

a) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + 5y^3}$.

b) $f(x, y) = \sqrt[5]{5|x|^5 + 2|y|^5}$.

c) $f(x, y, z) = |x| + 2|z|$.

d) $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$.

e) $f(x, y, z) = \sqrt[4]{x^4 + y^4} + |z|$.

Zadanie 3. Niech $\|\cdot\|$ będzie normą w $\mathbb{R}^2$, w której kula jednostkowa jest wielokątem o wierzchołkach $(1, 2)$, $(0, 3)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$, $(0, -3)$ i $(1, -2)$. Oblicz normy wektorów $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(4, 1)$ i $(1, 4)$. Wykaż, że norma $\|\cdot\|$ nie pochodzi od iloczynu skalarnego.
Zadanie 4. Norma $\|\cdot\|_A$ w $\mathbb{R}^2$ pochodzi od iloczynu skalarnego zadanego macierzą $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Oznaczmy przez S zbiór $\{(x, y) \mid |x| = 2 \text{ lub } |y| = 3\}$. Oblicz

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|\boldsymbol{v}\|_A}{\|\boldsymbol{v}\|_2} \quad \text{oraz} \quad \inf_{\boldsymbol{v}\in S} \frac{\|\boldsymbol{v}\|_A}{\|\boldsymbol{v}\|_2}\ .$$

Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych, topologia $\mathbb{R}^n$

Standardowe typy zadań:

- *Oblicz granicę funkcji/sprawdź czy istnieje.*
- *Zbadaj ciągłość (jednostajną) funkcji na zbiorze.*
- *Podaj przykład odpowiednio patologicznej funkcji.*
- *Zbadaj otwartość lub domkniętość zbioru.*
- *Zbadaj spójność i zwartość zbioru.*
- *Wykaż, że dana funkcja przyjmuje konkretne wartości na danym zbiorze (własność Darboux).*

Zadanie 1. Zbadaj istnienie granic funkcji

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^4}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+y^4}{x^4+y^2}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}$

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(\cos x-y^2)}{x^2+2y^2}$

f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln(x^2+2y^2)$

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+y^2}$

Zadanie 2. Rozważmy funkcję

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Oblicz granice $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ oraz $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Zadanie 3. Zbadaj istnienie granicy funkcji $f(x,y) = \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-1}$ w punktach prostej $x+y-1=0$.

Zadanie 4. Zbadaj ciągłość funkcji $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ opisanej wzorem

$$f(x,y,z) = \begin{cases} (\frac{xy}{1+z^2}, \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}) & \text{gdy } (x,y,z) \neq 0., \\ (0,0) & \text{gdy } (x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Zadanie 5. Zbadaj ciągłość jednostajną funkcji $f(x,y) = \sin\frac{1}{|x|}\cos\frac{1}{|y|}$ na zbiorze $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Zadanie 6. Zbadaj ciągłość jednostajną funkcji $f(x,y) = x\sin\frac{1}{y^2}$ na zbiorze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid y=0\}$.

Zadanie 7. Znajdź funkcję $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla której funkcja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3-y^3)e^{x+y}}{x-y} & \text{dla } x \neq y \\ g(x) & \text{dla } x = y \end{cases}$$

jest funkcją ciągłą.
Zadanie 8. Rozważmy funkcję ciągłą $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Załóżmy że istnieją punkty $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ takie, że $f(\boldsymbol{v}) > 0 > f(\boldsymbol{w})$. Wykaż, że f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.
Zadanie 9. Wykaż, że własność Darboux nie zachodzi dla funkcji ciągłych o wartościach w $\mathbb{R}^2$.
Zadanie 10. Wykaż, że zbiór $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > x^2 + y^2\}$ jest wypukły.
Zadanie 11. Zbiór wszystkich rzeczywistych macierzy kwadratowych n-wymiarowych możemy naturalnie utożsamiać z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^{n^2}$. Przez S oznaczmy podzbiór tej przestrzeni tworzony przez macierze iloczynów skalarnych

$$S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ jest macierzą iloczynu skalarnego}\} .$$

Wykaż, że S jest zbiorem otwartym (w przestrzeni wszystkich macierzy symetrycznych) i spójnym.
Zadanie 12. Wykaż, że zbiór wszystkich rzeczywistych n-wymiarowych macierzy odwracalnych jest otwartym i niespójnym podzbiorem $\mathbb{R}^{n^2}$.
Zadanie 13. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wykaż, że zbiór $\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{v}) > 0\}$ jest otwarty. Wywnioskuj stąd, że zbiory $\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{v}) = 0\}$ oraz $\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{v}) \geq 0\}$ są domknięte.
Zadanie 14. Rozstrzygnij, które z poniższych zbiorów są otwarte, domknięte, zwarte, spójne, spójne łukowo.

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 - 4y \geq 1, 9x^2 + 16y^2 \leq 144\}$.

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \geq 0, x + 2y + 3z = 6\}$.

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$.

d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy < 0, x^2 + z^2 < 1\}$.

f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \geq 0, z \geq -6, x + y + 2z \geq 6, x + y + z \leq 6\}$.

Pochodne cząstkowe i kierunkowe, różniczkowalność

Standardowe typy zadań:

- *Oblicz pochodną cząstkową/kierunkową (rachunkowe lub z definicji).*
- *Wskaż odpowiednio patologiczny przykład.*
- *Oblicz gradient/różniczkę funkcji.*
- *Zbadaj różniczkowalność funkcji.*
- *Wyznacz gradient (kierunek najszybszego wzrostu) funkcji.*

Zadanie 1. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji

a) $f(x,y) = |xy|$

b) $f(x,y) = \frac{\sin x}{y}$

c) $f(x,y) = e^x \sin y + e^y \sin(2z) + e^z \sin(3x)$

d) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(\frac{x}{y})$

e) $f(\boldsymbol{v}) = \exp(-\|v\|_2)$, gdzie $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$

Zadanie 2. Wyznaczyć gradient funkcji $f(x,y) = e^{\cos(x^2-y^2)} \ln\left(1 + \sin(\operatorname{tg} \frac{x+y}{2})\right)$ w punkcie (0, 0).

Zadanie 3. Zbadaj różniczkowalność funkcji w punkcie $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0); \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zadanie 4. Zbadaj, w zależności od parametru $p > 0$, różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \ln(1 + |xy|^p)$$

w punkcie $(0,0)$.

Zadanie 5. Funkcja f jest określona na zbiorze $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > -1\}$ wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{y} & \text{dla } y \neq 0 \\ \frac{x}{2} & \text{dla } y = 0 \end{cases}$$

Zbadaj różniczkowalność f w $(0,0)$.

Zadanie 6. Zbadać w których punktach swojej dziedziny funkcja $f(x,y) = |e^x - y| \ln(1+x)$ jest różniczkowalna.

Zadanie 7. Wyznaczyć punkty różniczkowalności funkcji

$$g(x,y,z) = \begin{cases} xyz \exp(\frac{z}{x^2+y^2}) & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zadanie 8. Zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = x\sqrt{|x| + 4 + |y|}\ .$$

Zadanie 9. Oblicz różniczkę odwzorowania walcowego $F : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$f(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)\ .$$

Zadanie 10. Oblicz różniczkę odwzorowania odwrotnego $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jeśli $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane jest wzorem

$$F(x,y) = (e^x + e^3 y, e^{3y})\ .$$

Zadanie 11. Oblicz różniczkę odwzorowania $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ w punkcie $(0,0,0)$ danego wzorem

$$F(x,y,z) = g(e^y + \cos x, e^{\sin z}, e^{x+y}\sin z)\ ,$$

jeśli różniczka $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ w punkcie $(2,1,0)$ zadana jest macierzą

$$D_{(2,1,0)}g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Zadanie 12. Funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ klasy C^1 jest określona na zbiorze $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ i ponadto spełnia w każdym punkcie dziedziny nierówności

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq 1 \quad \text{i} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \leq 1\ .$$

Rozstrzygnij, czy f spełnia warunek Lipschitza (z pewną stałą) w zbiorze P.

Zadanie 13. Funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$\sum_{i=1}^{n} y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{y}) \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } \boldsymbol{y} = (y^1, y^2, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n$$

Wykaż, że f jest ograniczona z dołu przez $f(\mathbf{0})$.

Zadanie 14. Funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y} \leq \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Wykaż, że w każdym zbiorze K, który jest zwarty i wypukły funkcja f osiąga swój kres dolny na brzegu ∂K.

Wskazówka: : Udowodnij, że f jest nierosnąca wzdłuż półprostych $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto (1 + at, 1 + bt)$.

Zadanie 15. Funkcja różniczkowalna $f : U \to \mathbb{R}$ określona na zbiorze $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$ spełnia tożsamość

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 7y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\ .$$

Wykaż, że istnieje funkcja różniczkowalna $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x, y) = g(x^7 y)$.
Wskazówka: Oblicz pochodną funkcji jednej zmiennej $x \mapsto f(x, \frac{c}{x^7})$.
Zadanie 16. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia tożsamość

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0\ .$$

Wykaż, że f jest stała.
Wskazówka: Wykaż, że f jest stała na każdej prostej przechodzącej przez punkt $(0, 0)$.

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Standardowe typy zadań:

- *Wyznaczanie punktów krytycznych funkcji.*
- *Obliczanie kresów funkcji na danym zbiorze (przypadki zwarte i niezwarte).*
- *Obliczanie odległości pomiędzy dwoma zbiorami.*

Zadanie 1. Pokazać, że funkcja $f(x,y) = (x-y^2)(3x-y^2)$ po obcięciu do dowolnej prostej przechodzącej przez $(0,0)$ ma minimum lokalne w $(0,0)$. Czy f ma minimum lokalne w $(0,0)$?
Zadanie 2. Wyznacz kresy funkcji $f(x,y,z) = 6xy - 3xz - 2yz$ na zbiorze $C = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x,y,z \leq 1\}$.
Zadanie 3. Wyznacz kresy funkcji $f(x,y) = x(y-x)e^{-y}$ na zbiorze $T = \{(x,y) \mid -1 \leq 3x \leq 2y \leq 6\}$.
Zadanie 4. Wyznacz kresy funkcji $f(x,y) = \frac{y}{x^2+4y^2+1}$ na $A = \{(x,y) \mid x \geq 0\}$.
Zadanie 5. Na powierzchni $z = xy + 1$ znaleźć punkt położony najbliżej początku układu współrzędnych.
Wskazówka: : Odległość punktu (x,y,z) od początku układu współrzędnych to $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Dla punktów z rozważanej powierzchni można wyrazić tę funkcję za pomocą zmiennych x i y.

Michał Jóźwikowski, 6 listopada 2018.