Egzamin zad 4 – rozwiązanie wzorcowe i zasady oceniania.

Rozważmy podzbiór płaszczyzny $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$, gdzie

$$A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2 \cdot 2^n} < x < y < 2x, xy < \frac{1}{2^{2n}}\} \ .$$

Wykaż, że A jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a i oblicz jego miarę.
Wskazówka: Policz miarę (uzasadniając mierzalność) zbioru $B(a) = \{(x, y) \mid \frac{1}{2a} < x < y < 2x, xy < \frac{1}{a^2}\}$, a następnie zbadaj miarę zbiorów $A_i \cap A_j$ i skorzystaj z odpowiedniej własności miary.

Zasady oceniania

Do zdobycia było 15 punktów. Oceniając zadania przyjąłem następujące kryteria:

- do 3 punktów za wykazanie mierzalności A.
- do 7 punktów za obliczenie miary $\lambda_2(B(a))$.
- do 5 punktów za obliczenie miary $\lambda_2(A)$ (w tym obserwacja $A_j = B(2^j)$ – 1 punkt, rozłączność zbiorów A_i z uzasadnieniem – 2 punkty, powołanie się na przeliczalną addytywność miary – 2 punkty).

Punkty można było stracić za:

- wadliwe argumenty dotyczące mierzalności (do 3 punktów), w tym brak rozstrzygnięcia mierzalności A (bardzo częsty błąd, mimo, że było to jednym z poleceń w zadaniu)
- użycie tw. Fubini'ego bez uzasadnienia (1 punkt)
- policzenie niewłaściwej całki (zmierzenie niewłaściwego zbioru) (do 6 punktów)
- stwierdzenie rozłączności A_i bez należytego uzasadnienia (do 2 punktów)
- błędy rachunkowe – podchodziłem dość łagodnie, jeśli rozumowanie było prawidłowe.

Rozwiązanie wzorcowe (szkic)

Zauważmy, że $A_i = B(2^i)$. Każdy ze zbiorów $B(a)$ jest otwarty, jako przecięcie skończonej liczby zbiorów otwartych (zadanych przez ostre nierówności między funkcjami ciągłymi). Wobec tego A też jest otwarty jako suma przeliczalnej (ale to nie jest konieczne!) rodziny zbiorów otwartych, a więc w szczególności jest też mierzalny.

Policzmy miarę zbioru $B(a) = \{(x, y) \mid \frac{1}{2a} < x < y < 2x, xy < \frac{1}{a^2}\}$. Łatwo zauważyć, że powyższy zbiór możemy rozbić na dwa mierzalne kawałki, zależnie od tego czy $2x$ czy $\frac{1}{xa^2}$ jest mocniejszym ograniczeniem górnym na y (zob. rysunkek). Mamy:

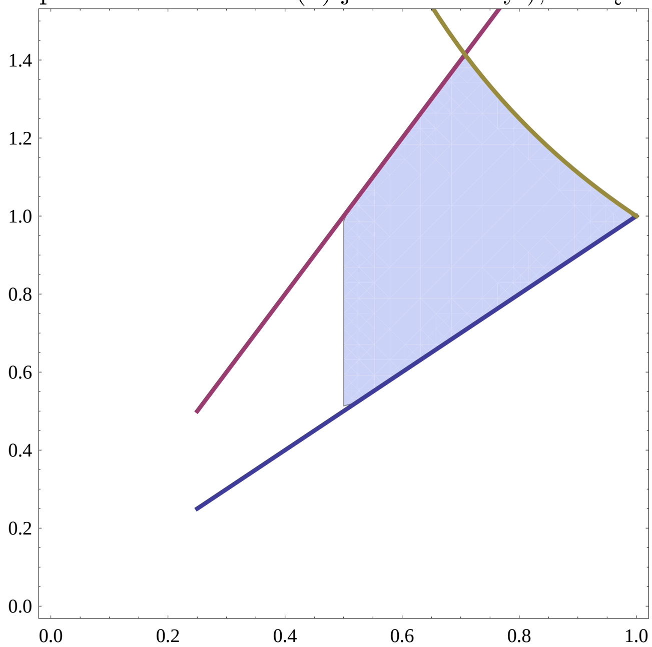
$$B(a) = \{(x, y) \mid x \in (\frac{1}{2a}, \frac{1}{\sqrt{2}a}], y \in (x, 2x)\} \cup \{(x, y) \mid x \in (\frac{1}{\sqrt{2}a}, \frac{1}{a}), y \in (x, \frac{1}{xa^2})\} \ .$$

Wobec czego z addytywności całki:

$$\lambda_2(B(a)) = \int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{\sqrt{2}a}} \left(\int_x^{2x} 1\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}a}}^{\frac{1}{a}} \left(\int_x^{\frac{1}{xa^2}} 1\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$\int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{\sqrt{2}a}} x\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}a}}^{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{xa^2} - x\right)\mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{a^2}\left[\ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{8}\right] .$$

Dobrze uzasadnić, dlaczego w powyższym rachunku mogliśmy skorzystać z tw. Fubini'ego: na każdym z kawałków zbioru $B(a)$ funkcja 1 jest nieujemna i mierzalna (bo odpowiedni kawałek $B(a)$ jest mierzalny!), a więc spełnia założenia tw. Fubini'ego.



Zauważmy, że zbiory A_n są parami rozłączne. Istotnie, jeśli $(x, y) \in B(a)$ to $x \in (\frac{1}{2a}, \frac{1}{a})$, a zatem warunke $(x, y) \in A_n$ implikuje $x \in (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n})$. Odcinki tej postaci są oczywiście parami rozłączne dla różnych n, a więc także zbiory A_n są parami rozłączne. Teraz z przeliczalnej addytywności miary mamy

$$\lambda_2(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_2(A_n) = \left(\ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{8}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \left(\ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{8}\right).$$

Michał Jóźwikowski, 30 stycznia 2019.