Zadania gwiazdką (aktualizacja: 21 grudnia 2018)

Zadanie 1. (∗/2) Udowodnij, że dla dowolnego $p \in (1, +\infty)$ funkcja $\| \cdot \|_p$ jest normą.
Wskazówka: skorzystaj z nierówności Höldera i z faktu, że dla wykładników sprzężonych p, q zachodzi $p = q(p-1)$.
Zadanie 2. (∗) Udowodnij, że jeśli norma $\| \cdot \|$ spełnia, dla dowolnych $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, tożsamość

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{y}\|^2 \ .$$

To pochodzi od pewnego iloczynu skalarnego.
Zadanie 3. (∗) Funkcja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest ciągła „po współrzędnych" oraz rosnąca względem pierwszej zmiennej (tzn. $\forall_{y_0}$ funkcja $x \mapsto F(x, y_0)$ jest ciągła i rosnąca, oraz $\forall_{x_0}$ funkcja $y \mapsto F(x_0, y)$ jest ciągła). Wykaż, że F jest ciągła.
Zadanie 4. (∗/2) (gr. 3) Funkcja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma granicę w $(x, y) = (0, 0)$. Wykaż, że jeśli granice $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} F(x, y)$ oraz $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} F(x, y)$ istnieją to

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} F(x,y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} F(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) \ .$$

Definicja. Podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *obszarem*, gdy jest otwarty i spójny.
Z wykładu wiadomo, że każdy zbiór otwarty i spójny w $\mathbb{R}^n$ jest też spójny łukowo.

Zadanie 5. (∗/2) Niech $A \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem wypukłym. Wykaż, że jeśli funkcja ciągła $f : A \to \mathbb{R}$ ma ograniczone pochodne cząstkowe w całej dziedzinie, to spełnia warunke Lipschitza. Wykaż, że teza nie jest prawdziwa bez założenia o wypukłości A.
Zadanie 6. (∗) Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą (tzn. dla dowolnych $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$ i dowolnego $\lambda \in [0, 1]$ zachodzi nierówność $f(\lambda\boldsymbol{v} + (1-\lambda)\boldsymbol{w}) \leq \lambda f(\boldsymbol{v}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{w})$). Wykaż, że f jest funkcją ciągłą.
Zadanie 7. (∗/2) Podać przykład funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach:

- f jest różniczkowalana w $\mathbb{R}^2$
- f ma dokładnie jeden punkt krytyczny (lokalne ekstremum)
- f jest nieograniczona z góry i z dołu.

Zadanie 8. (∗∗) Funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spełnia tożsamości

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - y\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + x\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \ .$$

Wykaż, że f jest stała.
Podaj przykład niestałej funkcji dwukrotnie różniczkowalnej, która spełnia tożsamości (w pierwszej tożsamości zmieniamy znak)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + x\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \ .$$

Zadanie 9. $(*)$ Wykaż, że wnętrze dowolnego wielokąta wypukłego jest dyfeomorficzne z $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 10. $(**)$ Wykaż, że dowolny obszar wypukły jest dyfeomorficzny z $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 11. $(*)$ Niech $K \subset \mathbb{R}^2$ będzie zwartym zbiorem wypukłym. Wykaż, że funkcja $F : \mathbb{R}^2 \setminus K \to \mathbb{R}$ opisująca odległość punktów zewnętrznych K od K, tzn. $f(\boldsymbol{v}) = \operatorname{dist}(\boldsymbol{v}, K)$ jest różniczkowalna. Wykaż, że zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus K$ jest dyfeomorficzny z $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Zadanie 12. $(*)$ Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ będzie odwzorowaniem klasy C^1 takim, że rząd różniczki $D_{\boldsymbol{p}}F$ jest równy n w każdym punkcie $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$. Wykaż, że dla każdego $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ istnieje otoczenie $U \ni \boldsymbol{p}$ w $\mathbb{R}^n$ takie, że $F(U)$ jest n-wymiarową rozmaitością. Czy $F(\mathbb{R}^n)$ musi być rozmaitością.

Odwzorowanie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ o maksymalnym rzędzie różniczki nazywamy immersją. *Obraz immersji nazywamy podrozmaitością immersyjną.*

Zadanie 13. $(*)$ Niech $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ będzie rozmaitością n-wymiarową. Wykaż, że dla każdego $\boldsymbol{p} \in M$ istnieje otoczenie $U \ni \boldsymbol{p}$ w $\mathbb{R}^{n+k}$ takie, że zbiór $M \cap U$ można opisać jako zerową poziomicę pewnego odwzorowania $F : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$, którego różniczka $D_{\boldsymbol{p}}F$ jest odwzorowaniem liniowym rzędu n. Wywnioskuj stąd, że obraz rozmaitości przy dyfeomorfiźmie jest rozmaitością.

A zatem oba znane nam opisy rozmaitości: jako lokalny wykres funkcji i jako poziomica niezdegenerowanego odwzorowania są lokalnie równoważne.

Zadanie 14. $(*)$ Rozważmy liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ i liczbę naturalną $k \leq n$. Zdefiniujmy k-tą średnią MacLaurin'a z liczb $x_1, \ldots, x_n$ wzorem

$$ML_k(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}}{\binom{n}{k}} \right)^{1/k} .$$

Wykaż, że zachodzi następujące uogólnienie nierówności średnich

$$ML_1(x_1, \ldots, x_n) \geq ML_2(x_1, \ldots, x_n) \geq \ldots \geq ML_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \geq ML_n(x_1, \ldots, x_n) .$$

Michał Jóźwikowski, 21 grudnia 2018.