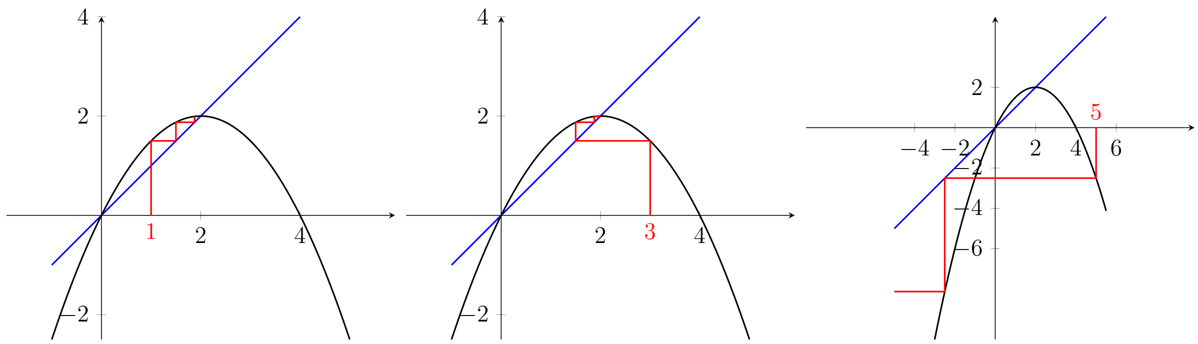
O ZADANIU V.5 ORAZ ZADANIU 9 Z KOLOKWIUM 6.12.2019

Zadanie V.5. W zależności od wartości początkowego wyrazu a_1 zbadać monotoniczność i zbieżność ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie wzorem $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n^2 + 2a_n$:

a) $a_1 = 1$
b) $a_1 = 3$
c) $a_1 = 5$



Graficzna analiza problemu. Oznaczmy funkcję $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$. Na każdym z wykresów znajduje się wykres funkcji $f(x)$ (na czarno) oraz prosta $y = x$ (na niebiesko). Ponadto na czerwono zilustrowano każdy z ciągów, rysując łamaną o wierzchołkach $(a_1, 0)$, (a_1, a_2), (a_2, a_2), (a_2, a_3), ... Łamaną taką latwo rysować odręcznie, jeśli tylko czarna i niebieska krzywa są dane (to jest główny powód, dla którego zaznaczyliśmy prostą $y = x$).

Z wykresów łatwo odczytać odpowiedzi na zadane pytania:

a) Dla $a_1 = 1$ ciąg jest rosnący i zbieżny do 2.
b) Dla $a_1 = 3$ ciąg jest rosnący począwszy od wyrazu $a_2 = \frac{3}{2}$, i zbieżny do 2. W ogólności nie jest rosnący, gdyż $a_2 < a_1$.
c) Dla $a_1 = 5$ ciąg jest malejący i rozbieżny do $-\infty$.

Pozostaje ściśle wykazać, że tak rzeczywiście jest. Ale i tutaj wykresy mogą nam podpowiedzieć, czego dowodzić.

Date: 15 listopada 2024.

Własności funkcji $f(x)$, których potrzebujemy. Okazuje się, że całą obliczeniową trudność dowodu można zawrzeć w następujących obserwacjach:

1) Dla $0 < x < 2$ zachodzi $0 < x < f(x) < 2$.
2) Dla $2 < x < 4$ zachodzi $0 < f(x) < 2$.
3) Dla $x > 5$ zachodzi $f(x) < 0$.
4) Dla $x < 0$ zachodzi $f(x) < x < 0$.
5) Jedynymi rozwiązaniami równania $x = f(x)$ są $x = 0$ i $x = 2$.

Dowód każdej z nich jest łatwy i bezpośredni, więc go pominę.

Ścisłe rozwiązanie. Zacznijmy od obserwacji – wspólnej dla wszystkich podpunktów – że jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, czyli $a_n \to g$ dla pewnego $g \in \mathbb{R}$, to

$$g \xleftarrow{n\to\infty} \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n^2 + 2a_n \quad \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{1}{2}g^2 + 2g.$$

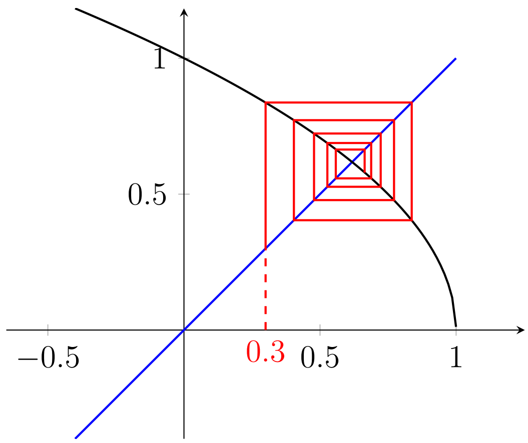
Wniosek stąd taki, że g spełnia równanie $g = f(g)$, czyli $g = 0$ lub $g = 1$. Wiemy, więc, jakie są możliwe granice, trzeba tylko wykazać zbieżność i rozstrzygnąć, która z dwóch liczb jest granicą. Warto odnotować, że podobną obserwację można poczynić zawsze wtedy, gdy funkcja f jest ciągła, czyli gdy z $a_n \to g$ wynika $f(a_n) \to f(g)$.

Rozważmy teraz poszczególne przypadki:

a) Dla $a_1 = 1$ indukcyjnie możemy wykazać, że dla wszystkich n zachodzi $0 < a_n < a_{n+1} < 2$ (zob. punkt 1)). To oznacza, że ciąg (a_n) jest rosnący oraz ograniczony z góry (przez 2), a w konsekwencji zbieżny. Jego wszystkie wyrazy są większe lub równe $a_1 = 1$, a więc granicą nie może być 0. Wniosek $a_n \to 2$.
b) Dla $a_1 = 3$ mamy $a_2 = \frac{3}{2}$, co leży pomiędzy 0 i 2, więc dla dalszych wyrazów stosuje się rozumowanie z punktu a)
c) Dla $a_1 = 5$ mamy $a_2 = -\frac{5}{2}$, co jest mniejsze od zera. Dla $n \geqslant 2$ możemy więc indukcyjnie wykazać, że $a_{n+1} < a_n < 0$ (zob. punkt 4)). Wniosek: ciąg (a_n) jest malejący i rozbieżny do $-\infty$.

Widać, że takie samo rozumowanie przeprowadzilibyśmy w przypadku dowolnego wyrazu początkowego: a) $0 < a_1 < 2$, b) $2 < a_1 < 4$, c) $a_1 > 5$ (wówczas powołalibyśmy się na punkty 2) i 3)). Do tego należy dodać przypadek $a_1 < 0$, w którym ciąg również maleje do $-\infty$. Wreszcie pozostają przypadki $a_1 = 0$, $a_1 = 2$, $a_1 = 4$, które są wyjątkowo łatwe do analizy. Warto odnotować, że jedynie $a_1 = 0$ i $a_1 = 4$ prowadzą do granicy 0.

Zadanie 9 z kolokwium 6.12.2019. Dany jest ciąg spełniający rekurencję $x_{n+1} = \sqrt{1 - x_n}$. Zbadać jego zbieżność w zależności od wartości wyrazu początkowego $x_1 \in [0, 1]$.



Krótka analiza. Powyżej zilustrowano, co dzieje się dla $x_1 = 0{,}3$, ale podobnie jest dla wszystkich $x_1 \in [0, 1]$ z wyjątkiem trzech szczególnych wartości: 0, 1 oraz $\varphi := \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$, które łatwo rozważyć osobno. Jak widać, ciąg (x_n) zbiega do φ, ale nie w sposób monotoniczny, bo jego wartości są na przemian mniejsze i większe od φ. Monotoniczne są już za to podciągi x_{2n} i x_{2n-1}. Podpowiada nam to, jakich własności funkcji $f(x) := \sqrt{1 - x}$ będziemy potrzebowali:

1) Funkcja f przeprowadza przedział $(0, \varphi)$ w przedział $(\varphi, 1)$ i vice versa.
2) Dla $0 < x < \varphi$ zachodzi $0 < x < f(f(x)) < \varphi$.
3) Dla $\varphi < x < 1$ zachodzi $\varphi < f(f(x)) < x < 1$.
4) Jedynymi rozwiązaniami równania $x = f(x)$ są $x = 0$, $x = \varphi$ i $x = 1$.

W przypadku $0 < x_1 < \varphi$ (jak na ilustracji) pozwala to wykazać indukcyjnie, że ciąg $x_1, x_3, x_5, \dots$ jest rosnący i zbieżny do φ, a ciąg $x_2, x_4, x_6, \dots$ malejący i zbieżny do φ. W przypadku $\varphi < x_1 < 1$ jest analogicznie; zmienia się jedynie parzystość.

Dla $x_1 = \varphi$ ciąg jest stale równy φ. Przypadku $x_1 = 0$ i $x_1 = 1$ są wyjątkowe, bo dla nich ciąg nie jest zbieżny, tylko oscyluje między 0 i 1.