O ZADANIU III.21

Zadanie III.21. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}\,.$$

Poniżej skupię się na strategiach pozwalających wykorzystać w dowodzie powyższej nierówności indukcję matematyczną. Jedna z uczestniczek zajęć zwróciła mi jednak uwagę, że możliwy jest dowód wprost, i to niezwykle elegancki – ten opisuję na końcu.

Próba dowodu indukcyjnego. Dla $n = 1$ nierówność ma postać $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, co łatwo bezpośrednio sprawdzić. Jeśli przyjmiemy nierówność $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$ za założenie indukcyjne, to należy wykazać

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Wykorzystując założenie indukcyjne do oszacowania iloczynu wszystkich wyrazów poza ostatnim, sprowadzamy problem do nierówności $\frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$. Przekształćmy tę nierówność równoważnie:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} &< \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \\
(2n+1) &< \sqrt{2n} \cdot \sqrt{2n+2} \\
(2n+1)^2 &< 2n \cdot (2n+2) \\
(2n+1)^2 &< (2n+1)^2 - 1^2 \\
0 &< -1.
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy jednak nieprawdę, co oznacza, że próba dowodu indukcyjnego nie powiodła się.

Wyjaśnienie porażki i dalsze próby indukcyjne. Otrzymanie sprzeczności powyżej **nie oznacza**, że teza indukcyjna jest nieprawdziwa. Wręcz przeciwnie, łatwo sprawdzić bezpośrednio, że nierówność jest spełniona np. dla $n = 2$ i $n = 3$. Nasza porażka oznacza jedynie, że wybrana droga do dowodu nie jest właściwa. Jedną z możliwych strategii w takiej sytuacji jest wykazanie innej, mocniejszej nierówności, z której wynikałaby ta wyjściowa. Wbrew pozorom mocniejsza nierówność może się okazać bardziej podatna na metodę indukcyjną.

Date: 23 października 2024.

Najprostszym sposobem na znalezienie takiej nierówności jest modyfikacja prawej strony nierówności. Proponuję czytelnikowi, żeby samodzielnie rozważył każdą z poniższych propozycji:

a) $\ldots \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$
b) $\ldots \leqslant \frac{1}{\sqrt{4n}}$
c) $\ldots \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Pierwszą z propozycji można od razu odrzucić, bo liczba $\frac{1}{\sqrt{n}}$ jest *większa* od $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ – nawet jeśli dowiedziemy takiej nierówności, to nie możemy stąd wywnioskować tezy zadania. Druga propozycja nie poddaje się indukcji, można ją też zresztą odrzucić już na starcie, sprawdzając nierówność dla małych wartości n (dla $n = 2$ mielibyśmy $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} < \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 2}}$, co nie jest prawdą). Trzecia opcja okazuje się trafiona – dowód indukcyjny w tym przypadku nie sprawia problemów. Warto samodzielnie uzupełnić szczegóły; tutaj podam tylko dowód nierówności pozwalającej łatwo wykonać krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} &< \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \\ \sqrt{2n+1} \cdot \sqrt{2n+3} &\leqslant (2n+2) \\ (2n+1) \cdot (2n+3) &< (2n+2)^2 \\ (2n+2)^2 - 1^2 &< (2n+2)^2 \\ -1 &< 0 \end{aligned}$$

Dowód nieindukcyjny. Ustalmy liczbę naturalną n i rozważmy następujące dwie liczby:

$$A := \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n},$$
$$B := \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

Zacznijmy od porównania powyższych iloczynów wyraz po wyrazie. Dla każdego $k = 1, 2, \ldots$ mamy

$$\frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} < 1 - \frac{1}{k+2} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Po skorzystaniu z takich nierówności dla $k = 1, 3, \ldots, 2n-1$ otrzymujemy $A < B$. Tę nierówność możemy pomnożyć stronami przez B, co daje

$$A^2 < A \cdot B = \left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \right) \cdot \left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\cancel{2n-1}}{\cancel{2n}} \cdot \frac{\cancel{2n}}{2n+1} \right) = \frac{1}{2n+1}.$$

Po wzięciu pierwiastka z obu stron otrzymujemy nierówność $A < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, która jest nawet nieco mocniejsza niż ta z treści zadania.