O ZADANIU I.22

Zadanie I.22. Oblicz:

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}.$$

Przedstawię dwa różne sposoby (A i B) rozwiązania tego zadania. Sposób A sprawia wrażenie ogólniejszego – wydaje się, że może działać w innych podobnych przypadkach, podczas gdy B nie daje takiej gwarancji. Przekonamy się jednak, że oba sposoby mają ten sam zakres zastosowania. Myślę, że ze względu na użycie różnorodnych technik (wzory skróconego mnożenia, wzory Viète'a) jest to całkiem pouczające rozumowanie.

Sposób A. Wprowadźmy pewne oznaczenia:

$$\begin{aligned} a &:= \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}, \\ b &:= \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}, \\ x &:= a+b = \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Zacznijmy od wyznaczenia różnych wartości, które pozwalają się wyrazić w prostszy sposób:

$$\begin{aligned} a^3 &= 26+15\sqrt{3}, \\ b^3 &= 26-15\sqrt{3}, \\ a^3+b^3 &= 52, \\ a\cdot b &= \sqrt[3]{(26+15\sqrt{3})\cdot(26-15\sqrt{3})} \\ &= \sqrt[3]{26^2-15^2\cdot 3} = \sqrt[3]{1} = 1. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, wyznaczymy teraz wartość a^3+b^3 poprzez wartości $x=a+b$ oraz ab:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)((a+b)^2-3ab).$$

Podstawiając znane wartości, otrzymujemy następujące równanie na x:

$$52 = x(x^2-3).$$

Date: 21 października 2024.

Na początek możemy szukać pierwiastków wymiernych – zgodnie z twierdzeniem należy szukać ich wśród dzielników liczby 52 (jako że współczynnik przy x^3 wynosi 1). Łatwo odnajdujemy $x = 4$, a następnie zapisujemy równanie jako

$$0 = x^3 - 3x - 52 = (x-4)(x^2 + 4x + 13).$$

Wielomian kwadratowy $x^2 + 4x + 13$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, gdyż jego wyróżnik jest ujemny (wynosi -36). Ostatecznie wnioskujemy więc, że szukaną wartością wyrażenia jest $x = 4$.

Sposób B. Znajdziemy liczby całkowite c, d, dla których zachodzi równość

$$(c + d\sqrt{3})^3 = 26 + 15\sqrt{3}.$$

Jeśli tylko nam się to uda, to zachodzi również analogiczna równość

$$(c - d\sqrt{3})^3 = 26 - 15\sqrt{3},$$

co pozwala obliczyć

$$\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = (c + d\sqrt{3}) + (c - d\sqrt{3}) = 2c.$$

Do dzieła! Rozwińmy $(c + d\sqrt{3})^3$ w oparciu o wzór $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$:

$$(c + d\sqrt{3})^3 = c^3 + 3c^2 \cdot d\sqrt{3} + 3c \cdot 3d^2 + 3d^3\sqrt{3} = (c^3 + 9cd^2) + (3c^2d + 3d^3)\sqrt{3}.$$

Jeśli ma zachodzić żądana równość, to muszą się zgadzać odpowiednie współczynniki:

$$\begin{cases} c^3 + 9cd^2 = 26, \\ 3c^2d + 3d^3 = 15. \end{cases}$$

Rozwiązanie łatwo znaleźlibyśmy, przeszukując wszystkie możliwe wartości c i d, poczynając od najmniejszych. W tym przypadku możemy jednak przepisać drugie z równań w postaci $d(c^2 + d^2) = 5$. Jeśli $c, d \geqslant 1$, to jedyną możliwością jest $d = 1$ oraz $c^2 + d^2 = 5$, co prowadzi do $c = 2$. Widzimy, że pierwsze równanie również jest wtedy spełnione. Ostatecznie więc

$$\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4.$$

Wątpliwości wobec sposobu B i ich rozwianie. Jak widać, rozwiązanie sposobem B jest krótsze i koncepcyjnie łatwiejsze. Możemy sobie jednak wyobrazić podobne zadanie z innymi danymi liczbowymi, w którym szukane c, d po prostu nie istnieją, a sposób A nadal prowadzi do wyniku. Wydaje się możliwe, że żaden z dwóch pierwiastków trzeciego stopnia nie daje się sprowadzić do prostszej postaci (jak $2 \pm \sqrt{3}$ powyżej), a nadal ich suma jest liczbą całkowitą – wówczas jedynie sposób A prowadziłby do celu. Przekonamy się teraz, że tak nie jest.

W tym celu wróćmy do oznaczeń z ze sposobu A. Idąc za tym sposobem, nie wyznaczaliśmy bezpośrednio wartości a i b (czyli owych pierwiastków trzeciego stopnia), a jedynie ich sumy $a + b = 4$. Wyprowadziliśmy za to równość $ab = 1$, a to już pozwala wywnioskować, że a, b są pierwiastkami równania kwadratowego

$$0 = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - 4x + 1.$$

Korzystając ze znanego wzoru na pierwiastki, otrzymujemy najpierw wyróznik $\Delta = 12$, a następnie pierwiastki:

$$a = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}, \quad b = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

To rozumowanie pokazuje, że jeśli tylko sposób A daje się zastosować (tzn. otrzymujemy całkowite wartości dla ab, a następnie dla $a + b$), to sposób B również działa – istnieją stosowne wartości c, d.

Przykład ku przestrodze. Rozważmy podobne zadanie polegające na wyznaczeniu wartości wyrażenia

$$\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}.$$

Próba naiwnego zastosowania sposobu B kończy się niepowodzeniem – równość $(c+d\sqrt{5})^3 = 9 + 4\sqrt{5}$ prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} c(c^2 + 15d^2) = 9, \\ d(3c^2 + 5d^2) = 4, \end{cases}$$

który nie ma rozwiązań w niezerowych liczbach całkowitych – wystarczy odnotować, że $c^2 + 15d^2$ miałoby być dzielnikiem 9. Tymczasem sposób A można przeprowadzić bez przeszkód. Utrzymując poprzednie oznaczenia, otrzymujemy $a^3 + b^3 = 18$, $ab = 1$, więc dla $x = a + b$ otrzymujemy równanie $18 = x(x^2 - 3)$, które posiada jedno rozwiązanie $x = 3$.

Gdzie jest haczyk? Otóż wyznaczmy a i b jak poprzednio: są to pierwiastki równania kwadratowego $x^2 - 3x + 1 = 0$, a więc

$$a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Wzór na pierwiastki równania kwadratowego uwzględnia dzielenie przez 2 i to był jedyny powód, dla którego sposób B nas zawiódł. Oczywiście nie trzeba wiele, żeby poprawić sytuację – wystarczy zmienić ansatz na

$$\left(\frac{c + d\sqrt{4}}{2}\right)^3 = 9 + 4\sqrt{5},$$

a całą resztę rozwiązania możemy przeprowadzić sposobem B bez zmian.