Zadanie 2a z egzaminu AM I WNE

Michał Miśkiewicz

30 stycznia 2025

Zadanie 2. (a) Wyjaśnić, dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zbieżny jest szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}.$$

Celem tej notatki jest omówienie tego zadania, a więc:

- Przedstawienie różnych możliwych rozwiązań
- Wskazanie, skąd wziąć pomysł na rozwiązanie (zwłaszcza przy rozważaniu przypadków brzegowych)
- Omówienie pewnych popularnych błędów i ślepych zaułków

Znalezienie promienia zbieżności

Wprowadźmy oznaczenie

$$a_n := \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)};$$

w zadaniu mamy wtedy do czynienia z szeregiem potęgowym $\sum a_n x^n$. W ogólności promień zbieżności R jest dany wzorem Cauchy'ego–Hadamarda $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Wiadomo przy tym, że jeśli któryś z ciągów $\sqrt[n]{|a_n|}$ lub $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ jest zbieżny, to jego granicą również jest $1/R$.

Sposób A. Skorzystamy z tego drugiego wzoru. Wyznaczamy:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!} = \frac{n+1}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Promień zbieżności wynosi więc $R = 2$. W ten sposób dowiedzieliśmy się, że szereg jest zbieżny dla $x \in (-2, 2)$ i rozbieżny dla $x \notin [2, 2]$. Pozostaje zbadać przypadki $x = \pm 2$.

Sposób B. Skorzystamy z pierwszego wzoru. Jest to nieco trudniejsze i będzie wymagało skorzystania ze znajomości asymptotycznej równości $\sqrt[n]{n!} \sim n/e$, czyli tak naprawdę granicy $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$. Przydatne będzie też zapisanie mianownika w innej postaci:

$$1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}.$$

W ostatnim przejściu z każdego czynnika w mianowniku „wyjęliśmy" dwójkę, w ten sposób uzyskując iloczyn definiujący $n!$ przemnożony przez odpowiednią potęgę dwójki. Otrzymaliśmy zatem nową postać ciągu a_n: $\frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$. Wyznaczamy:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{2^n} \cdot \sqrt[n]{(n!)^2}}{\sqrt[n]{(2n)!}} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[2n]{(2n)!}} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt[n]{n!}/n}{\sqrt[2n]{(2n)!}/2n} \right)^2 \cdot \frac{n^2}{(2n)^2} \xrightarrow{n \to \infty} 2 \cdot \left(\frac{1/e}{1/e} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Stąd oczywiście wniosek ten sam co poprzednio.

Rozważenie przypadków brzegowych

Pozostaje zbadać zbieżność szeregu dla $x = \pm 2$, czyli zbieżność szeregów $\sum 2^n \cdot a_n$ oraz $\sum (-2)^n a_n$. Wykażemy, że ciąg $2^n \cdot a_n$ nie zbiega do zera, co wykluczy zbieżność któregokolwiek z tych dwóch szeregów. W konsekwencji szereg zadania jest zbieżny dokładnie dla x z przedziału otwartego $(-2, 2)$ i żadnych innych. Ale jak do tego dojść? Sposobów jest kilka.

Sposób C (kontynuacja sposobu B). Otrzymany w ramach rozwiązania wzór $a_n = \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$ może przywołać skojarzenia z symbolem Newtona, konkretnie z $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$. Idąc tym tropem, otrzymujemy

$$2^n \cdot a_n = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}.$$

Przypomnijmy teraz, że zbiór $2n$-elementowy ma 2^{2n} podzbiorów, przy czym spośród nich symbol Newtona $\binom{2n}{n}$ zlicza te n-elementowe. Lub alternatywnie: że suma wyrazów $2n$-tego rzędu trójkąta Pascala wynosi 2^{2n}. W obu przypadkach wnioskujemy, że $\binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$, a więc $a_n \geqslant 1$. To kończy dowód $a_n \not\to 0$.

Sposób D (kontynuacja sposobu A). Przywołajmy rachunek $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+1}$. Wynika z niego, że

$$\frac{2^{n+1} \cdot a_{n+1}}{2^n \cdot a_n} = 2 \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+2}{2n+1}.$$

Oczywiście granicą tego wyrażenia jest 1, więc kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga zbieżności szeregu $\sum 2^n \cdot a_n$ (zob. uwagi na temat błędów i ślepych zaułków). Widać za to, że $\frac{2^{n+1} \cdot a_{n+1}}{2^n \cdot a_n} > 1$, a więc ciąg $2^n a_n$ jest rosnący. To oczywiście wyklucza zbieżność tego ciągu do zera, bo daje dolne ograniczenie $a_n \geqslant a_1 = 1$.

Sposób E (próba zastosowania kryterium Leibniza). Szereg $\sum(-2)^n a_n$ można przedstawić w postaci $\sum(-1)^n b_n$, gdzie oczywiście $b_n = 2^n \cdot a_n$. Naturalnym pomysłem na zbadanie zbieżności jest sprawdzenie, czy spełnione są założenia kryterium Leibniza. W szczególności należy sprawdzić, czy ciąg $2^n \cdot a_n$ jest nierosnący. Sprawdźmy:

$$
\begin{aligned}
& 2^{n+1} \cdot a_{n+1} \leqslant 2^n \cdot a_n \\
\iff \quad & 2^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} \leqslant 2^n \cdot \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \\
\iff \quad & 2 \cdot \frac{n+1}{2n+1} \leqslant 1 \\
\iff \quad & 2n+2 \leqslant 2n+1
\end{aligned}
$$

Jak widać, nie jest to prawda dla żadnego n. Można skonkludować, że kryterium Leibniza zwyczajnie się tutaj nie stosuje. Ale można też odnotować, że tak naprawdę wykazaliśmy przeciwną monotoniczność: ciąg $2^n \cdot a_n$ jest rosnący! Tak jak w sposobie D, prowadzi to do konkluzji, że $a_n \geqslant 1$.

Sposób F (zastosowanie wzoru Stirlinga). Umieszczam to głównie jako ciekawostkę, choć niektórzy z piszących ten wzór znali. Korzystając z asymptotycznej równości $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ (znanej jako wzór Stirlinga) oraz postaci $a_n = \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$ (zob. sposób B), otrzymujemy

$$2^n \cdot a_n = 2^{2n} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim 2^{2n} \cdot \frac{2\pi n \cdot (n/e)^{2n}}{\sqrt{2\pi \cdot 2n}(2n/e)^{2n}} = \sqrt{\pi n}.$$

Stąd możemy wywnioskować nie tylko rozbieżność $2^n \cdot a_n \to \infty$, ale również tempo tej rozbieżności.

Popularne błędy i ślepe zaułki

Kryterium d'Alemberta nie działa. Wiele osób sprawdzało zbieżność szeregów $\sum(\pm 2)^n a_n$ za pomocą kryterium d'Alemberta i otrzymywało granicę 1, co nie pozwala rozstrzygnąć zbieżności. To oczywiście nie jest błąd, ale warto zwrócić uwagę, że wysiłek ten był z góry skazany na porażkę: kryterium d'Alemberta **nigdy nie działa** na brzegu przedziału zbieżności. Mianowicie, jeśli $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to g$, to za promień zbieżności przyjmujemy $R = 1/g$, a następnie w ramach przypadków brzegowych badamy zbieżność szeregów $\sum(\pm R)^n a_n$. Kryterium d'Alemberta prowadzi wtedy do badania granicy:

$$\left|\frac{(\pm R)^{n+1} a_{n+1}}{(\pm R)^n a_n}\right| = R \cdot \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to R \cdot g = 1.$$

Podobnie jest z kryterium pierwiastkowym Cauchy'ego.

Kryterium Cauchy'ego jest spójne z kryterium d'Alemberta. Niektóre osoby twierdziły, że ciąg $b_n := 2^n a_n$ spełnia

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \to 1, \qquad \sqrt[n]{b_n} \to 2.$$

Wnioskowano stąd, że co prawda kryterium d'Alemberta nie pozwala rozstrzygnąć zbieżności szeregu $\sum b_n$, ale kryterium Cauchy'ego już tak (mianowicie, że szereg jest rozbieżny). Oczywiście takie wnioskowanie wiąże się z błędem gdzieś w obliczeniach, gdyż ciąg $\sqrt[n]{b_n}$ zbiega do 1, a nie do 2. Ale jest też błąd bardziej podstawowy: prawdziwa jest ogólna zasada, że ze zbieżności $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ wynika zbieżność $\sqrt[n]{b_n}$ **do tej samej granicy**. Jeśli więc jedno kryterium (d'Alemberta lub Cauchy'ego) nie stosuje się ze względu na otrzymanie granicy 1, to drugie nic nie może pomóc.

Inne błędy:

- Popularne było stosowanie wzorów na promień zbieżności pozbawionych modułu. W tym zadaniu to wszystko jedno (bo $a_n > 0$), ale w przypadku ogólnego szeregu potęgowego $\sum c_n x^n$ może prowadzić do błędu. Jeśli np. $c_n = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ (czyli jest to ciąg $1, 1, -1, -1, 1, 1, \ldots$), to ciąg $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ nie jest zbieżny, a przecież promień zbieżności jest dobrze określony (wynosi 1).

- Niektórzy nadużywali kryteriów zbieżności, stwierdzając np. dla szeregu $\sum a_n$ zbieżność/rozbieżność na podstawie granicy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, zbieżność na podstawie nierówności $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, albo zbieżność na podstawie granicy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to -1 < 1$ (tu widać, że założenie $a_n > 0$ jest złamane). Albo twierdząc, że szereg $\sum(-1)^n a_n$ może być zbieżny jedynie wtedy, gdy ciąg a_n jest dodatni i malejący. Lub też stwierdzając (w podpunkcie b tego zadania), że szereg posiadający wyrazy obu znaków może być zbieżny jedynie warunkowo.