24.01.2025

Analiza Matematyczna I, gr. 109

Zadanie 1. O funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wiadomo, że jest różniczkowalna, a ponadto

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

a) Czy jest to funkcja rosnąca? Malejąca? A może ani jedno, ani drugie?

b) Jaka jest optymalna stała Lipschitza funkcji f, to znaczy najmniejsza liczba $L \geqslant 0$, dla której nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L \cdot |x - y|$$

jest spełniona dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$?

Zadanie 2. Wykazać, że funkcja

$$g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = e^x - x - 1$$

jest rosnąca na $[0, \infty)$.

24.01.2025

Analiza Matematyczna I, gr. 112

Zadanie 1. O funkcji $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ wiadomo, że jest różniczkowalna, a ponadto

$$f'(x) = 1 + \ln x \quad \text{dla } x > 0.$$

a) Czy jest to funkcja rosnąca? Malejąca? A może ani jedno, ani drugie?

b) W którym punkcie $x > 0$ funkcja f przyjmuje swoją najmniejszą wartość?

Zadanie 2. Wykazać, że funkcja

$$g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = x - \ln(1 + x)$$

jest rosnąca na $[0, \infty)$.