

Krzywizna w geometrii Riemanna (skrypt wykładu)

Michał Miśkiewicz
mimuw.edu.pl/~mis/

2025-12-10

Spis treści

1	Geometria podrozmaitości $\mathbb{R}^n$	4
1.1	Podstawowe pojęcia	4
1.2	Twierdzenie o otoczeniu tubularnym	5
1.3	Geometria: metryka i miara objętości	8
1.4	Krzywizna i <i>Theorema Egregium</i>	10
1.5	Zadania	11
2	Rozmaitości Riemannowskie: minimalistyczne wprowadzenie	16
2.1	Rozmaitości gładkie	16
2.2	Metryka Riemanna	18
2.3	Przykłady	19
2.4	Zadania	21
3	Twierdzenia o zanurzeniu	23
3.1	Szkic problematyki	23
3.2	Twierdzenie Whitneya o zanurzeniu	24
3.3	Redukcja do przypadku torusa	25
3.4	Redukcja do problemu lokalnego	26
3.5	Problem lokalny oraz dowód twierdzenia Nasha	29
3.6	Oszacowania eliptyczne poprzez szeregi Fouriera	34
3.7	Uzupełnienie dowodu istnienia rozwiązania	37
3.8	Informacja o twierdzeniu Nasha–Kuipera	38
3.9	Zadania	40
4	Rozmaitości Riemannowskie: właściwy wstęp	42
4.1	Problem z różniczkowaniem	42
4.2	Koneksja na wiązce wektorowej	43
4.3	Koneksja Levi-Civity	44

4.4	Krzywizna Riemanna	45
4.5	Theorema Egregium	46
4.6	Iloczyn tensorowy i koneksja na wiązkach tensorowych	47
4.7	Zadania	50
Tematy referatów		52
Bibliografia		53

Rozdział 1

Geometria podrozmaitości $\mathbb{R}^n$

1.1 Podstawowe pojęcia

Najpewniej większość materiału tego wstępnego rozdziału jest już znana, ale przypomnienie go ma kilka celów. Po pierwsze, pozwoli na wprowadzenie nowych oznaczeń (używanych i później) w znajomym kontekście. Po drugie, można spotkać różne definicje podstawowych pojęć, więc na obecnym etapie warto je zestawić razem i przekonać się, że są równoważne. Ponadto niektóre z pojęć będą stanowić zapowiedź swoich odpowiedników dla rozmaitości abstrakcyjnych. Zaczniemy od podstaw.

Definicja 1.1. Podzbiór $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy m -wymiarową *podrozmaitością* (inaczej: *rozmaitością zanurzoną*) klasy C^1 , jeśli lokalnie wygląda jak fragment $\mathbb{R}^m$. Można przyjąć dowolną z poniższych definicji:

- a) M jest lokalnie wykresem: $\forall p \in M \exists 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n, U \subseteq \mathbb{R}^n, U \stackrel{\text{otw.}}{\subseteq} P := \text{span}(e_{i_j}), p \in V \stackrel{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(U, P^\perp)$
 $M \cap V = \text{wykres } \varphi \cap V$
- b) obrazem parametryzacji: $\forall p \in M \exists U \stackrel{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^m, p \in V \stackrel{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(U, V), \text{rank } D\varphi = m$
 $\varphi: U \rightarrow M \cap V$ jest homeomorfizmem
- c) poziomicą submersji: $\forall p \in M \exists p \in V \stackrel{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-m}), \text{rank } D\varphi = n-m$
 $M \cap V = \text{poziomica } \varphi$
- d) jak $\mathbb{R}^m \times \mathbf{0}$: $\forall p \in M \exists p \in V \stackrel{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n, 0 \in U \stackrel{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(U, V)$ dyfeomorfizm
 $M \cap V = \text{obraz } \mathbb{R}^m \times \{\mathbf{0}\} \text{ przy } \varphi$

Dowód równoważności tych czterech definicji to dobre ćwiczenie na znajomość twierdzeń o funkcji odwrotnej i o funkcji uwikłanej (zadanie 1.1). Każda z definicji ma inny zakres zastosowań. Na pytanie *czy $M = \{\dots\}$ jest rozmaitością?* zazwyczaj najłatwiej odpowiedzieć twierdząco w oparciu o b) lub c), zależnie od kontekstu, natomiast odpowiedź przeczącą może dać nam chyba jedynie a) (zadanie 1.3). Wersja d) jest najbliższej definicji rozmaitości abstrakcyjnej, jak się zresztą przekonamy.

Podobnie definiuje się podrozmaitości klasy C^k lub C^∞ . Można też zdefiniować regularność przekształceń $F: M \rightarrow N$ między dwiema podrozmaitościami $M \subseteq \mathbb{R}^M, N \subseteq \mathbb{R}^N$. Jeśli ograniczymy się do fragmentu M będącego obrazem parametryzacji φ jak w definicji b), to

umawiamy się, że przekształcenie F jest klasy C^k , gdy $F \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^N$ jest klasy C^k . Oczywiście definicja ta nie zależy od wyboru φ (co jeszcze lepiej widać w oparciu o d)). Alternatywnie moglibyśmy zażądać, że F przedłuża się do funkcji gładkiej $\bar{F}: V \rightarrow \mathbb{R}^N$ na pewnym otoczeniu $M \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^M$ – otrzymane definicje są równoważne (zadanie 1.2).

W odróżnieniu od rozmaitości topologicznych, dla rozmaitości klasy C^1 (i wyższej) można wprowadzić kluczowe pojęcie *wektora stycznego*. W przypadku podzbiorów $\mathbb{R}^n$ jest to pojęcie dość namacalne:

Definicja 1.2. Dany jest zbiór $M \subseteq \mathbb{R}^n$ i punkt p . Wektor $v \in \mathbb{R}^n$ nazwiemy stycznym do M w p , jeśli istnieje ciąg punktów $p_k \in M$ zbieżny do p oraz ciąg liczb $a_k \geq 0$, dla których $a_k \cdot (p_k - p) \rightarrow v$.

Gdy M jest podrozmaitością klasy C^1 , wprowadzamy dodatkowe nazewnictwo:

$$\begin{aligned} T_p M &:= \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ jest styczny do } M \text{ w } p\} && - \text{przestrzeń styczna do } M \text{ w } p, \\ TM &:= \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : p \in M, v \in T_p M\} && - \text{wiązka styczna do } M. \end{aligned}$$

Jest ono usprawiedliwione następującą własnością $T_p M$:

Stwierdzenie 1.3. Jeśli $M \subseteq \mathbb{R}^n$ jest m -wymiarową podrozmaitością klasy C^1 i $p \in M$, to przestrzeń styczna $T_p M$ jest m -wymiarową podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^n$. Ponadto:

- jeśli M jest obrazem parametryzacji φ , to $T_{\varphi(x)} M = \text{im } D\varphi(x)$;
- jeśli M jest poziomą submersji φ , to $T_p M = \ker D\varphi(p)$.

W dalszej części rozdziału będziemy też rozważać wektory normalne do rozmaitości:

$$\begin{aligned} T_p^\perp M &:= \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp T_p M\} && - \text{przestrzeń normalna do } M \text{ w } p, \\ T^\perp M &:= \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : p \in M, v \in T_p^\perp M\} && - \text{wiązka normalna do } M. \end{aligned}$$

Stwierdzenie 1.4. Jeśli $M \subseteq \mathbb{R}^n$ jest m -wymiarową podrozmaitością klasy C^{k+1} , to wiązka styczna TM i wiązka normalna $T^\perp M$ również są podrozmaitościami klasy C^k , wymiaru odpowiednio $2m$ i n .

Polecam przeprowadzić samodzielny dowód i przekonać się, że przypadek $T^\perp M$ jest trudniejszy od TM (zadanie 1.7).

1.2 Twierdzenie o otoczeniu tubularnym

Poniższy dowód przebiega podobnie do [Bre93, Ch. 2.11]. Inaczej sformułowany dowód można znaleźć w skrypcie Pawła Strzeleckiego [Str12, Tw. 6.18].

Twierdzenie 1.5. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zwartą m -wymiarową gładką podrozmaitością. Wówczas istnieje $\varepsilon > 0$, dla którego otoczenie tubularne

$$M_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, M) < \varepsilon\}$$

posiada następujące własności:

- (a) Dla każdego punktu $x \in M_\varepsilon$ istnieje jednoznaczny punkt na rozmaitości $y \in M$ najbliższy x .
- (b) Przyporządkowanie $\pi(x) = y$ jest gładkie.
- (c) Otoczenie tubularne M_ε jest sumą rozłączną dysków

$$D^\perp(y, \varepsilon) = \{y + v : v \in T_y^\perp M, |v| < \varepsilon\} \quad (y \in M).$$

Dowód. REDUKCJA PROBLEMU.

Dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ funkcja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(y) = |y - x|^2$ jest ciągła (nawet gładka), więc dzięki zwartości M funkcja $f|_M$ posiada **co najmniej jeden** punkt minimalny $y \in M$. Oczywiście $f(y) < \varepsilon^2$, czyli $\|y - x\| < \varepsilon$. W punkcie minimalnym mamy $\nabla f(y) \perp T_y M$, skąd odczytujemy, że $x - y \in T_y^\perp M$. Połączenie tych dwóch faktów oznacza, że x leży w $D^\perp(y, \varepsilon)$.

Wykazaliśmy więc, że otoczenie tubularne M_ε jest sumą wszystkich $D^\perp(y, \varepsilon)$. Do dowodu (c) brakuje nam, by uzasadnić rozłączność tych dysków. Rozłączność ta oznaczać będzie również jednoznaczność $y \in M$ minimalizującego odległość od x , czyli punkt (a). Jeśli dwa dyski $D^\perp(y_1, \varepsilon)$, $D^\perp(y_2, \varepsilon)$ się przecinają, to $|y_1 - y_2| < 2\varepsilon$, wystarczy więc przeprowadzić lokalne rozumowanie.

ZASTOSOWANIE TWIERDZENIA O FUNKCJI ODWROTNEJ.

Przypomnijmy, że na mocy Stwierdzenia 1.4 $T^\perp M \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ jest gładką podrozmaitością n -wymiarową. Rozważmy przekształcenie gładkie

$$T^\perp M \ni (p, v) \xrightarrow{\Phi} p + v \in \mathbb{R}^n$$

i ustalmy punkt $p \in M$. Różniczką $D\Phi(p, 0)$ ma w obrazie podprzestrzeni zarówno podprzestrzeni $T_p M$, jak i $T_p^\perp M$ – z porównania wymiarów wynika więc, że jest izomorfizmem liniowym. Z twierdzenia o funkcji odwrotnej wynika, że Φ jest dyfeomorfizmem na pewnym otoczeniu p , z czego w szczególności wynika, że dyski $D^\perp(y, \varepsilon)$ są rozłączne dla y z pewnego otoczenia $p \in U \subseteq M$ oraz odpowiednio małego $\varepsilon > 0$.

PRZYPADEK GLOBALNY.

Uzasadnimy teraz, że dyski $D^\perp(y, \varepsilon)$ są rozłączne nie tylko lokalnie. Dzięki zwartości możemy pokryć M skończenie wieloma zbiorami otwartymi $U_i \subseteq M$ jak w poprzednim kroku (dla każdego jest pewien ε_i). Weźmy teraz $\varepsilon > 0$ mniejszy od wszystkich ε_i i jednocześnie mniejszy od połowy liczby Lebesgue’a pokrycia U_i – chodzi o to, by dla każdego $p \in M$ kula $B_{2\varepsilon}(p)$ mieściła się w którymś U_i . Wtedy gdyby jakieś dwa dyski $D^\perp(p_1, \varepsilon)$, $D^\perp(p_2, \varepsilon)$ przecinały się, to $|p_1 - p_2| < 2\varepsilon$, a więc oba punkty p_1, p_2 zawierałyby się w tym samym U_i – sprzeczność. Samo istnienie liczby Lebesgue’a łatwo uzasadnić – należy wykorzystać zwartość M do wykazania, że maksimum z funkcji $f_i(p) := \text{dist}(p, U_i^c)$ jest oddzielone od zera.

Pozostaje uzasadnić, że przekształcenie π jest dobrze określone i gładkie. W istocie wykazaliśmy, że $\Phi: U \rightarrow M_\varepsilon$ jest dyfeomorfizmem na zbiorze $U = \{(p, v) : |v| < \varepsilon\} \subseteq T^\perp M$. Przekształcenie π otrzymujemy więc jednoznacznie jako złożenie gładkich przekształceń $\pi = \Phi \circ \bar{\pi} \circ \Phi^{-1}$, gdzie $\bar{\pi}(p, v) = (p, 0)$. $\square$

Ostatni krok (przejście od rozważań lokalnych do globalnych) można przeprowadzić na różne sposoby: tak jak wyżej; przez sprzeczność, w oparciu o ciągi (jak w [Str12, Tw. 6.18] i [Bre93, Ch. 2.11]); ale również bardziej abstrakcyjnie (jak w [Spi79, Lem. 9.19]). To ostatnie podejście jest zarysowane w zadaniu 1.8.

Twierdzenie o otoczeniu tubularnym działa jedynie dla małego $\varepsilon > 0$, czyli dla małego otoczenia. Łatwo się o tym samodzielnie przekonać, patrząc na przykład okręgu $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ (tutaj musi być $\varepsilon < 1$). Analizując przykład elipsy, można zauważyć związek między optymalnym ε a krzywizną (zob. zadanie 1.10). Założenia twierdzenia można za to osłabić, zakładając, że $\mathcal{M}$ jest rozmaitością jedynie klasy C^2 ; rzut π jest wówczas klasy C^1 . Nie wystarczy jednak, by $\mathcal{M}$ była klasy C^1 (zob. zadanie 1.9).

Jak się przekonamy, przekształcenie π zawiera w sobie dużo informacji o geometrii M . Wprost z definicji, obcięcie $\pi|_M$ jest identycznością. Stąd wniosek, że $\nabla_u \pi_p = u$, jeśli $p \in M$ oraz $u \in T_p M$. Z drugiej strony, w obcięciu do $D^\perp(p, \varepsilon)$ przekształcenie π jest stałe równe p , więc $\nabla_v \pi_p = 0$ dla $v \in T_p^\perp M$. W efekcie okazuje się, że $\nabla \pi_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest rzutem prostopadłym na $T_p M$.

Rozważmy teraz gładkie pola $u, v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ styczne do M . Zgodnie z wcześniejszymi obserwacjami, w dowolnym punkcie M mamy równość $\nabla_u \pi = u$. Możemy więc tę równość różniczkować w kierunku v , co daje:

$$\nabla_v u = \nabla_v(\nabla_u \pi) = \nabla_{v,u}^2 \pi + \nabla_{\nabla_v u} \pi.$$

W ustalonym punkcie $p \in M$ wiemy, że rzutem $\nabla_v u$ na przestrzeń styczną $T_p M$ jest $\nabla_{\nabla_v u} \pi$. Dodatkowy człon $\nabla_{v,u}^2 \pi$ musi być więc rzutem $\nabla_v u$ na przestrzeń normalną $T_p^\perp M$, co w szczególności pokazuje, że jest prostopadły do przestrzeni stycznej. Odnotujmy, że każde dwa wektory $u, v \in T_p M$ można przedłużyć do pól stycznych na M , więc wektor $\nabla_{v,u}^2 \pi$ jest prostopadły dla dowolnych stycznych wektorów u, v .

Definicja 1.6. Drugą formę podstawową gładkiej podrozmaitości $M \subseteq \mathbb{R}^n$ definiujemy jako

$$A_p(u, v) := -\nabla_{u,v}^2 \pi_p,$$

gdzie $p \in M$ jest punktem na rozmaitości, a $u, v \in T_p M$ są dwoma wektorami stycznymi. Dla ustalonego $p \in M$ jest to symetryczna forma dwuliniowa o wartościach w $T_p^\perp M$:

$$A_p: T_p M \times T_p M \rightarrow T_p^\perp M.$$

Nazwa *druga forma podstawowa* jest historycznym śladem dawnego nazewnictwa. Otóż metrykę Riemanna (czyli iloczyn skalarny na przestrzeni stycznej) nazywano kiedyś *pierwszą formą podstawową*.

Intuicję być może łatwiej uzyskać w szczególnym przypadku, gdy $\mathcal{M}$ jest podrozmaitością wymiaru $n - 1$. Wówczas wiązka normalna jest jednowymiarowa i można znaleźć (przynajmniej lokalnie) pole normalne N :

$$N: M \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad N(p) \in T_p^\perp M, \quad |N(p)| = 1 \quad \text{dla } p \in M.$$

Możemy wtedy wprowadzić symetryczną formę dwuliniową o wartościach w $\mathbb{R}$:

$$h_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_p(u, v) := \langle A_p(u, v), N_p \rangle,$$

również zwaną niekiedy drugą formą podstawową (czego będziemy unikać). Związek między h i A można też zapisać jako $A = hN$.

Należy jednak być ostrożnym, gdyż N można (lokalnie) wybrać na dwa sposoby, co wpływa na znak h . Gdy M jest orientowalna, można wybrać N globalnie. Ponadto gdy M jest zadana jako brzeg gładkiego ograniczonego obszaru $M = \partial\Omega$, naturalnym wyborem jest pole N skierowane *na zewnątrz* Ω ; przejście od h do A (lub odwrotnie) jest wówczas jednoznaczne.

1.3 Geometria: metryka i miara objętości

Metryka i miara objętości to podstawowe pojęcia geometrii: pozwalają mierzyć odległości między punktami i określać wielkość podzbiorów danej przestrzeni. Dla podrozmaitości $\mathbb{R}^n$ łatwo je zdefiniować i już w tej ogólności można sformułować interesujące pytania.

Do mierzenia odległości wygodnie jest wykorzystywać krzywe $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ kawałkami klasy C^1 (w skrócie $\gamma \in C_p^1$), czyli takie, dla których istnieje skończony podział $[a, b] = \bigcup_i [a_i, b_i]$ oraz γ jest klasy C^1 na każdym z przedziałów $[a_i, b_i]$.

Definicja 1.7. Dla krzywej $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ klasy C_p^1 definiujemy jej długość wzorem

$$L(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Dla dwóch punktów $p, q \in M$ w tej samej składowej spójności M definiujemy

$$d(p, q) := \inf_{\gamma} L(\gamma),$$

gdzie infimum jest brane po wszystkich krzywych $\gamma \in C_p^1$, łączących p i q .

Naturalnie oczekivalibyśmy, że wśród dopuszczalnych krzywych γ istnieje najkrótsza (nazwiemy ją wtedy *odcinkiem*). Tak jednak nie musi być, gdy M ma „dziury”. Gdy jednak M jest domkniętym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ – lub równoważnie, gdy M jest zupełna jako przestrzeń z metryką dziedziczoną z $\mathbb{R}^n$ – najkrótsza krzywa między p i q zawsze istnieje. W poszukiwaniu i badaniu takich krzywych pomocne jest zastąpienie $L(\gamma)$ całką $\int_a^b |\dot{\gamma}|^2$ (zadanie 1.11). Najkrótsza krzywa okazuje się spełniać równanie zwyczajne $\ddot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}^\perp M$ (zadania 1.12, 1.13), przy czym implikacja przeciwna zachodzi jedynie lokalnie. Rozwiązania tego równania nazywamy *geodezyjnymi* (zadanie 1.16 zapewnia istnienie takich rozwiązań).

Miarę na podrozmaitości wprowadzamy w oparciu o na zamianę zmiennych w całce. Odnajmy, że jeśli $F: U \rightarrow V$ jest dyfeomorfizmem między dwoma otwartymi podzbiarami $\mathbb{R}^n$, to miarę podbioru $E \subseteq V$ możemy wyznaczyć ze wzoru $\lambda_n(E) = \int_E J_{DF}(x) dx$, gdzie $J_{DF}(x)$ to *jacobian* F , zadany przez $J_{DF} = |\det DF|$. W ten sposób możemy sprowadzić znalezienie miary na V to miary (z gęstością) na U . Podobnie postępujemy z podrozmaitościami (jak w [AFP00, Ch. 2.10], z pewną modyfikacją).

Definicja 1.8. (a) Niech $L: U \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym między przestrzeniami liniowymi tego samego wymiaru, wyposażonymi w iloczyn skalarny. Wtedy *jacobian* L definiujemy wzorem

$$J_L := |\det[L]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}|,$$

gdzie $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ to bazy ortonormalne U i V .

(b) Niech $L: U \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym między przestrzeniami liniowymi wymiarów $\dim U < \dim V$, wyposażonymi w iloczyn skalarny. Wybierzmy dowolną podprzestrzeń $W \subseteq V$ wymiaru $\dim W = \dim U$, zawierającą obraz L . Wtedy *jacobian* L definiujemy wzorem $J_L := J_{L: U \rightarrow W}$, czyli poprzez jacobian tego samego przekształcenia w mniejszą podprzestrzeń.

Zauważmy, że w punkcie (b) mamy $J_L = 0$ gdy tylko $\text{rank } L < \dim U$. W przeciwnym przypadku $J_L := |\det[L]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}|$, gdzie za $\mathcal{V}$ przyjmujemy bazę ortonormalną obrazu L . Łatwo się przekonać, że wynik nie zależy od wyboru baz. Nietrudno też sprawdzić, że $J_L = \sqrt{\det(L^T L)}$ (zadanie 1.14).

Definicja 1.9. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie m -wymiarową podrozmaitością. Jeśli $F: U \rightarrow M$ jest parametryzacją fragmentu M , to definiujemy miarę objętości μ wzorem:

$$\mu(F(E)) := \int_E J_{DF}(x) \, dx \quad \text{dla } E \subseteq U.$$

Żeby się przekonać, że określenie μ nie zależy od wyboru F , wystarczy skorzystać z definicji jakobianu – w tym celu należy tylko wiedzieć, że parametryzacja jest dyfeomorfizmem (w tym sensie, że odwrotność jest gładką funkcją na M). Sklejenie miar określonych na różnych fragmentach M daje żadaną miarę na całym M . Warto jeszcze odnotować, że całkowanie względem μ sprowadza się do całkowania w $\mathbb{R}^m$ z gęstością J_{DF} .

W kontekście całkowania po rozmaitościach bardzo pożyteczny jest krzywoliniowy odpowiednik twierdzenia Fubniego, jakim jest twierdzenie o całkowaniu po włóknach (ang. *coarea formula*).

Twierdzenie 1.10 (twierdzenie o całkowaniu po włóknach). *Założmy, że $H: U \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 na $U \subseteq \mathbb{R}^n$, której gradient nie zeruje się na U . Dla funkcji całkownej (lub mierzalnej nieujemnej) $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ wyprowadzić wzór*

$$\int_U f(x) \, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{H^{-1}(t)} \frac{f(x)}{|\nabla H(x)|} \, d\mu_{H^{-1}(t)}(x) \, dt.$$

Dowód. Wystarczy dowieść tezy dla funkcji mierzalnych nieujemnych, a to z kolei wystarczy sprawdzić lokalnie. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że dla dowolnego punktu w U istnieje dyfeomorfizm $\Phi: W \rightarrow V$ na pewne otoczenie otwarte $V \subseteq U$, dla którego zachodzi tożsamość $H(\Phi(t, u)) = t$ (tę silniejszą wersję łatwo wyprowadzić z twierdzenia o funkcji odwrotnej). Ograniczymy się więc do całkowania funkcji $f \geq 0$ po V .

Dla $t \in \mathbb{R}$ oznaczmy dodatkowo funkcję $\Phi_t(u) := \Phi(t, u)$, która jest parametryzacją $H^{-1}(t)$. Oznaczmy też zbiory $W_t := (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap W$, czyli (płaskie) przeciwobrazy $H^{-1}(t)$. Stosując podstawienie $x = \Phi(t, u)$ w całce po lewej stronie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_V f(x) \, d\lambda_n(x) &= \int_W f(\Phi(t, u)) J_{D\Phi}(t, u) \, d\lambda_n(t, u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{W_t} f(\Phi(t, u)) J_{D\Phi}(t, u) \, d\lambda_{n-1}(u) \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{W_t} f(\Phi(t, u)) \frac{J_{D\Phi}(t, u)}{J_{D\Phi_t}(u)} J_{D\Phi_t}(u) \, d\lambda_{n-1}(u) \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{H^{-1}(t) \cap V} f(x) \frac{1}{|\nabla H(x)|} \, d\mu_{H^{-1}(t)}(x) \, dt, \end{aligned}$$

o ile tylko zachodzi równość

$$J_{D\Phi}(t, u) = |\nabla H(\Phi(t, u))|^{-1} \cdot J_{D\Phi_t}(u).$$

Żeby się o tym przekonać, przyjmijmy bazę standardową w $\mathbb{R}^n$ (w dziedzinie) oraz jakąś bazę ortonormalną $T_{\Phi(t, u)} H^{-1}(t)$ uzupełnioną wektorem $v_n = \frac{\nabla H}{|\nabla H|}$ (w obrazie). Różniczkując tożsamość $H(\Phi(t, u)) \equiv t$, wnioskujemy, że ostatnim wierszem macierzy $D\Phi$ w wybranej bazie jest $(|\nabla H|^{-1}, 0, \dots, 0)$. Z rozwinięcia Laplace'a względem tego wiersza otrzymujemy żadaną równość, co kończy dowód. $\square$

1.4 Krzywizna i *Theorema Egregium*

Trzeba z góry uprzedzić, że niniejszy podrozdział jest w samym założeniu anachroniczny. Historycznie krzywizna Gaussa została wprowadzona jako własność powierzchni w $\mathbb{R}^3$, ale już sam Gauss odkrył, że jest ona niezmiennikiem izometrii (mówi o tym tzw. *Theorema Egregium*), a więc tak naprawdę własnością powierzchni jako abstrakcyjnej rozmaitości. W związku z tym logicznym wyjściem jest definiować krzywiznę rozmaitości bez odniesienia do zanurzenia. I tak też zrobimy, ale później.

Niech $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie gładką podrozmaitością, a $a, b, c, d \in T_p M$ czterema wektorami stycznymi w $p \in M$. Wówczas krzywiznę Riemanna definiujemy wzorem

$$\text{Rm}_p(a, b, c, d) := \langle A_p(a, d), A_p(b, c) \rangle - \langle A_p(a, c), A_p(b, d) \rangle. \quad (1.1)$$

Jest to więc czteroliniowe przekształcenie $\text{Rm}_p: (T_p M)^4 \rightarrow \mathbb{R}$. W literaturze wzór ten nosi nazwę *równania Gaussa* [Lee97, Ch. 8, eq. (8.4)], [Pet06, Ch. 4], [GHL04, Def. 5.3] i jest wnioskiem z właściwej definicji krzywizny Riemanna. W ogólnym przypadku $M \subseteq N$ odpowiedni wzór uwzględnia oczywiście krzywiznę otaczającej rozmaitości N .

Biorąc ślad względem pierwszej i czwartej współrzędnej, otrzymujemy definicję krzywizny Ricciego:

$$\text{Ric}_p(a, b) := (\text{tr}_{1,4} \text{Rm}_p)(a, b) = \sum_{j=1}^m \text{Rm}_p(e_j, a, b, e_j),$$

gdzie za e_j można przyjąć dowolną bazę ortonormalną $T_p M$. Jest to dwuliniowe przekształcenie $\text{Ric}_p: (T_p M)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, w dodatku symetryczne (zadanie 1.20).

Biorąc ślad raz jeszcze, dostajemy krzywiznę skalarną:

$$S_p := \text{tr Ric}_p = \sum_{j,k=1}^m \text{Rm}_p(e_j, e_k, e_k, e_j).$$

Najbardziej klasyczna jest jednak *krzywizna sekcyjna*. W przestrzeni stycznej $T_p M$ wybierzmy płaszczyznę (czyli dwuwymiarową podprzestrzeń liniową) $\alpha \subseteq T_p M$. Krzywiznę sekcijną w kierunku α definiujemy jako

$$\text{sec}(\alpha) := \text{Rm}_p(u, v, v, u) \quad \text{dla dowolnej bazy o.n. } u, v \in \alpha.$$

Można też rozważyć dowolną bazę $u, v \in \alpha$, i wówczas krzywizna sekcyjna wyraża się wzorem

$$\text{sec}(\alpha) = \text{sec}(u, v) = \frac{\text{Rm}_p(u, v, v, u)}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2};$$

mianownik można interpretować jako kwadrat normy $u \wedge v$, albo jako pole równoległoboku rozpiętego na u i v . Poprawność powyższej definicji można uzasadnić dzięki symetriom krzywizny Riemanna (zadanie 1.21).

Krzywizna sekcyjna M w kierunku α pokrywa się z klasyczną krzywizną Gaussa dwuwymiarowej powierzchni

$$M \cap (p + \alpha \oplus T_p^\perp M),$$

otrzymanej przez cięcie M w kierunku α . W szczególności, jeśli $M \subseteq \mathbb{R}^3$ jest powierzchnią w $\mathbb{R}^3$, to $\text{sec}(T_p M)$ jest klasyczną krzywizną Gaussa.

Choć nie jest to jasne w oparciu o naszą definicję (1.1), krzywizna Riemanna jest cechą samej rozmaitości, a nie jej zanurzenia. Mówi o tym:

Twierdzenie 1.11 (*Theorema Egregium* Gaussa). *Jeśli $f: M \rightarrow N$ jest izometrią między dwiema gładkimi podrozmaitościami, to zachodzi równość $\text{Rm}^M = f^* \text{Rm}^N$, to znaczy zachodzi równość*

$$\text{Rm}_p^M(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{Rm}_{f(p)}^N(Df(u_1), Df(u_2), Df(u_3), Df(u_4))$$

dla wszystkich $p \in M$, $u_1, u_2, u_3, u_4 \in T_p M$. W szczególności, jeśli M, N mają wymiar 2, to krzywizna Gaussa w odpowiednich punktach jest równa.

Najprostszy dowód – do którego dojdziemy później – polega na przyjęciu wewnętrznej definicji krzywizny. Tymczasem polecam przeprowadzenie samodzielnego dowodu w przypadku, gdy M jest podrozmaitością płaską, a więc bez straty ogólności jest otwartym obszarem w $\mathbb{R}^m$ (zadanie 1.24). Zawiera on w sobie pewną zapowiedź ogólnego przypadku.

1.5 Zadania

Zadanie 1.1. Wykazać równoważność czterech definicji podrozmaitości z Definicji 1.1, np. na podstawie następujących implikacji:

$$\text{a)} \Rightarrow \text{b)} \Rightarrow \text{d)} \Rightarrow \text{a)} \Rightarrow \text{c)} \Rightarrow \text{a)}.$$

Zadanie 1.2. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^M$, $N \subseteq \mathbb{R}^N$ będą podrozmaitościami klasy C^k . Wykazać równoważność następujących charakterystyk gładkości przekształcenia $F: M \rightarrow N$:

- (a) dla każdej parametryzacji $\varphi: U \rightarrow M$ fragmentu M , złożenie $F \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^N$ jest klasy C^k ;
- (b) dla każdego $p \in M$ istnieje przedłużenie $\bar{F}: V \rightarrow \mathbb{R}^N$ klasy C^k na pewne otoczenie $p \in V \subseteq \mathbb{R}^M$.

Zadanie 1.3. Dla każdego z poniższych podzbiorów przestrzeni euklidesowej rozstrzygnąć, czy jest to podrozmaitość klasy C^1 :

- (a) $A = \{x^6 + y^5 + z^4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
- (b) $B = \{x^6 + y^4 + z^3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
- (c) $C = \left\{ \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ (dla ustalonych $0 < r < R$)
- (d) $D = \{(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- (e) $E = \{Q : Q^T Q = I\} \subseteq M_{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$
- (f) Obraz $F \subseteq \mathbb{R}^2$ funkcji $f: (-\infty, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadanej wzorem

$$f(t) = \begin{cases} (1, t) & \text{dla } t \leq 0, \\ (\cos t, \sin t) & \text{dla } t \geq 0. \end{cases}$$

(g) Zbiór $G = f(S^2) \subseteq \mathbb{R}^4$ będący obrazem sfery jednostkowej przy przekształceniu

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad g(x, y, z) = (xy, yz, zx, x^2 - y^2).$$

Uwaga. Niektóre z tych zbiorów mogą wyglądać znajomo: C to torus, D to okrąg, E to przestrzeń macierzy ortogonalnych, a G to płaszczyzna rzutowa $\mathbb{R}P^2$.

Zadanie 1.4. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ będą dwiema gładkimi podrozmaitościami. Scharakteryzować funkcje gładkie $f: M \rightarrow \mathcal{N}$, posługując się jedynie znajomością funkcji gładkich $M \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Zadanie 1.5. (a) Operator liniowy $D: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy różniczkowaniem w $p \in \mathbb{R}^n$, jeśli dla dowolnych $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ spełnia

$$D(f \cdot g) = f(p)D(g) + g(p)D(f) \quad (\text{warunek Leibniza}).$$

Sprawdzić, że dla każdego $v \in \mathbb{R}^n$ operator pochodnej kierunkowej $f \mapsto \nabla_v f_p$ jest różniczkowaniem w p . Udowodnić, że każde różniczkowanie jest tej postaci.

(b) Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie gładką podrozmaitością. Dla $p \in M$ zdefiniujemy

$$T := \{D: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} : D \text{ jest różniczkowaniem w } p\},$$

przy czym pojęcie różniczkowania $D: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy analogicznie jak w $\mathbb{R}^n$. Znaleźć izomorfizm liniowy pomiędzy T i przestrzenią styczną $T_p M$.

Zadanie 1.6. Wykazać, że przestrzeń różniczkowań $D: C^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ jest nieskończenie wymiarowa dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Uwaga. Rozwiązanie można znaleźć w [Tay73]. Wynik ten pokazuje, że dla rozmaitości klasy C^k trzeba przyjąć inną definicję przestrzeni stycznej.

Zadanie 1.7 (Stwierdzenie 1.4). Wykazać, że jeśli $M \subseteq \mathbb{R}^n$ jest m -wymiarową podrozmaitością klasy C^{k+1} , to wiązka styczna TM i wiązka normalna $T^\perp M$ są podrozmaitościami $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ klasy C^k , wymiaru odpowiednio $2m$ i n .

Zadanie 1.8. Niech $X \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zwartą przestrzenią metryczną, a $F \subseteq X$ domkniętym podzbiorem. Jeśli $f: X \rightarrow Y$ jest lokalnym homeomorfizmem, różnowartościowym w obciążeniu do F , to $f|_{F_\varepsilon}$ jest homeomorfizmem dla pewnego $\varepsilon > 0$.

Zadanie 1.9. Niech $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie wykresem funkcji $f(x) = |x|^{3/2}$. Przekonać się, że dla małych $\varepsilon > 0$ punkt $(0, \varepsilon)$ ma dokładnie dwa punkty najbliższe na $\mathcal{M}$.

Zadanie 1.10. Rozważmy elipsę

$$E := \{(x, y) : (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\} \quad (a, b > 0),$$

jej wnętrze E^- i zewnątrz E^+ . Zbadać, dla jakich $\varepsilon > 0$ gładkimi krzywymi są zbiory

$$\{p \in E_+ : \text{dist}(p, E) = \varepsilon\} \quad \text{oraz} \quad \{p \in E_- : \text{dist}(p, E) = \varepsilon\}.$$

Zadanie 1.11. Dla krzywej $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ klasy C_p^1 zdefiniowaliśmy jej długość $L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, dt$. Zdefiniujmy też jej *energię* wzorem $E(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|^2 \, dt$. Wyprowadzić nierówność $L(\gamma)^2 \leq (b-a)E(\gamma)$ oraz równoważność:

$$\gamma \text{ minimalizuje } E \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma \text{ minimalizuje } L \text{ oraz } |\dot{\gamma}| \equiv \text{const},$$

gdzie w obu przypadkach minimalizujemy wśród krzywych łączących zadane dwa punkty.

Zadanie 1.12. Niech $\gamma \in C_p^1$ będzie krzywą minimalizującą energię $E(\gamma)$ z poprzedniego zadania. Wykazać, że zachodzi równanie $\ddot{\gamma} \in T_{\gamma}^{\perp} M$ w słabym sensie, to znaczy dla dowolnej funkcji $V \in C_c^{\infty}((a, b), \mathbb{R}^n)$ zachodzi

$$\int_a^b \langle \dot{\gamma}(t), \partial_t V^T(t) \rangle \, dt = 0,$$

gdzie $V^T(t)$ oznacza rzut $V(t)$ na $T_{\gamma(t)} M$. Wywnioskować, że $-\ddot{\gamma} = A_{\gamma}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ w słabym sensie, czyli

$$\int_a^b \langle \dot{\gamma}(t), \partial_t V(t) \rangle \, dt = \int_a^b \langle A_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)), V(t) \rangle \, dt \quad \text{dla } V \in C_c^{\infty}((a, b), \mathbb{R}^n).$$

Wskazówka. Jeśli rozważymy rodzinę krzywych $\gamma_s(t) := \pi(\gamma(t) + s \cdot V(t))$, to funkcja $E(\varphi_s)$ przyjmuje minimum w $s = 0$. W drugiej części przydaje się obserwacja, że różniczką $\nabla \pi(p)$ jest samosprężona w punktach $p \in M$.

Zadanie 1.13. Załóżmy, że krzywa $\gamma \in C_p^1$ spełnia w słabym sensie równanie geodezyjnej $-\ddot{\gamma} = A_{\gamma}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$, jak w poprzednim zadaniu. Wykazać, że spełnia je również w sensie klasycznym, ponadto $\gamma \in C^{\infty}((a, b))$.

Zadanie 1.14. Wykazać, że wzór na jakobian podany w Definicji 1.8 pokrywa się z tym opartym na wyznaczniku Grama. Innymi słowy, jeśli dane są przestrzenie liniowe U, V wyposażone w iloczyn skalarny oraz przekształcenie liniowe $L : U \rightarrow V$ rzędu $\text{rank } L = \dim U$, to po przyjęciu dowolnych baz ortonormalnych $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ dla U i obrazu L otrzymujemy równość

$$\det(L^T L) = (\det[L]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}})^2.$$

Zadanie 1.15. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zwartą podrozmaitością, a X gładkim polem stycznym na M . Wykazać, że dla dowolnego punktu $p \in M$ istnieje dokładnie jedna gładka krzywa $\gamma: [0, \infty) \rightarrow M$ spełniająca $\gamma(0) = p$ oraz $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ dla $t > 0$.

Zadanie 1.16. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zwartą podrozmaitością. Wykazać, że dla dowolnego punktu $p \in M$ i wektora stycznego $v \in T_p M$ istnieje dokładnie jedna gładka krzywa $\gamma: [0, \infty) \rightarrow M$ spełniająca

- (a) $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$;
- (b) $\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)} M$ dla $t > 0$;

czyli geodezyjna z p o początkowej prędkości v .

Wskazówka. Rozważyć rozwiązanie równania zwyczajnego $\ddot{\gamma} = -A_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$.

Zadanie 1.17. Dana jest gładka funkcja $b: U \rightarrow \mathbb{R}$ na obszarze $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że ∇b nie znika na zbiorze $\{r_0 < b < r_1\}$, oraz że zbiór $\{b \leq r_1\}$ jest zwarty. Wykazać, że dla dowolnej funkcji gładkiej $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi

$$\partial_r \int_{b=r} f \, dx = \int_{b=r} \operatorname{div} \left(f \frac{\nabla b}{|\nabla b|} \right) |\nabla b|^{-1} \, dx \quad \text{dla } r \in (r_0, r_1).$$

Zadanie 1.18. Dla sfery $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ wyznaczyć rzut $\pi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ i jego pochodne. Wykazać, że druga forma podstawowa ma postać

$$A_p(u, v) = \langle u, v \rangle p \quad \text{dla } p \in \mathbb{S}^{n-1}, \, u, v \in T_p \mathbb{S}^{n-1}.$$

Zadanie 1.19. Wykazać, że krzywizna Riemanna Rm posiada następujące symetrie (dla dowolnych wektorów stycznych a, b, c, d):

- (a) $\operatorname{Rm}(a, b, c, d) = -\operatorname{Rm}(b, a, c, d)$
- (b) $\operatorname{Rm}(a, b, c, d) = -\operatorname{Rm}(a, b, d, c)$
- (c) $\operatorname{Rm}(a, b, c, d) = \operatorname{Rm}(c, d, a, b)$
- (d) $\operatorname{Rm}(a, b, c, d) + \operatorname{Rm}(b, c, a, d) + \operatorname{Rm}(c, a, b, d) = 0$

Zadanie 1.20. Sprawdzić, że krzywizna Ricciego jest symetryczną formą dwuliniową:

$$\operatorname{Ric}_p(a, b) = \operatorname{Ric}(b, a) \quad \text{dla } a, b \in T_p \mathcal{M}.$$

Zadanie 1.21. Ustalmy płaszczyznę $\alpha \subseteq T_p\mathcal{M}$. Uzasadnić, że wielkość

$$\sec(u, v) = \frac{\text{Rm}(u, v, v, u)}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2}$$

nie zależy od wyboru bazy $u, v \in \alpha$.

Zadanie 1.22. Dla sfery $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ wyprowadzić następujący wzór na krzywiznę Riemanna:

$$\text{Rm}_p(a, b, c, d) = \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle - \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle \quad \text{dla } a, b, c, d \in T_p\mathbb{S}^{n-1},$$

a następnie wyznaczyć dla $\mathbb{S}^{n-1}$ krzywiznę Ricciego $\text{Ric}_p(a, b)$, krzywiznę skalarną S_p i krzywiznę sekcijną $\sec_p(\alpha)$.

Zadanie 1.23. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie gładką zwartą podrozmaitością, $\pi: V \rightarrow M$ rzutem na najbliższy punkt (określonym na pewnym otoczeniu $M \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$), a $f: U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow M$ funkcją gładką. Uzasadnić, że:

- (a) $\nabla \pi_{f(x)}(\partial_i f(x)) = \partial_i f(x)$;
- (b) $\nabla^2 \pi_{f(x)}(\partial_i f(x), \partial_j f(x))$ jest rzutem ortogonalnym $\partial_{ij} f(x)$ na $T_{f(x)}^\perp M$.

Wskazówka. Zróżniczkować dwukrotnie tożsamość $\pi \circ f = f$.

Zadanie 1.24. (część *theorema egregium* Gaussa) Załóżmy, że $f: U \rightarrow M$ jest *izometryczną* parametryzacją fragmentu pewnej gładkiej zwartej powierzchni $M \subseteq \mathbb{R}^3$, czyli $D_x f$ jest włożeniem izometrycznym dla każdego $x \in U$. Dla $i, j, k, l = 1, 2$ wyprowadzić tożsamości

$$\partial_{ij} f \cdot \partial_k f = 0, \quad \partial_{ij} f \cdot \partial_{kl} f = -\partial_i f \cdot \partial_{jkl} f.$$

Wynioskować, że krzywizna Gaussa K_p jest zerowa dla wszystkich $p \in M$.

Uwaga. Wynika stąd w szczególności, że nie istnieją izometryczne odwzorowania kartograficzne Ziemi.

Rozdział 2

Rozmaitości Riemannowskie: minimalistyczne wprowadzenie

2.1 Rozmaitości gładkie

Bardzo przyjazne wprowadzenie do tematu rozmaitości gładkich można znaleźć np. w książce Lee [Lee13]. Definicja poniżej jest nieznacznie mniej standardowa, można ją znaleźć w książce Sternberga [Ste64]. Zaczniemy od definicji rozmaitości topologicznej.

Definicja 2.1. Przestrzeń topologiczną M nazwiemy n -wymiarową rozmaitością topologiczną, jeśli spełnia warunek Hausdorffa, posiada przeliczalną bazę oraz jest lokalnie homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$. Ostatni warunek oznacza, że każdy punkt $p \in M$ posiada otwarte otoczenie homeomorficzne z pewnym otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$.

Tak więc rozmaitość topologiczna to zbiór z dodatkową strukturą, konkretnie topologią, która lokalnie wygląda jak przestrzeń euklidesowa (pozostałe dwa warunki mają charakter bardziej techniczny). Homeomorfizmy między podzbiórmi M a podzbiórmi $\mathbb{R}^n$ nazywamy *mapami*. Przeniesiemy tę definicję na grunt rozmaitości gładkich. W tym przypadku nie jest jasne, jaka struktura na M ma odpowiadać za gładkość – przyjmujemy, że tą strukturą jest informacja, które funkcje $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ są gładkie, a które nie.

Definicja 2.2. Rozmaitością gładką M nazwiemy rozmaitość topologiczną wyposażoną dodatkowo w kolekcję funkcji $C^\infty(U)$ (*funkcji gładkich na U*) dla każdego podzbioru otwartego $U \subseteq M$, spełniającą następujące warunki:

- (a) Jeśli f jest gładka na U oraz $V \subseteq U$, to $f|_V$ jest gładka na V .
- (b) Jeśli f jest określona na $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ i gładka w obcięciu do każdego z U_α , to jest gładka na U .
- (c) Kolekcja $C^\infty(U, \mathbb{R})$ jest lokalnie euklidesowa.

Ostatni warunek oznacza, że dla każdego punktu $p \in M$ istnieje ciągła mapa $h: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ (na pewnym otoczeniu p) o tej własności, że f jest gładka na U wtedy i tylko wtedy, gdy $f \circ h^{-1}$ jest gładka (w standardowym sensie) na V .

Analogiczną definicję można sformułować dla rozmaitości klasy C^k lub analitycznej – wówczas zmienia się jedynie regularność rozważanych funkcji na M . Mapę h jak w warunku 3 nazywamy gładką mapą (albo po prostu mapą).

Pierwsze dwa warunki są dosyć intuicyjnymi aksjomatami – mówią, że funkcje gładkie można obcinać i sklejać, a ich gładkość na tym nie cierpi. Trzeci warunek to kompatybilność o odpowiednią strukturą na $\mathbb{R}^n$, podobnie jak warunek lokalnej homeomorficzności w definicji rozmaitości topologicznej. Najczęściej spotykana definicja rozmaitości gładkiej w centrum uwagi stawia same gładkie mapy – za chwilę się przekonamy, że to na jedno wychodzi.

Definicja 2.3. Funkcję $F: M \rightarrow N$ między dwiema rozmaitościami gładkimi nazywamy gładką, gdy gładka jest funkcja $f \circ F: M \rightarrow \mathbb{R}$ dla każdej gładkiej $f: N \rightarrow \mathbb{R}$.

Sprawdziliśmy już, że taka definicja jest kompatybilna ze zwyczajną definicją dla podrozmaitości $M \subseteq \mathbb{R}^n$ (zadanie 1.4). W myśl tej definicji każda z gładkich map faktycznie jest gładka, złożenie dwóch przekształceń gładkich jest gładkie, a ponadto gładkość można weryfikować poprzez mapy (zadanie 2.1).

Następnym krokiem jest zdefiniowanie przestrzeni stycznej bez odwoływania się do zanurzenia w $\mathbb{R}^n$. Podamy dwie równoważne definicje – nazwy *algebraiczna* i *geometryczna* są przyjęte ad hoc, bo i tak w zadaniu 2.2 pokażemy, że obie definiują przestrzeń liniową wymiaru n i łatwo wskazać między nimi izomorfizm. Odtąd będziemy więc oznaczać przestrzeń styczną przez $T_p M$.

Definicja 2.4. Niech $p \in M$ będzie punktem na n -wymiarowej rozmaitości gładkiej.

- (a) *Algebraiczna przestrzeń styczna* to zbiór wszystkich przekształceń liniowych $D: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających warunek Leibniza: $D(f \cdot g) = g(p)D(f) + f(p)D(g)$ dla wszystkich $f, g \in C^\infty(M)$ (tzw. różniczkowań);
- (b) *Geometryczna przestrzeń styczna* to zbiór klas równoważności gładkich krzywych $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ spełniających $\gamma(0) = p$. Przyjmujemy przy tym, że $\gamma_1 \sim \gamma_2$, gdy dla każdej gładkiej funkcji $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi $\partial_t(f \circ \gamma_1)(0) = \partial_t(f \circ \gamma_2)(0)$.

W definicji algebraicznej w miejsce $C^\infty(M)$ można przyjąć $C^\infty(U)$ dla dowolnego otoczenia U punktu p , albo też przestrzeń C_p^∞ kielków funkcji gładkich w p – jest to przestrzeń ilorazowa par (f, U) (gdzie $p \in U$, $f \in C^\infty(U)$) z relacją równoważnością $(f, U) \sim (g, V)$ zadaną przez warunek $f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$. Ze względu na istnienie funkcji wycinających daje to ten sam wynik. Natomiast w definicji geometrycznej zamiast testować *wszystkimi* funkcjami gładkimi f , równoważnie wystarczy testować *jedną* mapą.

Wypada odnotować, że algebraiczna definicja przestrzeni stycznej zawodzi całkowicie w przypadku rozmaitości klasy C^k z $k < \infty$ (zob. zadanie 1.6). Jest za to pożyteczna w przypadku rozmaitości algebraicznych.

Dla przekształcenia gładkiego $F: M \rightarrow N$ możemy zdefiniować jego pochodną (inaczej różniczkę) jako przekształcenie liniowe $DF(p): T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$. W związku z powyższym mamy dwa równoważne warianty definicji, choć oczywiście izomorfizm z zadania 2.2 zapewnia ich równoważność:

Definicja 2.5. Niech $F: M \rightarrow N$ będzie gładka oraz $p \in M$. Pochodną F w p definiujemy jako przekształcenie liniowe $DF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ dane wzorem:

- (a) $(DF_p v)(f) := v(f \circ F)$ dla różniczkowania $v \in T_p M$ i funkcji $f \in C^\infty(N)$;
- (b) $DF_p[\gamma] := [F \circ \gamma]$ dla klasy krzywej $[\gamma] \in T_p M$.

Jako oznaczenie pochodnej DF spotyka się również F_* .

Tak jak w przypadku podrozmaitości w $\mathbb{R}^n$, można zdefiniować wiązkę styczną TM jako zbiór wszystkich par (p, V) , gdzie $p \in M$ i $V \in T_p M$, i na tej zbiorze określić strukturę gładką. Polem stycznym nazwiemy gładką funkcję $V: M \rightarrow TM$ spełniającą $V(p) \in T_p M$ (czyli *cięcie wiązki* TM), a więc w każdym punkcie wybierającą pewien wektor styczny. Zbiór wszystkich pól stycznych oznaczmy przez $\Gamma(TM)$, i podobnego oznaczenia użyjemy później dla cięć innych wiązek.

Ponieważ słowo *wiązka* będzie się pojawiać często, wypada przytoczyć definicję (i w zadaniu 2.3 sprawdzić, że dotychczas poznane wiązki ją spełniają):

Definicja 2.6. Przez k -wymiarową wiązkę wektorową nazywamy parę rozmaitości gładkich E, M wraz z gładkim surjektywnym przekształceniem $\pi: E \rightarrow M$ oraz strukturą k -wymiarowej przestrzeni wektorowej na każdym włóknie $\pi^{-1}(p)$. Wymagamy przy tym następującego warunku lokalnej trywialności: każdy punkt $p \in M$ posiada *trywializację* $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ (dyfeomorfizm na przeciwobrazie pewnego otoczenia $U \subseteq M$), dla której diagram

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi \quad \swarrow p_1 & \\ & U & \end{array}$$

komutuje, a ponadto φ jest izomorfizmem liniowym $\pi^{-1}(q) \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^k$ w obcięciu do każdego włókna.

Powyższą definicję można przeformułować następująco, bardziej w duchu poprzednich definicji. W kategorii przekształceń $\pi: E \rightarrow M$ (ze strukturą liniową na włóknach) definiujemy morfizmy poprzez przemienność diagramu wyżej i wymaganiu liniowości na włóknach. Obiekt w tej kategorii nazwiemy k -wymiarową wiązką wektorową, jeśli jest lokalnie izomorficzny z wiązką trywialną $U \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{p_1} U$; izomorfizm w tej kategorii to właśnie trywializacja zdefiniowana wyżej.

2.2 Metryka Riemanna

Bardzo godnymi polecenia źródłem są książki Lee [Lee97] oraz Petersena [Pet06] – obie dobrze nadają się do samodzielnej lektury. Zaczniemy od definicji:

Definicja 2.7. Metryką Riemanna na rozmaitości gładkiej M nazywamy gładki wybór iloczynu skalarnego $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ na każdej przestrzeni stycznej. *Gładkość* oznacza tu, że funkcja $p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$ jest gładka dla dowolnych gładkich pól stycznych X, Y na M . Parę (M, g) nazywamy wtedy *rozmaitością Riemannowską*.

Odtąd będziemy pisać $g(X, Y)$ z pominięciem punktu p . Gdy metryka g jest ustalona, będziemy pisać nawet $\langle X, Y \rangle$.

Tę samą definicję możemy sformułować bardziej abstrakcyjnie, definiując wiązkę tensorową $T^*M \otimes T^*M$, której włóknami są (po odpowiednim utożsamieniu) przestrzenie form dwuliniowych na przestrzeniach stycznych. Wtedy g jest po prostu gładkim cięciem tej wiązki, przy czym wymagamy dodatkowo symetrii i dodatniej określoności w każdym punkcie. Z tej perspektywy będziemy zresztą korzystać później.

Jeśli na $V \subseteq M$ mamy dane pola $e_1, \dots, e_n$ tworzące w każdym punkcie bazę przestrzeni stycznej, to gładkość g wystarczy sprawdzać na parach $g(e_i, e_j)$ (zadanie 2.4). W szczególności, gdy $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V$ jest parametryzacją, gładkość g sprowadza się do gładkości funkcji $g_{ij} = g(D\varphi(e_i), D\varphi(e_j))$. Można patrzeć na (g_{ij}) jako na gładką funkcję $(g_{ij}): U \rightarrow \text{Sym}_{n \times n}^+$ (o wartościach w dodatnio określonych macierzach symetrycznych $n \times n$).

Odnotujmy też, że metrykę można *przeciągać*, to znaczy metryka g na N wraz z immersją $F: M \rightarrow N$ pozwalają zdefiniować metrykę F^*g na M :

$$(F^*g)(X, Y) := g(DF(X), DF(Y)).$$

Gdy na M jest już jakaś metryka i akurat zgadza się z F^*g (co oznacza, że $DF_p: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ jest zawsze izometrią liniową), to F nazywamy izometrią. Inaczej, izometrią nazwiemy dyfeomorfizm $F: (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ spełniające $F^*g_N = g_M$. Podobnie definiujemy izometryczną immersję i izometryczne zanurzenie. Izometryczną submersję definiujemy, wymagając by DF_p było izometrią w obcięciu do $(\ker DF)^\perp \rightarrow TN$ (lub równoważnie, by $(DF_p)^*$ było izometrycznym włożeniem).

Przykład 2.8. Przekształcenie $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest izometryczną immersją dokładnie wtedy, gdy ma stałą prędkość, czyli $|\dot{\gamma}| \equiv \text{const}$.

2.3 Przykłady

Zacznijmy od najprostszych konstrukcji.

Przykład 2.9. Rozmaitościami Riemannowskimi są:

- (a) przestrzeń euklidesowa $(\mathbb{R}^n, g_e)$ ze standardowym iloczynem skalarnym g_e (utożsamienie $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ pozwala przenieść ten iloczyn na przestrzenie styczne);
- (b) przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ z dowolnym iloczynem skalarnym (daje to rozmaitość izometryczną z $(\mathbb{R}^n, g_e)$);
- (c) podrozmaitość $M \subseteq \mathbb{R}^n$ z metryką dziedziczną z $(\mathbb{R}^n, g_e)$ (tzn. otrzymaną przez obcięcie z $T\mathbb{R}^n$ do TM);
- (d) zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}^n$ z metryką zadaną przez funkcję gładką $(g_{ij}): U \rightarrow \text{Sym}_{n \times n}^+$
- (e) produkt rozmaitości Riemannowskich $(M \times N, g_M + g_N)$, gdzie metryka $g_M + g_N$ na produkcie dana jest wzorem $\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle_{M \times N} = \langle u_1, u_2 \rangle_M + \langle v_1, v_2 \rangle_N$ (przy utożsamieniu $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_pM \otimes T_qN$).

Przykład 2.10 (sfera). Kanoniczną metrykę Riemanna na sferze $\mathbb{S}^n(r)$ o promieniu r definiujemy poprzez zanurzenie

$$\mathbb{S}^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = r\}$$

i metrykę dziedziczną z $\mathbb{R}^{n+1}$. Odnotujmy, że dla dowolnych dwóch punktów $p, q \in \mathbb{S}^n$ istnieje izometria $F: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ posyłająca p na q , ponadto możemy zażądać, by DF_p posyłało wybrany wektor styczny na wybrany wektor styczny (tej samej długości). Izometrię taką uzyskujemy, obcinając odpowiednią izometrię liniową $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ (z zadania ?? można wywnioskować, że innych izometrii nie ma).

Przykład 2.11 (przestrzeń hiperboliczna). W przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$ rozważmy podrozmaitość

$$\mathbb{H}^n(r) = \{(x_0, x') \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 - |x'|^2 = r^2, x_0 > r\}.$$

Metryka Minkowskiego, czyli forma dwuliniowa $m(x, y) = -x_0y_0 + \langle x', y' \rangle$, w obcięciu do $T\mathbb{H}^n(r)$ okazuje się być dodatnio określona, więc zadaje metrykę Riemanna na $\mathbb{H}^n(r)$.

Przykład 2.12 (przestrzeń hiperboliczna raz jeszcze – model Poincarégo). Rozważmy półpłaszczyznę $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ z metryką $g(x) = \frac{r^2}{x_n^2} g_e$. Da się podać explicite izometrię między rozmaitościami (H, g) i $\mathbb{H}^n(r)$ (zadanie 2.8). W modelu Poincarégo łatwiej się przekonać, że jest to rozmaitość jednorodna. W przypadku $n = 2$ po utożsamieniu $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ izometriami są wszystkie homografie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ zadane przez macierze $SL(2, \mathbb{R})$. Dodajmy jeszcze, że rozmaitość (H, g) pojawia się w naturalnie w kontekście geometrii przestrzeni kul $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ (więcej można przeczytać w moim artykule *Hiperboliczna geometria przestrzeni kół*, [Delta 7/2024](#)).

Naturalną rodziną przykładów są powierzchnie obrotowe w $\mathbb{R}^3$. Otrzymujemy je, wybierając krzywą γ w $\mathbb{R}^2$ i obracając ją wokół jednej z osi. Poniższy przykład jest wyżej wymiarowym odpowiednikiem powierzchni obrotowej.

Przykład 2.13 (powierzchnia obrotowa). Niech $\gamma = (x, r): (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie gładką parametryzacją krzywej, przy czym $\dot{x} > 0$ oraz $r > 0$ dla wszystkich t . Określmy przekształcenie

$$\varphi: (0, T) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad \varphi(t, y) := (x(t), r(t)y).$$

Wówczas obrazem φ jest n -wymiarowa podrozmaitość $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, której metryka po przeciągnięciu ma postać

$$\varphi^* g_M = (\dot{x}^2 + \dot{r}^2) g_{\mathbb{R}} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

W szczególności, gdy γ ma prędkość jednostkową, otrzymujemy $\varphi^* g_M = g_{\mathbb{R}} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$.

Gdy mamy do czynienia z zamkniętą powierzchnią obrotową (to znaczy $r(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$), ostatni ze wzorów daje wewnętrzną interpretację opisanej konstrukcji: punkty w odległości t od punktu $0 \in M$ tworzą sferę o promieniu $r(t)$ (promień ma sens wewnętrzny, gdyż da się go odczytać z miary tej sfery). Ta interpretacja jest podstawą ogólniejszej konstrukcji *produktu skróconego* (polecam popularne omówienie w moim artykule *Do powierzchni obrotowych i jeszcze dalej*, [Delta 2/2025](#)).

Przykład 2.14 (produkt skrócony). Niech $h: (0, T) \rightarrow (0, \infty)$ będzie gładką funkcją. Na rozmaitości $M = (0, T) \times \mathbb{S}^{n-1}$ przyjmijmy metrykę

$$g := g_{\mathbb{R}} + h^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

Gdy h jest gładka w otoczeniu 0, $h(0) = 0$, $\dot{h}(0) = 1$ oraz $h^{(2k)}(0) = 0$ (dla $k \in \mathbb{N}$), to metrykę tę możemy przedłużyć do metryki na $[0, 1) \times \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$, czyli na kuli.

2.4 Zadania

Zadanie 2.1. Niech M, N, K będą trzema rozmaitościami gładkimi; na podzbiorach $\mathbb{R}^n$ przyjmujemy standardową strukturę gładką. Sprawdzić podstawowe własności przekształceń gładkich (wg Definicji 2.3):

- (a) Funkcja $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ (na otwartym podzbiorze $U \subseteq M$) jest przekształceniem gładkim wtedy i tylko wtedy, $f \in C^\infty(U)$.
- (b) Jeśli $h: U \rightarrow V$ jest gładką mapą (w sensie Definicji 2.2) na otwartym podzbiorze $U \subseteq M$, to h oraz h^{-1} są gładkie.
- (c) Złożenie dwóch gładkich przekształceń $F: M \rightarrow N, G: N \rightarrow K$ jest gładkie.
- (d) Każde gładkie przekształcenie $F: M \rightarrow N$ jest ciągłe.
- (e) Jeśli $g: U_M \rightarrow V_M, h: U_N \rightarrow V_N$ są gładkimi mapami na podzbiorach M i N , to funkcja $F: U_M \rightarrow U_N$ jest gładka wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadająca jej funkcja $\tilde{F}: V_M \rightarrow V_N$ (dana przez $\tilde{F} = h \circ F \circ g^{-1}$) jest gładka w standardowym sensie.

Zadanie 2.2. Wykazać równoważność algebraicznej i geometrycznej definicji przestrzeni stycznej (Definicja 2.4). Mianowicie pokazać, że jeśli $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ jest gładką krzywą spełniającą $\gamma(0) = p$, to przekształcenie

$$D_\gamma: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad D_\gamma(f) := (f \circ \gamma)'(0)$$

jest różniczkowaniem, a ponadto $D_{\gamma_1} = D_{\gamma_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

Zadanie 2.3. Sprawdzić, że wiązka styczna TM oraz wiązka normalna $T^\perp M$ podrozmaitości gładkiej $M \subseteq \mathbb{R}^n$ są wiązkami wektorowymi w sensie Definicji 2.6.

Zadanie 2.4. Wykazać, że jeśli $e_1, \dots, e_n$ jest gładką bazą przestrzeni stycznej oraz funkcje $g(e_i, e_j)$ są gładkie, to funkcja $g(X, Y)$ jest gładka dla dowolnej pary pól stycznych X, Y (por. Definicja 2.7).

Zadanie 2.5. Uzasadnić, że jeśli produkt skręcony z metryką $g := g_{\mathbb{R}} + h^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ pochodzi od konstrukcji powierzchni obrotowej, to $|h| < 1$. Skonstruować papierowe modele dla metryki odpowiadającej funkcji $h(t) = at$, w zależności od parametru $a > 0$.

Zadanie 2.6. W zależności od $k \in \mathbb{R}$ rozwiązać równanie zwyczajne

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0, \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie to oznaczamy przez $\text{sn}_k(t)$. Przekonać się, że metrykę produktu skręconego $g_{\mathbb{R}} + \text{sn}_k^2(t)g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ można przedłużyć do metryki na sferze (gdy $k > 0$) lub na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (gdy $k \leq 0$).

Uwaga. Otrzymaną tu rozmaitość $(M, g_{\mathbb{R}} + \text{sn}_k^2(t)g_{\mathbb{S}^{n-1}})$ będziemy nazywać *przestrzenią modelową o krzywiznie k* i oznaczać przez S_k^n .

Zadanie 2.7. Przekonać się, że przestrzenie modelowe S_k^n odpowiadają znanym nam rozmaitościom: sferze, przestrzeni euklidesowej i przestrzeni hiperbolicznej. Wykazać mianowicie, że następujące przekształcenia są izometriami:

- (a) $F: S_{1/r^2}^n \rightarrow S^n(r)$, $F(t, y) = r(\cos(t), \sin(t) \cdot y)$;
- (b) $F: S_0^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(t, y) = ty$;
- (c) $F: S_{-1/r^2}^n \rightarrow \mathbb{H}^n(r)$, $F(t, y) = r(\cosh(t), \sinh(t) \cdot y)$.

Zadanie 2.8 (model Poincarégo). Rozważmy półprzestrzeń $M = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ z metryką $g = \frac{1}{x_n^2} g_e$. Znaleźć izometrię między (M, g) a przestrzenią hiperboliczną $\mathbb{H}^n(1)$.

Wskazówka. Izometrię taką można uzyskać poprzez złożenie dwóch izometrii skonstruowanych w [Lee97, Prop. 3.5]

Rozdział 3

Twierdzenia o zanurzeniu

3.1 Szkic problematyki

Każda podrozmaitość w $\mathbb{R}^n$ jest przykładem rozmaitości abstrakcyjnej, a jeśli wyposażyć ją w metrykę dziedziczoną z $\mathbb{R}^n$, to również przykładem rozmaitości Riemanna. W przeciwną stronę, abstrakcyjne rozmaitości można różnie *realizować* jako podrozmaitości $\mathbb{R}^n$.

Definicja 3.1. Powiemy, że gładkie przekształcenie między dwiema rozmaitościami

- (a) $F: M \rightarrow N$ jest immersją, jeśli pochodna $DF_p: T_pM \rightarrow T_pN$ jest włożeniem liniowym dla każdego $p \in M$ (czyli ma rząd równy wymiarowi M);
- (b) $F: M \rightarrow N$ jest zanurzeniem, jeśli jest immersją oraz homeomorfizmem na swój obraz;
- (c) $F: (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ jest zanurzeniem izometrycznym, jeśli jest zanurzeniem oraz $DF_p: T_pM \rightarrow T_pN$ jest izometrią liniową dla każdego $p \in M$ (czyli F jest homeomorfizmem na obraz oraz $F^*g_N = g_M$).

Od teraz niech M będzie zwartą n -wymiarową rozmaitością Riemannowską (bez brzegu). Odpowiemy na następujące pytania:

- Czy istnieje immersja $M \rightarrow \mathbb{R}^d$?
- Czy istnieje zanurzenie $M \rightarrow \mathbb{R}^d$?
- Czy istnieje zanurzenie izometryczne $M \rightarrow \mathbb{R}^d$?

Na każde z nich odpowiedź jest twierdząca; w pierwszych dwóch przypadkach mówi o tym twierdzenie Whitneya (Twierdzenie 3.3, [Bre93, Th. 10.7], [Lee13, Ch. 6]), a w trzecim przypadku twierdzenie Nasha:

Twierdzenie 3.2 (Nasha o zanurzeniu izometrycznym). *Dla każdej zwartej n -wymiarowej rozmaitości Riemanna (M, g) istnieje zanurzenie izometryczne w przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^d, g_e)$ dla odpowiednio dużego $d \in \mathbb{N}$.*

Ułatwimy sobie pracę, zakładając zwartość M (jak wyżej), podczas gdy twierdzenia te pozostają prawdziwe dla rozmaitości zupełnych. Nie będziemy też dbali o to, jak duży jest uzyskany wymiar d , a nawet, czy da się go dobrać w sposób zależny jedynie od n .

Istnieje immersja $M \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ (gdy $n > 1$) oraz zanurzenie $M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Oba te wyniki są optymalne, jak można się przekonać na przykładzie butelki Kleina czy płaszczyzny rzutowej, które mają immersję w $\mathbb{R}^3$ i zanurzenie w $\mathbb{R}^4$, ale nie niżej. Zanurzenie izometryczne jest możliwe dla $d = \max(n(n+5)/2, n(n+3)/2 + 5)$ i nie jest w ogólności możliwe dla $d < n(n+1)/2$, ale między znanymi wynikami pozytywnymi i negatywnymi jest luka.

Gdyby żądać jedynie zanurzenia izometrycznego klasy C^1 (zamiast C^∞), to dzieje się rzecz dziwna. Twierdzenie Nasha–Kuipera (Twierdzenie 3.17) mówi, że każde zanurzenie $M \rightarrow \mathbb{R}^d$ skracające odległości daje się zaburzyć (w normie L^∞) do zanurzenia izometrycznego, o ile $d \geq n + 1$.

Dzięki takiemu podejściu dowód będzie mógł się skupić na istocie problemu zanurzenia izometrycznego. Przedstawiony dowód w głównej części będzie się opierał głównie na notatkach Terence’a Tao [Tao16], które są napisane właśnie w takim duchu. Pożyteczne szczegóły można znaleźć w artykule Yanga [Yan98]. Strategia konstrukcji zanurzenia izometrycznego $F: M \rightarrow \mathbb{R}^d$ odpowiada nazwom następnych sekcji, a więc opiera się na następujących krokach:

- 1) Znajdujemy zanurzenie $F: M \rightarrow \mathbb{R}^d$ (jest to twierdzenie Whitneya o zanurzeniu).
- 2) Sprowadzamy problem do przypadku torusa $M = T^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n = (\mathbb{S}^1)^n$ z dowolną metryką.
- 3) Znajdujemy zanurzenie $F: T^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ *prawie* izometryczne, przez co redukujemy zagadnienie do problemu lokalnego: mając daną małą (w sensie C^∞) formę h , znaleźć zaburzenie $\tilde{F}$ spełniające $\tilde{F}^*g_e = h + F^*g_e$.
- 4) Rozwiązujemy problem lokalny, sprowadzając go do rozwiązania pewnego równania eliptycznego (trik Gunthera).
- 5) Na koniec pochylimy się nad dowodem odpowiedniego twierdzenia o regularności dla równań eliptycznych.

3.2 Twierdzenie Whitneya o zanurzeniu

Twierdzenie 3.3 (Whitneya o zanurzeniu). *Dla każdej n -wymiarowej zwartej rozmaitości M istnieje zanurzenie gładkie $M \rightarrow \mathbb{R}^d$ dla pewnego $d \in \mathbb{N}$.*

Oczywiste jest, że każdą rozmaitość da się zanurzyć kawałkami w $\mathbb{R}^n$ – taką możliwość dają po prostu mapy na rozmaitości. Potrzebujemy jednak jednego przekształcenia. W tym kontekście pożyteczna jest konstrukcja *parowania*: dwie funkcje $u_1: M \rightarrow \mathbb{R}^{d_1}$, $u_2: M \rightarrow \mathbb{R}^{d_2}$ można połączyć w jedną $(u_1, u_2): M \rightarrow \mathbb{R}^{d_1+d_2}$, która dziedziczy dobre własności obu u_1, u_2 . Strategii wielokrotnego parowania użyjemy poniżej (szczegóły podane za [Bre93, Th. 10.7]), jak i w dalszych krokach dowodu.

Dowód. Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie U i mapa $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wybierzmy mniejsze otoczenie V zawarte w U wraz z domknięciem, oraz funkcję wycinającą:

$$\lambda \in C^\infty(M), \quad \lambda = 1 \text{ na } V, \quad \lambda = 0 \text{ poza } U.$$

Konstruujemy ją, wykorzystując mapę h do otrzymania funkcji $\lambda \in C_c^\infty(U)$, którą następnie przedłużamy zerem poza U . Funkcja $f := \lambda \cdot h$ również przedłuża się do gładkiej funkcji $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dzięki zwartości możemy pokryć M skończoną liczbą takich otoczeń $V_1, \dots, V_k$ (wraz z mapami $h_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ oraz funkcjami $\lambda_i, f_i = \lambda_i h_i$). Rozważmy przekształcenie:

$$F: M \rightarrow (\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}^k, \quad F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_k(x)).$$

Odnajdujemy, że różniczka DF jest parowaniem odpowiednich różniczek, z czego wynika, że F jest immersją. Istotnie, jeśli wybierzemy jakiś punkt $p \in M$, to leży on w pewnym ze zbiorów V_i . Na tym zbiorze zachodzi $f_i = h_i$, a więc już ta składowa daje pełny rząd różniczki.

Przekształcenie F jest też różnowartościowe. Faktycznie, załóżmy, że $F(p) = F(q)$. Ponownie dobierzmy i tak, by $p \in V_i$, a wtedy $\lambda_i(q) = \lambda_i(p) = 1$. To oznacza, że q również leży w U_i , a ponadto

$$h_i(q) = f_i(q) = f_i(p) = h_i(p).$$

Z różnowartościowości h_i w U wynika równość $p = q$. W ten sposób wykazaliśmy, że F jest ciągłą bijekcją z przestrzeni zwartej M , więc w konsekwencji jest homeomorfizmem na swój obraz. To kończy dowód. $\square$

3.3 Redukcja do przypadku torusa

Stwierdzenie 3.4. *Dowolna zwarta rozmaitość Riemanna (M, g_M) posiada zanurzenie izometryczne w torus $(\mathbb{T}^d, g_T)$, jeśli odpowiednio dobierze się wymiar d oraz metrykę g_T .*

Stwierdzenie to sprowadza cały problem do do przypadku torusa, gdyż dowolne zanurzenie izometryczne $(\mathbb{T}^d, g_T)$ będzie pociągało za sobą również zanurzenie izometryczne (M, g_M) .

Dowód. Twierdzenie Whitneya daje nam zanurzenie $F: M \rightarrow \mathbb{R}^d$. Używając odpowiedniego przesunięcia i skalowania, możemy przyjąć, że obraz $F(M)$ leży w kostce otwartej $(0, 1)^d$. Przechodząc do ilorazu $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$, otrzymujemy zanurzenie $F: M \rightarrow \mathbb{T}^d$. W miejsce metryki euklidesowej na $\mathbb{T}^d$ konstruujemy teraz taką metrykę g_T , by F było zanurzeniem izometrycznym $(M, g) \rightarrow (\mathbb{T}^d, g_T)$.

Dla uproszczenia oznaczeń przyjmijmy utożsamienie $M = F(M)$. Na produkcie $M \times \mathbb{R}^d$ przyjmijmy metrykę produktową $g_M \times g_e$, w ten sposób otrzymując też metrykę $g_{T^\perp M}$ na wiązce normalnej $T^\perp M \subseteq M \times \mathbb{R}^d$. Rozważmy na tyle małą wartość $\varepsilon > 0$, by otoczenie tubularne M_ε nadal było zawarte w $(0, 1)^d$, a jednocześnie spełniało warunek z Twierdzenia 1.5. Wówczas mamy dyfeomorfizm $\Phi: M_\varepsilon \rightarrow U_\varepsilon$ na otwarty podzbiór $U_\varepsilon \subseteq T^\perp M$. Przez przeciągnięcie $\Phi^* g_{T^\perp M}$ otrzymujemy metrykę na M_ε , dla której włożenie $(M, g) \subseteq (M_\varepsilon, \Phi^* g_{T^\perp M})$ jest izometryczne. Pozostaje przedłużyć tę metrykę na cały torus.

W tym celu dobierzmy funkcję wycinającą $\eta_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ spełniającą $\eta_0(y) \equiv 1$ dla $|y| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ i $\eta_0(y) \equiv 0$ dla $|y| \geq \frac{2}{3}\varepsilon$. Wówczas $\eta(x) := \eta_0(\Phi^y(x))$ daje funkcję wycinającą na $\mathbb{R}^d$ i możemy zdefiniować

$$g_T(x) := \eta(x)\Phi^*g_{T^\perp M} + (1 - \eta(x))g_e.$$

Metryka ta jest dobrze określona, gdyż człon zdefiniowany jedynie na M_ε zostaje przedłużony zerem, a ponadto spełnia:

$$\begin{cases} g_T = g_{T^\perp M} & \text{na } M_{\varepsilon/3}, \\ g_T = g_e \text{ poza } M_\varepsilon, \\ g_T(x) \in \text{Sym}_{d \times d}^+ & \text{dla } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

dzięki czemu włożenie $(M, g) \rightarrow (\mathbb{R}^d, g_T)$ jest izometryczne. Ponieważ zaburzyliśmy metrykę euklidesową jedynie na zwartym podzbiore $(0, 1)^d$, określiliśmy w ten sposób metrykę również na torusie $\mathbb{T}^d$. $\square$

3.4 Redukcja do problemu lokalnego

Dzięki Stwierdzeniu 3.4 do rozważenia mamy jedynie przypadek zanurzenie torusa $(\mathbb{T}^n, g)$ w pewną przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^d, g_e)$. Ponownie użyteczna będzie konstrukcja parowania (u_1, u_2) dwóch przekształceń. Zwróćmy uwagę, jak metryka zachowuje się przy parowaniu:

$$(u_1, u_2)^*g_e = u_1^*g_e + u_2^*g_e. \quad (3.1)$$

Istotnie, $D(u_1, u_2) = (Du_1, Du_2)$, więc iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ działa osobno na obie składowe. Konsekwencją (3.1) jest, że modyfikacja zanurzenia F w kierunku „powiększenia” F^*g_e jest łatwiejsza niż modyfikacja w przeciwną stronę. Z tego powodu będziemy pracować z zanurzeniami *krótkimi*:

Definicja 3.5. Przekształcenie $F: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest *krótkie*, jeśli zachodzi nierówność $F^*g_e < g$ na $\mathbb{T}^n$. Innymi słowy, jeśli $|DF_x \cdot v|_{g_e} < |v|_g$ dla wszystkich $x \in \mathbb{T}^n$ i $0 \neq v \in T_x M$.

Na potrzeby rozważań w przypadku lokalnym (w następnej sekcji) będzie użyteczne, by otrzymane zanurzenie było *wolne* w sensie poniższej definicji.

Definicja 3.6. Przekształcenie $F: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest *wolne*, jeśli pochodne cząstkowe $\partial_i F$ (dla $i = 1, \dots, n$) oraz $\partial_{ij} F$ (dla $1 \leq i \leq j \leq n$) stanowiły liniowo niezależny układ $n + \frac{n(n+1)}{2}$ wektorów w $\mathbb{R}^d$ dla każdego punktu $x \in \mathbb{T}^n$.

Warto odnotować, że jeśli przekształcenie $F: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest wolne, to $d \geq n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$, co częściowo wyjaśnia, skąd pochodzą ograniczenia na wymiar w najlepszych znanych wariantach twierdzenia Nasha. Zauważmy też, że warunek liniowej niezależności można sformułować następująco: jeśli zeruje się pewna kombinacja liniowa $\sum_i a_i \partial_i F + \sum_{ij} b_{ij} \partial_{ij} F$ z symetrycznymi współczynnikami b_{ij} (tj. $b_{ij} = b_{ji}$), to jest to kombinacja trywialna.

Lemat 3.7. Dla dowolnej metryki g na torusie $\mathbb{T}^n$ dla pewnego d istnieje krótkie wolne zanurzenie $(\mathbb{T}^n, g) \rightarrow (\mathbb{R}^d, g_e)$.

Dowód. Jak się okaże, spełnimy tezę dla $d = n(2n+3)$. Zaczniemy od zanurzenia $F: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ otrzymanego przez utożsamienie $\mathbb{S}^1$ z podzbiorem $\mathbb{R}^2$. Następnie złożymy je z zanurzeniem *Veronese* (dla $m = 2n$)

$$V: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m + \frac{m(m+1)}{2}}, \quad V(x_1, \dots, x_m) := ((x_i)_{1 \leq i \leq m}, (x_i x_j)_{1 \leq i < j \leq m}).$$

Jest jasne, że V jest wolne. Z tego oraz immersyjności F można wywnioskować, że złożenie $G = V \circ F$ też jest wolne. Dowód sprowadza się do algebry liniowej (oraz wzoru na pochodną złożenia oraz). Obliczamy:

$$\begin{aligned} \partial_i G &= \sum_k \partial_k V \cdot \partial_i F^k, \\ \partial_{ij} G &= \sum_k \partial_k V \cdot \partial_{ij} F^k + \sum_{k, \ell} \partial_{kl} V \cdot \partial_i F^k \partial_j F^\ell. \end{aligned}$$

Jeśli pewna kombinacja liniowa ze współczynnikami a_i oraz b_{ij} (z warunkiem symetrii $b_{ij} = b_{ji}$) jest zerowa, to mamy

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i a_i \partial_i G + \sum_{i, j} b_{ij} \partial_{ij} G \\ &= \sum_k \partial_k V \cdot \underbrace{\left(\sum_i a_i \partial_i F^k + \sum_{i, j} b_{ij} \partial_{ij} F^k \right)}_{\alpha_k :=} + \sum_{k, \ell} \partial_{kl} V \cdot \underbrace{\left(\sum_{i, j} b_{ij} \partial_i F^k \partial_j F^\ell \right)}_{\beta_{k\ell} :=}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zerową kombinację liniową $\partial_k V$ oraz $\partial_{kl} V$ ze współczynnikami $\alpha_k, \beta_{k\ell}$ (z symetrią $\beta_{k\ell} = \beta_{\ell k}$). Z wolności V wynika teraz, że wszystkie te współczynniki są zerowe. Z warunku $\beta_{k\ell} = 0$ dla ustalonego k odczytujemy, że wektor o współrzędnych $X^j = \sum_i b_{ij} \partial_i F^k$ jest prostopadły do wektorów $\nabla F^1, \dots, \nabla F^m$. Skoro jednak różniczka F jest pełnego rzędu, to gradienty te rozpinają przestrzeń $\mathbb{R}^n$, a więc X jest wektorem zerowym. To oznacza równość $\sum_i b_{ij} \partial_i F^k = 0$ (dla wszystkich j, k), z której ponownie możemy wywnioskować $b_{ij} = 0$ dla wszystkich i . Możemy teraz wrócić do równości $\alpha_k = 0$ – skoro współczynniki b_{ij} są zerowe, to współczynniki a_i również muszą być. To kończy dowód wolności $G = V \circ F$.

Otrzymane wolne przekształcenie G jest oczywiście nadal zanurzeniem. Żeby było krótkie, wystarczy je odpowiednio przeskalować – rozważmy

$$H_\varepsilon: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad H_\varepsilon(x) := \varepsilon G(x).$$

Oczywiście H_ε jest wolnym zanurzeniem niezależnie od $\varepsilon > 0$, a dla odpowiednio małej wartości otrzymujemy $H_\varepsilon^* g_e < g$ na $\mathbb{T}^n$. Żeby się o tym przekonać, odnotujmy, że funkcja $f(x, v) := \frac{|DG_x \cdot v|_{g_e}}{|v|_g}$ jest ciągłą na $T\mathbb{T}^n$ (poza przypadkiem $v = 0$), więc na zwartym zbiorze

$$\{(x, v) \in T\mathbb{T}^n : |v|_{g_e} = 1\} \cong \mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$$

jest ograniczona – wystarczy wziąć $\varepsilon > 0$ mniejsze od odwrotności tego ograniczenia. $\square$

W dalszej części tej sekcji uzyskamy rozwiązanie przybliżone (czyli spełniające $F^* g_e \approx g$) poprzez parowanie powyższego krótkiego wolnego zanurzenia. Uzyskane w ten sposób przekształcenie na pewno będzie więc zanurzeniem (nawet wolnym).

Stwierdzenie 3.8 (rozwiązanie przybliżone). *Dana jest metryka g na torusie $\mathbb{T}^n$. Wówczas istnieje gładka funkcja $h: \mathbb{T}^n \rightarrow \text{Sym}_{n \times n}$ o tej własności, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zanurzenie $F: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ spełniające $F^* g_e = g + \varepsilon^2 h$.*

Dowód. Przyjmijmy krótkie zanurzenie $F_0: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ z Lematu 3.7. Idea konstrukcji opiera się na parowaniu F_0 z *ciasnymi spiralami*. Otóż dla ustalonego wektora $v \in \mathbb{R}^n$ oraz wartości $\varepsilon > 0$ możemy rozważyć funkcję

$$f_\varepsilon^v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_\varepsilon^v(x) := \varepsilon \left(\cos \left(\frac{x \cdot v}{\varepsilon} \right), \sin \left(\frac{x \cdot v}{\varepsilon} \right) \right)$$

i obliczyć, że $(f_\varepsilon^v)^* g_e = v \otimes v$. Każdą macierz dodatnio określoną można przedstawić jako sumę $\sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i$ (czyli zdiagonalizować) dla n odpowiednio dobranych wektorów, a więc przez parowanie F z n odpowiednimi funkcjami postaci f_ε^v jesteśmy w stanie uzyskać równość $F^* g_e = g$ w jednym wybranym punkcie.

By uzyskać przybliżoną równość wszędzie, należy dokonać diagonalizacji w sposób ciągły i zastosować odpowiednie funkcje wycinające. Obliczmy więc, jaki efekt daje domnożenie f_ε^v przez funkcję skalarną η :

$$\begin{aligned} \partial_i(\eta f_\varepsilon^v) &= \eta v_i \left(-\sin \left(\frac{x \cdot v}{\varepsilon} \right), \cos \left(\frac{x \cdot v}{\varepsilon} \right) \right) + \varepsilon \partial_i \eta \left(\cos \left(\frac{x \cdot v}{\varepsilon} \right), \sin \left(\frac{x \cdot v}{\varepsilon} \right) \right), \\ ((\eta f_\varepsilon^v)^* g_e)_{ij} &= g_e(\partial_i(\eta f_\varepsilon^v), \partial_j(\eta f_\varepsilon^v)) \\ &= \eta^2 v_i v_j + \varepsilon^2 \partial_i \eta \partial_j \eta. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zatem $(\eta f_\varepsilon^v)^* g_e = \eta^2 v \otimes v + \varepsilon^2 \nabla \eta \otimes \nabla \eta$. Odnotujmy, że aby iloczyn ηf_ε^v był dobrze określony na torusie $\mathbb{T}^n$ (a nie tylko na $\mathbb{R}^n$), potrzeba, by funkcja η miała *mały* nośnik, to znaczy nośnik niezawierający dwóch punktów różniących się o element $\mathbb{Z}^n$.

Lemat 3.9 pozwala nam przedstawić metrykę $g' := g - F^* g_e$ w postaci

$$g'(x) = \sum_{j=1}^N \eta_j^2(x) v_j \otimes v_j$$

dla pewnego ciągu wektorów $v_j \in \mathbb{S}^{n-1}$ oraz funkcji $\eta_j \in C_c^\infty(\mathbb{T}^n)$ o *małym* nośniku. Oznaczając przez F sparowanie F_0 oraz N funkcji $\eta_j f_\varepsilon^{v_j}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} F^* g_e &= F_0^* g_e + \sum_{j=1}^N (\eta_j f_\varepsilon^{v_j})^* g_e \\ &= F_0^* g_e + \sum_{j=1}^N \eta_j^2 v_j \otimes v_j + \varepsilon^2 \nabla \eta_j \otimes \nabla \eta_j \\ &= F_0^* g_e + g' + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^N \nabla \eta_j \otimes \nabla \eta_j. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę definicję g' , wystarczy teraz przyjąć $h := \sum_{j=1}^N \nabla \eta_j \otimes \nabla \eta_j$, by spełnić tezę Stwierdzenia. $\square$

Dowód powyższego Stwierdzenia 3.8 zawiera już główną ideę dowodu Twierdzenia Nasha–Kuipera (Twierdzenie 3.17). Sprowadza się ona do dodawania ciasnych spirali, ale w większej liczbie i w bardziej uważny sposób.

Sekcję tę uzupełnimy dowodem technicznego lematu pozwalającego na diagonalizację w sposób ciągły. Przypomnijmy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest *mały*, jeśli przekształcenie ilorazowe $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$ jest różnowartościowe w obcięciu do A .

Lemat 3.9. *Dana jest gładka funkcja $g': \mathbb{T}^n \rightarrow \text{Sym}_{n \times n}^+$. Wówczas istnieje ciąg wektorów $v_j \in \mathbb{S}^{n-1}$ oraz funkcji $\eta_j \in C_c^\infty(\mathbb{T}^n)$ o małym nośniku, dla których*

$$g'(x) = \sum_{j=1}^N \eta_j^2(x) v_j \otimes v_j.$$

Dowód. Z twierdzenia o diagonalizacji wiemy, że każdy element $\text{Sym}_{n \times n}^+$ daje się rozłożyć (być może niejednoznacznie) jako suma n składników $\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 v_j \otimes v_j$. Wystarczy więc skonstruować ciąg macierzy $h_k \in \text{Sym}_{n \times n}^+$ oraz funkcji $\theta_k \in C_c^\infty(\mathbb{T}^n)$ (o małych nośnikach) spełniający

$$g'(x) = \sum_{k=1}^N \theta_k^2(x) h_k.$$

Wówczas wystarczy przyjąć funkcje η w postaci $\theta_k(x) \alpha_j$.

Zbiór $\text{Sym}_{n \times n}^+$ jest otwartym podzbiorem $\text{Sym}_{n \times n} \cong \mathbb{R}^m$ (dla $m = \frac{n(n+1)}{2}$). Dla każdego punktu $x \in \mathbb{T}^n$ można więc tak wybrać macierze $h_0, \dots, h_m \in \text{Sym}_{n \times n}^+$, by $g'(x)$ znajdowało się we wnętrzu Δ ich otoczki wypukłej. Podobnie $g'(y) \in \Delta$ dla y z pewnego otwartego otoczenia U – możemy przy tym przyjąć, że U ma średnicę mniejszą od 1 (jest więc małym zbiorem). Funkcja

$$\mathbb{R}^{m+1} \ni t \mapsto \sum_{j=0}^m t_j h_j \in \text{Sym}_{n \times n}$$

jest afiniczną bijekcją między standardowym m -sympleksem w $\mathbb{R}^{m+1}$ a sympleksem $\Delta \subseteq \text{Sym}_{n \times n}^+$, więc po wzięciu odwrotności (oraz pierwiastka kwadratowego) otrzymujemy gładkie funkcje $\theta_j: \Delta \rightarrow (0, 1)$ spełniające

$$h = \sum_{j=0}^m \theta_j^2(h) h_j \quad \text{dla } h \in \Delta.$$

Ich złożenie z g' daje rozkład $g'(y) = \sum_j \theta_j(g'(y))^2 h_j$ dla $y \in U$. Pozostaje nam odpowiednio skleić otrzymane funkcje. Ponieważ zbiory otwarte U jak wyżej tworzą pokrycie $\mathbb{T}^n$, możemy wybrać podpokrycie skończone U_k oraz wpisany w nie rozkład jedynki λ_k – żądamy $\lambda_k \in C_c^\infty(U_k)$ oraz $\sum_k \lambda_k^2 = 1$. Wówczas

$$g'(x) = \sum_k \sum_{j=0}^m \lambda_k(x)^2 \theta_j^{(k)}(g'(x))^2 h_j^{(k)} \quad \text{dla } x \in \mathbb{T}^n.$$

Zgodnie z wcześniejszą obserwacją, diagonalizacja każdej z macierzy $h_j^{(k)}$ daje nam żądany rozkład g' . $\square$

3.5 Problem lokalny oraz dowód twierdzenia Nasha

Dotychczasowe rozważania redukują problem zanurzenia izometrycznego do problemu *lokalnego*, to znaczy do znalezienia niewielkiego zaburzenia już skonstruowanego zanurzenia.

Stwierdzenie 3.10 (rozwiązanie lokalne). *Dane jest wolne przekształcenie $F: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ oraz gładka funkcja $h: \mathbb{T}^n \rightarrow \text{Sym}_{n \times n}$. Wówczas istnieje $\varepsilon > 0$ o tej własności, że dla każdego $|t| < \varepsilon$ można znaleźć przekształcenie $G: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ spełniające $G^* g_e = F^* g_e + th$.*

Przekonajmy się, że rzeczywiście powyższe Stwierdzenie pozwala zakończyć dowód twierdzenia Nasha:

Przed właściwym dowodem warto rozważyć następującą naiwną ideę. Dzięki Stwierdzeniu 3.8 dla każdego $\varepsilon > 0$ jesteśmy w stanie znaleźć wolne zanurzenie F spełniające $F^*g_e = g + \varepsilon^2h$ (dla pewnego h). Następnie dla odpowiednio małego $\varepsilon > 0$ Stwierdzenie 3.10 pozwala nam znaleźć zaburzenie G spełniające $G^*g_e = F^*g_e - \varepsilon^2h$, a więc $G^*g_e = g$, jak żądaliśmy. Gdzie jest błąd w tym rozumowaniu?

Dowód Twierdzenia 3.2. Zgodnie z Lematem 3.4 wystarczy dowieść twierdzenia w przypadku torusa $(\mathbb{T}^n, g)$. Rozważmy krótkie wolne zanurzenie $F: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ skonstruowane w ramach Lematu 3.7. Oznaczmy metrykę Riemanna $g' := g - F^*g_e$ i dobierzmy do niej funkcję $h: \mathbb{T}^n \rightarrow \text{Sym}_{n \times n}$ zgodnie ze Stwierdzeniem 3.8 – dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje wtedy zanurzenie H spełniające $H^*g_e = g' + \varepsilon^2h$. Ze Stwierdzenia 3.10 otrzymujemy istnienie przekształcenia $G: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ dającego $G^*g_e = F^*g_e - \varepsilon^2h$, jeśli tylko $\varepsilon > 0$ jest odpowiednio mały. Dla takiego ε dobieramy H jak wyżej i wreszcie definiujemy przekształcenie (G, H) . Skoro H jest zanurzeniem, to sparowanie również, a jednocześnie

$$(G, H)^*g_e = G^*g_e + H^*g_e = (F^*g_e - \varepsilon^2h) + (g - F^*g_e + \varepsilon^2h) = g,$$

jak żądaliśmy. $\square$

Pozostaje dowieść Stwierdzenia 3.10. Zaczniemy od wyjaśnienia, w jaki sposób wykorzystamy warunek, że F jest przekształceniem wolnym. Od tej pory dla skrótów pochodne cząstkowe funkcji F będziemy zapisywać jako F_i zamiast $\partial_i F$.

Lemat 3.11. *Niech $F: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie przekształceniem wolnym. Wówczas dla każdego punktu $x \in \mathbb{T}^n$ i wektora $(q_i, q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n + \frac{n(n+1)}{2}}$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $v \in \text{span}(F_i(x), F_{ij}(x))$ układu równań*

$$\begin{cases} F_i(x) \cdot v = q_i & \text{dla } i = 1, \dots, n, \\ F_{ij}(x) \cdot v = q_{ij} & \text{dla } 1 \leq i \leq j \leq n. \end{cases}$$

Przyporządkowanie $(q_i, q_{ij}) \mapsto v$ jest liniowe, a ponadto gładko zależne od x , to znaczy jest zadane przez gładką funkcję

$$M: \mathbb{T}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^{n + \frac{n(n+1)}{2}}, \mathbb{R}^d).$$

Dowód. Dla każdego $x \in \mathbb{T}^n$ oznaczmy przestrzeń $V_x := \text{span}(F_i(x), F_{ij}(x))$. Zgodnie z założeniem ma ona wymiar $n' := n + \frac{n(n+1)}{2}$. Rozważmy teraz zależne od x przekształcenia

$$B_x: \mathbb{R}^{n'} \rightarrow V_x, \quad B_x(q_i, q_{ij}) := \sum_i q_i F_i(x) + \sum_{i \leq j} q_{ij} F_{ij}(x),$$

$$C_x: V_x \rightarrow \mathbb{R}^{n'}, \quad C_x(v) := (F_i(x) \cdot v, F_{ij}(x) \cdot v),$$

$$D_x: \mathbb{R}^{n'} \rightarrow \mathbb{R}^{n'}, \quad D_x(q) := C_x B_x(q).$$

Ponieważ B_x i C_x są wyrażone gładkimi wzorami, D jest gładkim przekształceniem z $\mathbb{T}^n$ w $L(\mathbb{R}^{n'}, \mathbb{R}^{n'})$, a B jest gładkie jako przekształcenie w $L(\mathbb{R}^{n'}, \mathbb{R}^d)$. Przy tym oba przekształcenia B_x, C_x są liniowymi izomorfizmami (w przypadku C_x warto zwrócić uwagę na trywialność jądra), więc D przyjmuje wartości w $GL(\mathbb{R}^{n'})$. Składając je z gładkim operatorem odwracania $GL(\mathbb{R}^{n'}) \rightarrow GL(\mathbb{R}^{n'})$, ponownie otrzymujemy gładkie przekształcenie. Wystarczy więc zadać

$$M_x := B_x D_x^{-1} = C_x^{-1}.$$

$\square$

Dowód Stwierdzenia 3.10 (konstrukcja rozwiązania lokalnego). Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy, że mamy do rozwiązania równanie $G^*g_e = F^*g_e + h$, pamiętając, że h jest małą wielokrotnością zadanej funkcji h_0 . We współrzędnych można je zapisać w postaci

$$\partial G_i \cdot \partial G_j = F_i \cdot F_j + h_{ij} \quad \text{dla } i, j = 1, \dots, n.$$

Przyjmijmy ponadto oznaczenie $G = F + v$, gdzie v jest szukanym zaburzeniem. Równanie możemy wtedy (po zredukowaniu członu $F_i \cdot F_j$) przepisać w formie

$$F_i \cdot \partial_j v + F_j \cdot \partial_i v + \partial_i v \cdot \partial_j v = h_{ij} \quad \text{dla } i, j = 1, \dots, n.$$

Chcąc wykorzystać wolność F , chcielibyśmy wyrazić równanie w terminach $F_i \cdot v$ oraz $F_{ij} \cdot v$, zastosujmy więc „całkowanie przez części” (czyli regułę Leibniza):

$$\partial_i(F_j \cdot v) + \partial_j(F_i \cdot v) - 2F_{ij} \cdot v + \partial_i v \cdot \partial_j v = h_{ij}. \quad (3.2)$$

Wprowadźmy oznaczenie na operatory pojawiające się wyżej:

$$\begin{aligned} (Lv)_{ij} &= F_i \cdot \partial_j v + F_j \cdot \partial_i v = \partial_i(F_j \cdot v) + \partial_j(F_i \cdot v) - 2F_{ij} \cdot v \\ Q(v, v)_{ij} &= \partial_i v \cdot \partial_j v, \end{aligned}$$

tak że (3.2) przyjmuje postać

$$Lv + Q(v, v) = h. \quad (3.3)$$

Operatory L i Q są pierwszego rzędu (tzn. są funkcjami $L, Q: C^{k+1} \rightarrow C^k$), przy czym L jest liniowy, a Q kwadratowy. Dzięki wolności F możemy skonstruować prawostronną odwrotność L , mianowicie w oparciu o funkcję M z Lematu 3.11 definiujemy operator $M_0(f_{ij}) := -\frac{1}{2}M(0, f_{ij})$, otrzymując równość

$$(LM_0f)_{ij} = \partial_i(0) + \partial_j(0) - 2 \cdot (-\frac{1}{2}f_{ij}) = f_{ij}$$

dla dowolnej funkcji f o wartościach w $\text{Sym}_{n \times n}$. Odwrotność ta jest jednak rzędu zero (tzn. jest funkcją $M_0: C^k \rightarrow C^k$), a nie -1 . Związany z tym problem *straty pochodnych* (o którym niżej) motywuje nas do modyfikacji tego podejścia.

Naturalnym następnym krokiem jest szukanie rozwiązania postaci $v = M_0w$. Podstawiając takie rozwiązanie do (3.3), otrzymujemy równanie na w :

$$w = h - Q(M_0w, M_0w).$$

Jako że dla małych w kwadratowy wyraz $Q(M_0w, M_0w)$ jest jeszcze mniejszy, wydaje się, że przekształcenie $w \mapsto h - Q(M_0w, M_0w)$ powinno być kontrakcją (w odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej). To pociągałoby za sobą istnienie punktu stałego, a więc rozwiązanie równania. Niestety tak nie jest, gdyż operator $Q(M_0w, M_0w)$ jest rzędu 1 i rozważane przekształcenie *traci jedną pochodną* przy każdej iteracji.

Zamiast metody punktu stałego Nash stosował metodę Newtona, która jest szybciej zbieżna, ale w opisaney wyżej naiwnej formie również zawodzi. Jeśli jednak po każdym kroku metody Newtona zastosować odpowiedni operator wygładzania (z każdą iteracją bliższy identyczności), metoda okazuje się zbieżna. Wymyślona przez Nasha metoda okazała się pożyteczna w innych problemach zawierających podobną trudność i przeszła do historii jako metoda *iteracji Nasha–Mosera*.

Opisaną trudność ominiemy w oparciu o trik wymyślony przez Günthera [G91]. Polega on na znalezieniu rozkładu $Q = L\bar{Q}$, gdzie $\bar{Q}$ jest operatorem kwadratowym rzędu zerowego.

Wówczas (3.3) ma postać $L(v + \overline{Q}(v)) = h$, co możemy sprowadzić do $v + \overline{Q}(v) = Mh$. Ten ostatni problem można już rozwiązać metodą punktu stałego, bez problemu straty pochodnych.

By znaleźć rozkład $Q = L\overline{Q}$, rozważmy operator eliptyczny rzędu 2

$$A = -\Delta + 1, \quad \text{czyli} \quad Af = -\sum_{i=1}^n \partial_{ii} f + f,$$

i przyłożmy go do $Q(v, v)$:

$$\begin{aligned} A(\partial_i v \cdot \partial_j v) &= (\partial_i Av) \cdot \partial_j v + \partial_i v \cdot (\partial_j Av) - 2\nabla \partial_i v \cdot \nabla \partial_j v - \partial_i v \cdot \partial_j v \\ &= \partial_i (Av \cdot \partial_j v) + \partial_j (\partial_i v \cdot Av) - 2Av \cdot \partial_{ij} v - 2\nabla \partial_i v \cdot \nabla \partial_j v - \partial_i v \cdot \partial_j v. \end{aligned}$$

W powyższym rachunku uporządkowaliśmy wynik, korzystając ze wzoru na laplasjan iloczynu $\Delta(fg) = \Delta f \cdot g + f \cdot \Delta g + 2\nabla f \cdot \nabla g$ i izolując ostatni z tych członów. Następnie zastosowaliśmy „całkowanie przez części”, jak poprzednio. Jak się przekonamy w następnej sekcji, operator A posiada dobrze zdefiniowaną odwrotność A^{-1} (rzędu -2), która ponadto komutuje z ∂_i (jest to formalna konsekwencja przemienności A z ∂_i). Przykładając A^{-1} do obu stron otrzymanego wzoru, dostajemy więc

$$\begin{aligned} \partial_i v \cdot \partial_j v &= \partial_i Q_j(v, v) + \partial_j Q_i(v, v) - 2Q_{ij}(v, v), \\ \text{gdzie} \quad Q_i(v, v) &:= A^{-1}(Av \cdot \partial_i v), \\ Q_{ij}(v, v) &:= A^{-1}(Av \cdot \partial_{ij} v + \nabla \partial_i v \cdot \nabla \partial_j v + \tfrac{1}{2} \partial_i v \cdot \partial_j v). \end{aligned}$$

Dzięki temu rozkładowi możemy zapisać (3.2) jako

$$\partial_i(F_j \cdot v + Q_j(v, v)) + \partial_j(F_i \cdot v + Q_i(v, v)) - 2F_{ij} \cdot v - 2Q_{ij}(v, v) = h_{ij}.$$

Co kluczowe, operatory kwadratowe Q_i oraz Q_{ij} są rzędu 0 – ich definicja uwzględnia najpierw różniczkowania najwyżej dwa razy, a następnie operator A^{-1} przywracający wyższą regularność. Możemy teraz zdefiniować operator $\overline{Q}$ przez zastosowanie liniowego operatora M :

$$\overline{Q}(v, v) := M(Q_i(v, v), Q_{ij}(v, v)).$$

Jako że – zgodnie z definicją $M - Q_i = F_i \cdot \overline{Q}$ oraz $Q_{ij} = F_{ij} \cdot \overline{Q}$, równanie (3.2) przyjmuje nową postać

$$\partial_i(F_j \cdot (v + \overline{Q}(v, v))) + \partial_j(F_i \cdot (v + \overline{Q}(v, v))) - 2F_{ij} \cdot (v + \overline{Q}(v, v)) = h_{ij},$$

czyli w skrócie: $L(v + \overline{Q}(v, v)) = h$. Ponownie stosując operator $M_0(h) = M(0, h)$ będący jednostronną odwrotnością h , otrzymujemy, że do spełnienia (3.2) wystarczy

$$v + \overline{Q}(v, v) = M_0 h. \quad (3.4)$$

Zakończymy tę sekcję nie do końca ścisłym opisem konstrukcji rozwiązania powyższego równania (3.4). Pozwoli on zidentyfikować, jakiego typu oszacowania są nam potrzebne. W następnych dwóch sekcjach wyprowadzimy odpowiednie oszacowania w oparciu o szeregi Fouriera, a następnie uzupełnimy luki w poniższym rozumowaniu.

■ UWAGA! Argument poniżej zawiera fałszywe elementy.

Równanie (3.4) ma postać $v = T(v)$ dla operatora $T(v) := M_0 h - \bar{Q}(v, v)$, więc rozwiązanie uzyskamy w oparciu o twierdzenie Banacha o punkcie stałym. W tym celu trzeba ustalić, na jakiej przestrzeni funkcyjnej działa T . Na potrzeby niniejszego szkicu rozważymy przestrzenie $C^k(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^d)$ ($k = 0, 1, \dots$) z normą $\|v\|_{C^k} := \sum_{0 \leq j \leq k} \|\nabla^j v\|_\infty$. Prześledźmy krok po kroku działanie T na funkcji $v \in C^k$:

$$\begin{aligned} \|Av\|_{C^{k-2}}, \|\partial_i v\|_{C^{k-2}}, \|\partial_{ij} v\|_{C^{k-2}}, \|\nabla \partial_i v\|_{C^{k-2}} &\lesssim \|v\|_{C^k}, \\ \|v \cdot w\|_{C^k} &\lesssim \|v\|_{C^k} \|w\|_{C^k}, \\ \|A^{-1}v\|_{C^k} &\lesssim \|v\|_{C^{k-2}}, \quad (\text{tu jest problem}) \\ \|Mv\|_{C^k} &\lesssim \|v\|_{C^k}. \end{aligned}$$

W definicji $Q_i(v, v)$ oraz $Q_{ij}(v, v)$ widzimy najpierw operatory wymagające dwóch (lub mniej) pochodnych, co obniża regularność o 2. Następujące po tym mnożenie nie zmienia regularności, wreszcie zastosowanie odwrotności A^{-1} przywraca wyższą o 2 regularność. W rezultacie mamy $\|Q_i(v, v)\|_{C^k}, \|Q_{ij}(v, v)\|_{C^k} \lesssim \|v\|_{C^k}^2$. Na koniec stosujemy operator liniowy M , który ponownie nie zmienia regularności, co prowadzi nas do oszacowania $\|\bar{Q}(v, v)\|_{C^k} \leq C\|v\|_{C^k}^2$. Jeśli ustalimy $R := 2\|M_0 h\|_{C^k}$ i dobierzemy $\varepsilon > 0$ na tyle małe, by $8CR \leq 1$, to

$$\|T(v)\|_{C^k} \leq \|M_0 h\|_{C^k} + C\|v\|_{C^k}^2 \leq \frac{1}{2}R + C(2R)^2 \leq R \quad \text{dla } \|v\|_{C^k} \leq R.$$

Innymi słowy, T przeprowadza kulę o promieniu R w siebie. Analogicznie uzasadniamy, że

$$\begin{aligned} \|\bar{Q}(v, v) - \bar{Q}(w, w)\|_{C^k} &\leq \|\bar{Q}(v, v - w)\|_{C^k} + \|\bar{Q}(v - w, w)\|_{C^k} \\ &\lesssim R\|v - w\|_{C^k} \quad \text{dla } \|v\|_{C^k}, \|w\|_{C^k} \leq R. \end{aligned}$$

To oznacza, że po dobraniu odpowiednio małego $\varepsilon > 0$ przekształcenie $v \mapsto Q(v, v)$, a więc i $v \mapsto T(v)$, jest kontrakcją. Na mocy twierdzenia Banacha wnioskujemy teraz, że dla $|t| \leq \varepsilon(k)$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie $v \in C^k$ równania (3.4).

To dowodzi istnienia zanurzenia izometrycznego w każdej z klas C^k , ale niekoniecznie w klasie C^∞ , gdyż wartość $\varepsilon(k)$ może być (i raczej jest) zbieżna do zera przy $k \rightarrow \infty$. Jednym z winowajców tego stanu rzeczy jest to, że stała w nierówności $\|v \cdot w\|_{C^k} \lesssim \|v\|_{C^k} \|w\|_{C^k}$ rośnie nieskończenie wraz ze wzrostem k – choćby dlatego, że wzór Leibniza dla pochodnej $\partial_\alpha(vw)$ rzędu $|\alpha| = k$ zawiera bardzo wiele wyrazów. Odnotujmy jednak, że prawdziwa jest następująca wersja tej nierówności:

$$\|v \cdot w\|_{C^k} \leq \|v\|_{C^k} \|w\|_{C^0} + \|v\|_{C^0} \|w\|_{C^k} + C(n, d, k) \|v\|_{C^{k-1}} \|w\|_{C^{k-1}}.$$

Wynika ona z obserwacji, że we wzorze Leibniza na $\partial_\alpha(vw)$ jedynie dwa skrajne wyrazy wymagają normy C^k , w pozostałych występują jedynie pochodne rzędu $\leq k - 1$. W oparciu o tę nierówność można wyprowadzić oszacowanie

$$\|\bar{Q}(v, v)\|_{C^k} \leq C(n, d, F) \|v\|_{C^k} \|v\|_{C^2} + C(n, d, F, k) \|v\|_{C^{k-1}}^2.$$

Pozwala ono wykazać indukcyjnie, że jeśli zastosujemy twierdzenie Banacha w przestrzeni C^2 , to ciąg występujących w tym twierdzeniu iteracji v_j jest ograniczony nie tylko w C^2 , ale również w każdej innej normie C^k . W konsekwencji granica $v \in C^2$ jest tak naprawdę gładka. Szczegóły tego rozumowania uzupełnimy później. $\square$

3.6 Oszacowania eliptyczne poprzez szeregi Fouriera

Zacznijmy od wskazania fatalnego błędu w rozumowaniu z poprzedniej sekcji. Otóż odwrotność A^{-1} operatora $A = -\Delta + 1$ *nie spełnia* kluczowego oszacowania $\|A^{-1}u\|_{C^{k+2}} \lesssim \|u\|_{C^k}$. Prawdziwe są natomiast tak zwane *oszacowania Schaudera*

$$\|A^{-1}u\|_{C^{k+2,\alpha}} \lesssim \|u\|_{C^{k,\alpha}} \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}, \alpha \in (0, 1),$$

gdzie norma $C^{k,\alpha}$ uwzględnia wszystkie pochodne do rzędu k oraz dodatkowo normę Höldera pochodnych najwyższego rzędu. Podobne nierówności zachodzą nie tylko na torusie $\mathbb{T}^n$, ale też na podzbiorach $\mathbb{R}^n$; klasyczny dowód można znaleźć w [GT01, Ch. 6], a bardziej nowoczesny dowód w [Has21]. W oparciu o te nierówności rzeczywiście można dokończyć dowód, tak jak w [Tao16], [Yan98].

Ponieważ w naszym przypadku dziedziną jest torus, sięgniemy po alternatywną drogę rozwiązania w oparciu o szeregi Fouriera. Przypomnijmy, że funkcje $e_k(z) := z^k$ ($k \in \mathbb{Z}$), zapisywane też w postaci $e_k(t) = e^{ikt}$, stanowią bazę ortonormalną zespolonej przestrzeni $L^2(\mathbb{S}^1)$ (z unormowaną miarą powierzchniową). W konsekwencji iloczyny tych funkcji stanowią bazę ortonormalną $L^2(\mathbb{T}^d)$; dla $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ i $z \in \mathbb{T}^d$ przyjmujemy oznaczenie

$$e_{\mathbf{k}}(z) := z^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n}, \quad \text{inaczej } e_{\mathbf{k}}(t) = e^{i\mathbf{k} \cdot t}.$$

Pozwala to rozwinąć dowolną funkcję w tej przestrzeni jako szereg Fouriera

$$u(z) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \hat{u}_{\mathbf{n}} z^{\mathbf{n}},$$

$$\text{gdzie } \hat{u}_{\mathbf{n}} = \langle u, e_{\mathbf{n}} \rangle = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} u(z) z^{-\mathbf{n}}.$$

Ze względu na ortonormalność bazy zachodzi tożsamość Plancherela $\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} = \|\hat{u}\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}$. Całkując przez części, łatwo przekonujemy się, że $\widehat{\partial_j u}_{\mathbf{n}} = -in_j \hat{u}_{\mathbf{n}}$. W związku z tym również normę L^2 pochodnych łatwo wyrazić w terminach $\hat{u}$.

Wprowadzamy więc normę Sobolewa $H^s(\mathbb{T}^d)$, zdefiniowaną jako

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{T}^d)}^2 := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} |\hat{u}_{\mathbf{n}}|^2 (1 + |\mathbf{n}|^2)^s.$$

Dzięki dotychczasowym obserwacjom, w przypadku $s \in \mathbb{N}$ norma ta jest równoważna sumie norm L^2 wszystkich pochodnych do rzędu s . Norma ta jest sztywa na miarę operatora $A = -\Delta + 1$, gdyż $Ae_{\mathbf{n}} = (1 + |\mathbf{n}|^2)e_{\mathbf{n}}$. W konsekwencji zachodzi równość $\widehat{Au}_{\mathbf{n}} = \hat{u}_{\mathbf{n}}(1 + |\mathbf{n}|^2)$ dla $u \in C^2$, a dla dowolnego $u \in H^s$ przyjmujemy tę równość jako definicję A . Zachodzi więc tożsamość

$$\|Au\|_{H^s} = \|u\|_{H^{s+2}},$$

która jest odpowiednikiem oszacowań Schaudera w naszym przypadku.

Skupimy się teraz na wyprowadzeniu pozostałych oszacowań dla H^s zamiast C^k . Jednym z pierwszych kroków jest przekonanie się, że należenie do H^s pociąga za sobą regularność w klasycznym sensie.

Lemat 3.12. *Jeśli $s > d/2$, to zachodzi oszacowanie*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|\hat{u}\|_{\ell^1} \lesssim_{s,d} \|u\|_{H^s},$$

w szczególności każda funkcja z $H^s(\mathbb{T}^d)$ ma ciągłego reprezentanta.

Dowód. Kluczowa jest prawa z nierówności. Stosując nierówność Cauchy’ego–Schwarza, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|\hat{u}\|_{\ell^1} &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} |\hat{u}_{\mathbf{n}}| (1 + |\mathbf{n}|^2)^{s/2} (1 + |\mathbf{n}|^2)^{-s/2} \\ &\leq \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} |\hat{u}_{\mathbf{n}}|^2 (1 + |\mathbf{n}|^2)^s \right)^{1/2} \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (1 + |\mathbf{n}|^2)^{-s} \right)^{1/2} \\ &\lesssim_{s,d} \|u\|_{H^s},\end{aligned}$$

ponieważ dla $s > d/2$ szereg $\sum (1 + |\mathbf{n}|^2)^{-s}$ jest zbieżny – żeby się o tym przekonać, można podzielić $\mathbb{Z}^d$ na ciąg pierścieni diadycznych $2^k \leq |\mathbf{n}| < 2^{k+1}$ i oszacować zgrubnie wkład na każdym z nich.

Skoro ciąg współczynników $\hat{u}_{\mathbf{n}}$ jest sumowalny, szereg Fouriera $\sum \hat{u}_{\mathbf{n}} z^{\mathbf{n}}$ jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie, a więc ma granicę ciągłą i ograniczoną przez $\|\hat{u}\|_{\ell^1}$. Oczywiście granica ta musi się pokrywać z u jako elementem $L^2(\mathbb{T}^d)$. $\square$

Wniosek 3.13. *Jeśli $u \in H^s$ dla pewnego $s > d/2 + k$, to u posiada reprezentanta klasy C^k , ponadto*

$$\|u\|_{C^k} \lesssim_{s,d} \|u\|_{H^s}.$$

W konsekwencji każda funkcja $u \in \bigcap_{s \geq 0} H^s$ dla wszystkich s posiada gładkiego reprezentanta.

Dowód. Wiemy już, że szereg Fouriera funkcji u jest zbieżny bezwzględnie, więc sama funkcja u jest ciągła. Na mocy wzoru $\widehat{\partial_j u_{\mathbf{n}}} = -in_j \hat{u}_{\mathbf{n}}$ widzimy, że szereg Fouriera odpowiadający dowolnej pochodnej $\partial_{\alpha} u$ rzędu $|\alpha| \leq k$ również jest zbieżny bezwzględnie, co dowodzi, że u jest klasy C^k . Oszacowanie normy jest konsekwencją poprzedniego lematu. $\square$

Jako że operatory Q_i, Q_{ij} są dwuliniowe, będziemy ponownie potrzebować oszacowań iloczynów funkcji.

Lemat 3.14. *Jeśli $s > d/2$, to przestrzeń $H^s(\mathbb{T}^d)$ jest zamknięta na mnożenie, ponadto*

$$\|uv\|_{H^s} \lesssim_{s,d} \|u\|_{H^s} \|\hat{v}\|_{\ell^1} + \|\hat{u}\|_{\ell^1} \|v\|_{H^s} \lesssim_{s,d} \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s}.$$

Dowód. Odnotujmy, że $\widehat{uv}$ jest splotem $\hat{u} * \hat{v}$, do oszacowania mamy więc normę

$$\|uv\|_{H^s} = \left\| (\hat{u} * \hat{v})_{\mathbf{n}} (1 + |\mathbf{n}|^2)^{s/2} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} = \left\| \sum_{\mathbf{k} + \mathbf{l} = \mathbf{n}} \hat{u}_{\mathbf{k}} \hat{v}_{\mathbf{l}} (1 + |\mathbf{n}|^2)^{s/2} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}.$$

Aby otrzymać ograniczenie przez normy $\|u\|_{H^s}, \|v\|_{H^s}$, chcielibyśmy zastąpić wyraz $(1 + |\mathbf{n}|^2)^{s/2}$ przez $(1 + |\mathbf{k}|^2)^{s/2}$ lub też $(1 + |\mathbf{l}|^2)^{s/2}$. Jest to możliwe dzięki następującej nierówności:

$$(1 + |\mathbf{n}|^2)^{s/2} \lesssim_s (1 + |\mathbf{k}|^2)^{s/2} + (1 + |\mathbf{l}|^2)^{s/2} \quad \text{dla } \mathbf{n} = \mathbf{k} + \mathbf{l}, \quad (3.5)$$

którą łatwo sprawdzić, przyjmując bez straty ogólności $|\mathbf{n}| \leq 2|\mathbf{k}|$. Zastosowanie tej nierówności daje

$$|(\hat{u} * \hat{v})_{\mathbf{n}} (1 + |\mathbf{n}|^2)^{s/2}| \lesssim_s (|\hat{u}| (1 + |\mathbf{k}|^2)^{s/2} * |\hat{v}|)_{\mathbf{n}} + (|\hat{u}| * |\hat{v}| (1 + |\mathbf{l}|^2)^{s/2})_{\mathbf{n}}.$$

Oszacowanie normy ℓ^2 powyższych splotów wymaga zastosowania nierówności Younga z Lematu 3.15 poniżej. Po zastosowaniu tej nierówności wraz z oszacowaniem z Lematu 3.12 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \|uv\|_{H^s} &\lesssim_s \| |\hat{u}|(1+|\mathbf{k}|^2)^{s/2} \|_{\ell^2} \|\hat{v}\|_{\ell^1} + \|\hat{u}\|_{\ell^1} \| |\hat{v}|(1+|\mathbf{l}|^2)^{s/2} \|_{\ell^2} \\ &\lesssim_{s,d} \|u\|_{H^s} \|\hat{v}\|_{\ell^1} + \|\hat{u}\|_{\ell^1} \|v\|_{H^s} \\ &\lesssim \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s}. \end{aligned}$$

□

Lemat 3.15 (szczególny przypadek nierówności Younga). *Jeśli $a \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ oraz $b \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, to $a * b \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, a ponadto*

$$\|a * b\|_{\ell^2} \leq \|a\|_{\ell^1} \|b\|_{\ell^2}.$$

Dowód. Wprowadźmy oznaczenie τ_k na oznaczenie przekształcenia przesuwającego indeks: $(\tau_k a)_n := a_{n-k}$, jest to izometria na ℓ^2 . Wówczas splot $a * b$ możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} (a * b)_n &= \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} b_{n-\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} (\tau_{\mathbf{k}} b)_n, \\ \text{czyli} \quad a * b &= \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \tau_{\mathbf{k}} b. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że powyższy szereg jest bezwzględnie zbieżny w $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ dzięki założeniu o sumowalności a . Z nierówności trójkąta mamy teraz

$$\|a * b\|_{\ell^2} \leq \sum_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}| \cdot \|\tau_{\mathbf{k}} b\|_{\ell^2} = \sum_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}| \cdot \|b\|_{\ell^2} = \|a\|_{\ell^1} \|b\|_{\ell^2}.$$

□

Przydatna będzie też następująca wersja Lematu 3.14. Jest bardziej skomplikowana, ale w jednym aspekcie silniejsza. Otrzymana w dowodzie Lematu 3.14 stała jest rzędu 2^s i nie da się uzyskać stałej niezależnej od s . Poniżej stała przy członie $\|u\|_{H^s} \|\hat{v}\|_{\ell^1} + \|\hat{u}\|_{\ell^1} \|v\|_{H^s}$ jest zależna jedynie od wymiaru d , kosztem stałej przy $\|u\|_{H^{s-1}} \|v\|_{H^{s-1}}$:

Lemat 3.16. *Jeśli $s \geq s_0 > \frac{d+2}{2}$, to zachodzi oszacowanie*

$$\|uv\|_{H^s} \leq C(s_0, d) (\|u\|_{H^s} \|v\|_{H^{s_0}} + \|u\|_{H^{s_0}} \|v\|_{H^s}) + C(s, s_0, d) \|u\|_{H^{s-1}} \|v\|_{H^{s-1}}.$$

Dowód. Dowód przebiega analogicznie jak w Lemacie 3.14. Jedyna różnica leży w zastąpieniu (3.5) następującym ograniczeniem na $(1+|\mathbf{n}|^2)^{s/2}$:

$$(1+|\mathbf{n}|^2)^{s/2} \leq A \cdot ((1+|\mathbf{k}|^2)^{s/2} + (1+|\mathbf{l}|^2)^{s/2}) + B \cdot (1+|\mathbf{k}|^2)^{\frac{s-s_0}{2}} (1+|\mathbf{l}|^2)^{\frac{s-s_0}{2}} \quad \text{dla } \mathbf{n} = \mathbf{k} + \mathbf{l}, \quad (3.6)$$

w którym można przyjąć $A = e$ oraz $B = (s+1)^s$ – jak widać, tylko druga ze stałych jest zależna od s . Wyprowadzenie rozbijemy na kilka przypadków:

Przypadek 1. Gdy $|\mathbf{k}| \geq |\mathbf{n}|$, nierówność (3.6) jest trywialnie spełniona z $A = 1$, $B = 0$.

Przypadek 2. Gdy $\frac{s}{s+1} |\mathbf{n}| \leq |\mathbf{k}| \leq |\mathbf{n}|$, mamy natomiast $\frac{1+|\mathbf{n}|^2}{1+|\mathbf{k}|^2} \leq \frac{|\mathbf{n}|^2}{|\mathbf{k}|^2}$, skąd

$$\frac{(1+|\mathbf{n}|^2)^{s/2}}{(1+|\mathbf{k}|^2)^{s/2}} \leq \frac{|\mathbf{n}|^s}{|\mathbf{k}|^s} \leq \left(\frac{s+1}{s} \right)^s \leq e.$$

To oznacza, że otrzymujemy (3.6) z $A = e$, $B = 0$.

Przypadek 3. Ze względu na symetrię pozostaje przypadek $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}| \leq \frac{s}{s+1} |\mathbf{n}|$. Skoro jednak $|\mathbf{n}| = |\mathbf{k} + \mathbf{l}| \leq |\mathbf{k}| + |\mathbf{l}|$, to wówczas mamy również nierówności w przeciwną stronę: $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}| \geq \frac{1}{s+1} |\mathbf{n}|$. Ze względu na nierówność $s \leq 2s - s_0$ wnioskujemy stąd:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + |\mathbf{n}|^2)^{s/2}}{(1 + |\mathbf{k}|^2)^{\frac{s-s_0}{2}} (1 + |\mathbf{l}|^2)^{\frac{s-s_0}{2}}} &\leq \frac{(1 + |\mathbf{n}|^2)^{s-s_0}}{(1 + |\mathbf{k}|^2)^{\frac{s-s_0}{2}} (1 + |\mathbf{l}|^2)^{\frac{s-s_0}{2}}} \\ &\leq \frac{|\mathbf{n}|^{s-s_0}}{|\mathbf{k}|^{\frac{s-s_0}{2}} |\mathbf{l}|^{\frac{s-s_0}{2}}} \leq (s+1)^{s-s_0} \leq (s+1)^s. \end{aligned}$$

W ten sposób mamy (3.6) z $A = 0$, $B = (s+1)^s$, co kończy dowód tej pomocniczej nierówności.

Powtórzmy teraz rozumowanie z Lematu 3.14. Pierwszy człon po prawej stronie (3.6) daje nam $\|u\|_{H^s} \|v\|_{H^{s_0}} + \|u\|_{H^{s_0}} \|v\|_{H^s}$ tak jak poprzednio, tylko tym razem uzyskana stała nie zależy od s . Podobne rozumowanie daje oszacowanie dla drugiego członu po prawej stronie. Zaczynamy od nierówności Younga z Lematu 3.15

$$\|\hat{u}|(1 + |\mathbf{k}|^2)^{\frac{s-s_0}{2}} * \hat{v}|(1 + |\mathbf{l}|^2)^{\frac{s-s_0}{2}}\|_{\ell^2} \leq \|\hat{u}|(1 + |\mathbf{k}|^2)^{\frac{s-s_0}{2}}\|_{\ell^2} \|\hat{v}|(1 + |\mathbf{l}|^2)^{\frac{s-s_0}{2}}\|_{\ell^1}$$

Pierwszy czynnik daje $\|u\|_{H^{s-s_0}}$, co szacuje się przez $\|u\|_{H^{s-1}}$. Drugi czynnik szacujemy jak w Lemacie 3.12, stosując nierówność Cauchy'ego–Schwarza:

$$\begin{aligned} \|\hat{v}|(1 + |\mathbf{l}|^2)^{\frac{s-s_0}{2}}\|_{\ell^1} &= \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} |\hat{v}_\mathbf{l}| (1 + |\mathbf{l}|^2)^{\frac{s-1}{2}} (1 + |\mathbf{l}|^2)^{\frac{1-s_0}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} |\hat{v}_\mathbf{l}|^2 (1 + |\mathbf{l}|^2)^s \right)^{1/2} \left(\sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} (1 + |\mathbf{l}|^2)^{1-s_0} \right)^{1/2} \\ &\lesssim_{s_0, d} \|u\|_{H^{s-1}}, \end{aligned}$$

na mocy założenia $s_0 - 1 > d/2$. □

3.7 Uzupełnienie dowodu istnienia rozwiązania

Dla dopełnienia dowodu twierdzenia Nasha (Twierdzenie 3.2) wystarczy wykazać uzupełnić dowód Stwierdzenia 3.10, pojąując istnienie gładkiego rozwiązania równania (3.4). Ponieważ dowód przebiega tak samo jak przedstawiony wcześniej (błędny) dowód, a wymaga jedynie zmiany klasy C^k na H^s , rozumowanie niżej jest szkicowe.

Dowód Stwierdzenia 3.10. Tak jak poprzednio, zastosujemy twierdzenie Banacha o punkcie stałym dla operatora $T(v) := M_0 h - \bar{Q}(v, v)$, tym razem na przestrzeni $H^s(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^d)$. Od tej pory wartość $s > \frac{d+2}{2}$ będzie ustalona; będziemy śledzić zależność stałych od s , ale już nie od wymiarów n i d oraz od przekształcenia F . Uzyskany punkt stały będzie szukanym rozwiązaniem równania (3.4) – później pokażemy, że jest to funkcja gładka. Prześledźmy teraz działanie T na funkcji $v \in H^s$:

$$\begin{aligned} \|Av\|_{H^{s-2}}, \|\partial_i v\|_{H^{s-2}}, \|\partial_{ij} v\|_{H^{s-2}}, \|\nabla \partial_i v\|_{H^{s-2}} &\leq \|v\|_{H^s}, \\ \|v \cdot w\|_{H^s} &\lesssim_s \|v\|_{H^s} \|w\|_{H^s}, \\ \|A^{-1}v\|_{H^s} &= \|v\|_{H^{s-2}} \\ \|Mv\|_{H^s} &\lesssim_s \|v\|_{H^s}. \end{aligned}$$

Warto zwrócić uwagę, że powyższe oszacowanie na $\|A^{-1}v\|_{H^s}$ jest wręcz równością dzięki normie przyjętej na H^s . Oszacowania na $v \cdot w$ i Mv wynikają tym razem z Lematu 3.14. Wnioskujemy jak poprzednio, że $\|\overline{Q}(v, v)\|_{H^s} \leq C(s)\|v\|_{H^s}^2$. Jeśli ustalimy $R := 2\|M_0h\|_{H^s}$ i tak dobierzemy $\varepsilon > 0$, by $8C(s)R \leq 1$, to ponownie otrzymujemy, że T przekształca kulę $B_R \subseteq H^s$ w siebie. Podobnie też uzasadniamy, że T jest kontrakcją na B_R , dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$. Ostatecznie dla $|t| \leq \varepsilon(s)$ otrzymujemy jednoznaczne rozwiązanie $v \in H^{s_0}$ równania (3.4) (od teraz wybraną wcześniej wartość s oznaczmy przez s_0).

Przejdziemy do dowodu gładkości v . Przyjmijmy, że funkcja ta została otrzymana jako wynik iteracji

$$v_0 = 0, \quad v_{j+1} = T(v_j), \quad v_j \xrightarrow{H^{s_0}} v.$$

Wybermy teraz dowolne $s \geq s_0$. Wykażemy, że ciąg v_j jest ograniczony w H^s . Dotychczasowe oszacowanie $\|\overline{Q}(v, v)\|_{H^s} \leq C(s)\|v\|_{H^s}^2$ nie jest w tym celu wystarczające, gdyż stała $C(s)$ może być zbyt duża. Zależność od s pochodzi jednak jedynie z oszacowań na $v \cdot w$ i Mv – jeśli do ograniczenia tych iloczynów wykorzystamy Lemat 3.16, to otrzymamy oszacowanie

$$\|\overline{Q}(v, v)\|_{H^s} \leq C_1\|v\|_{H^s}\|v\|_{H^{s_0}} + C_2(s)\|v\|_{H^{s-1}}^2,$$

w którym jedynie $C_2(s)$ zależy od s . To pozwala na przeprowadzenie dowodu indukcyjnego. Załóżmy, że $\|v_j\|_{H^{s-1}} \leq V_s$ dla wszystkich j , i ponadto oznaczmy $H_s := \|M_0h\|_{H^s}$. Dobierając małe ε , możemy założyć, że $C_1V_{s_0} \leq \frac{1}{2}$. Wówczas mamy

$$\begin{aligned} \|v_{j+1}\|_{H^s} &\leq \|M_0h\|_{H^s} + \|\overline{Q}(v, v)\|_{H^s} \\ &\leq H_s + C_1V_{s_0}\|v_j\|_{H^s} + C_2(s)V_{s-1}^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|v_j\|_{H^s} + H_s + C_2(s)V_{s-1}^2. \end{aligned}$$

Ze względu na $v_0 = 0$ ta nierówność dowodzi indukcyjnie, że $\|v_j\|_{H^s} \leq 2(H_s + C_2(s)V_{s-1}^2)$, jak żądaliśmy (otrzymujemy przy tym $J_{s+1} = 2(H_s + C_2(s)V_{s-1}^2)$). W konsekwencji ciąg v_j jest ograniczony w każdej z norm H^s . Wniosek 3.13 zapewnia nas, że jest również ograniczony w każdej z norm C^k , co na mocy twierdzenia Arzeli–Ascolego daje nam gładkość v . $\square$

3.8 Informacja o twierdzeniu Nasha–Kuipera

Twierdzenie 3.17 (Nash–Kuiper). *Niech $F: (M^n, g) \rightarrow (\mathbb{R}^d, g_e)$ ($d \geq n+1$) będzie krótkim zanurzeniem. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje izometryczne zanurzenie $F' \in C^1$ spełniające $\|F' - F\|_\infty \leq \varepsilon$.*

Od razu odnotujmy paradoksalny charakter tego twierdzenia. Dla przykładu weźmy standardowe zanurzenie izometryczne $F_0: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zanurzenie $F(x) = \varepsilon x$ jest krótkie, a z Twierdzenia 3.17 otrzymujemy zanurzenie izometryczne F' sfery $\mathbb{S}^2$ w kulę $B_{2\varepsilon} \subseteq \mathbb{R}^2$. Intuicja podpowiada, że nie powinno być to możliwe, i rzeczywiście, niemożliwe jest otrzymanie takiego zanurzenia F' w klasie funkcji gładkich, a nawet C^2 (zadanie 3.3).

Dowód twierdzenia Nasha–Kuipera można znaleźć w notatkach Székelyhidiego [Szé12, Th. 3.1]. Na ćwiczeniach zobaczymy dowód słabszej wersji [Szé12, Th. 3.2], w której dla uproszczenia $d \geq n+2$, M jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, a zamiast zanurzenia szukamy immersji. Dowód tego twierdzenia sprowadza się do idei dodawania ciasnych spirali jak w Stwierdzeniu 3.8, ale w

bardziej uważny sposób. Po pierwsze, zamiast powiększać wymiar d przy każdej nowej spirali, modyfikujemy zanurzenie w tę samą przestrzeń $\mathbb{R}^d$ (co jest źródłem dodatkowego błędu). Po drugie, zamiast konstruować zanurzenie spełniające $F^*g_e = g + \varepsilon^2 h \geq g$, staramy się zachować warunek krótkości $F^*g_e < g$, by umożliwić nieskończoną iterację. Po trzecie, każda ze spirali f_ε^v ma małą normę C^0 (rzędu ε), zauważalną normę C^1 (rzędu 1) oraz dużą normę C^2 (rzędu $1/\varepsilon$). Z tego powodu dodawanie kolejnych spirali z coraz mniejszą wartością $\varepsilon > 0$ z konieczności uniemożliwia zbieżność w C^2 .

W ramach uzupełnienia notatek Székelyhidiiego przytoczmy jedynie alternatywny dowód lematu o diagonalizacji [Szé12, Lem. 3.3]. Jest to bardziej uniwersalna wersja wcześniejszego Lematu 3.9.

Lemat 3.18. *Istnieje ciąg punktów $v_j \in \mathbb{S}^{n-1}$ oraz funkcji $\eta_j \in C_c^\infty(\text{Sym}_{n \times n}^+)$ o tej własności, że dla każdej macierzy dodatnio określonej $h \in \text{Sym}_{n \times n}^+$ zachodzi równość*

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^2(h) v_j \otimes v_j.$$

Ponadto rodzina funkcji η_j jest lokalnie skończona, to znaczy dla każdego h istnieje otoczenie, na którym tylko skończenie wiele z funkcji η_j jest różnych od zera.

Dowód. Z twierdzenia o diagonalizacji wiemy, że każdy element $\text{Sym}_{n \times n}^+$ daje się rozłożyć (być może niejednoznacznie) jako suma n składników $\sum_{j=1}^n v_j \otimes v_j$. Wystarczy więc skonstruować ciąg $h_k \in \text{Sym}_{n \times n}^+$ oraz funkcji $\theta_k \in C_c^\infty(\text{Sym}_{n \times n}^+)$ spełniający

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k^2(h) h_k,$$

z dodatkowym wymaganiem lokalnej skończoności rodziny θ_k . Wówczas za n spośród funkcji η_j można przyjąć odpowiednie θ_k (domnożone przez $|v_j|^2$).

Zauważmy, że $\text{Sym}_{n \times n}^+$ jest otwartym podzbiorem skończenie wymiarowej przestrzeni $\text{Sym}_{n \times n}$, którą od tej pory utożsamimy z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^d$, $d = \frac{n(n+1)}{2}$ (przez wybranie bazy). Punkt h w kostce $Q = (0, 1)^d$ łatwo przedstawić jako kombinację liniową niektórych wierzchołków: po prostu jest to suma $\sum_i h_i e_i$. Współczynniki h_i są dodatnimi gładkimi funkcjami h , więc funkcje $\sqrt{h_i}$ również są gładkie. Podobnie dla każdej kostki $Q \subseteq \text{Sym}_{n \times n}^+$ mamy 2^d wierzchołków h_i^Q oraz odpowiednich funkcji θ_i^Q . Pokryjemy więc zbiór $\text{Sym}_{n \times n}^+$ kostkami.

Posłużmy do tego rozkład Whitneya. Kostkę diadyczną $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ (czyli powstałą z $[0, 1]^d$ przez przesunięcie z $\mathbb{Z}^d$ i przeskalowanie razy 2^{-k} , $k = 0, 1, 2, \dots$) nazwiemy *dobrą*, jeśli trzykrotnie większa kostka $3Q$ (o tym samym środku) jest zawarta w $\text{Sym}_{n \times n}^+$. Jest jasne, że każdy punkt $\text{Sym}_{n \times n}^+$ leży w jakiejś dobrej kostce. Rodzina Q_k dobrych kostek maksymalnych ze względu na zawieranie stanowi więc rozłączne pokrycie $\text{Sym}_{n \times n}^+$.

Gdybyśmy wykorzystali Q_k do konstrukcji $\theta_i^{Q_k}$, mielibyśmy problem związany z wymaganiem nieujemności $\theta_i^{Q_k}$ – są one gładkie jedynie we wnętrzu tej kostki, a potrzebujemy funkcji klasy C_c^∞ . W związku z tym rozważamy kostki otwarte $K_k := \text{int } 2Q_k$, które stanowią otwarte pokrycie $\text{Sym}_{n \times n}^+$. Dobieramy rozkład jedynek $\lambda_k \in C_c^\infty(K_k)$, czyli lokalnie skończoną rodzinę funkcji spełniających $\sum_k \lambda_k^2 \equiv 1$, i otrzymujemy rozkład:

$$h = \sum_k \lambda_k^2(h) h = \sum_{k,i} \lambda_k^2(h) (\theta_i^{K_k})^2(h) h_i^{K_k},$$

który w połączeniu z wcześniejszą uwagą o rozkładzie każdego $h_i^{Q_k}$ z osobna daje żądany rozkład. Należy jedynie upewnić się, że pokrycie kostkami $K_k = \text{int } 2Q_k$ jest lokalnie skończone – jest to zapewnione przez lemat poniżej. $\square$

Lemat 3.19. *Dany jest zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}^d$. Kostkę diadyczną Q nazwijmy dobrą, jeśli $3Q \subseteq U$. Wówczas jeśli Q_1, Q_2 dwiema maksymalnymi dobrymi kostkami oraz kostki $2Q_1, 2Q_2$ się przecinają, to ich rozmiary nie różnią się więcej niż 8-krotnie. W konsekwencji dla każdego punktu $x \in U$ istnieje najwyżej 24^d maksymalnych dobrych kostek Q spełniających $x \in 2Q$.*

Dowód. Oznaczmy środki s_1, s_2 i promienie r_1, r_2 tych kostek – w tym sensie, że Q_i jest równe kuli $B_{r_i}(s_i)$ w metryce ℓ^∞ , z dokładnością do brzegu. Oznaczmy też środek s_3 bezpośredniego diadycznego przodka Q_2^a kostki Q_2 . Z założenia wiemy, że kostki Q_1, Q_2 się przecinają, co oznacza nierówność $|s_1 - s_2| \leq 2(r_1 + r_2)$ (w metryce ℓ^∞). Ponadto $|s_2 - s_3| = r_2$. Gdyby wbrew tezie zachodziła nierówność $r_1 \geq 16r_2$, to wówczas dla wszystkich $x \in 3Q_2^a$ mielibyśmy

$$|x - s_1| \leq |x - s_3| + |s_3 - s_2| + |s_2 - s_1| \leq 6r_2 + r_2 + 2(r_1 + r_2) < 3r_1,$$

a więc zawieranie $3Q_2^a \subseteq 3Q_1 \subseteq U$. To oznacza, że kostka Q_1^a jest dobra, co prowadzi do sprzeczności z założeniem o maksymalności Q_2 . Wnioskujemy więc, że $r_1 \leq 8r_2$ i analogicznie $r_2 \leq 8r_1$.

Weźmy teraz punkt $x \in U$ i przyjmijmy, że należy do N kostek postaci $2Q_i$ (gdzie $Q_1, \dots, Q_n$ są maksymalne dobre). Ich promienie r_i są w pewnym przedziale $[r_0, 8r_0]$. Wnioskujemy stąd, że $Q_i \subseteq B_{24r_0}(x)$. Istotnie, dla $y \in B_{r_i}(s_i) \approx Q_i$ mamy

$$|y - x| \leq |y - s_i| + |s_i - x| \leq r_i + 2r_i = 4r_i \leq 24r_0.$$

Porównanie objętości odpowiednich kostek daje teraz

$$(2 \cdot 24r_0)^d = \text{Vol}(B_{24r_0}(x)) \geq \text{Vol}\left(\bigcup_i Q_i\right) = \sum_i \text{Vol}(Q_i) = \sum_i (2r_i)^d \geq \sum_i (2r_0)^d = N \cdot (2r_0)^d.$$

Podzielenie stronami przez $(2r_0)^d$ daje $N \leq 24^d$, czego należało dowieść. $\square$

3.9 Zadania

Zadanie 3.1 (brak oszacowań eliptycznych w normie C^k). Niech $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie jednorodnym wielomianem harmonicznym stopnia 2, np. $P(x, y) = x^2 - y^2$. Ustalmy też funkcję wycinającą:

$$\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \eta \equiv 1 \text{ na } B_1, \quad \eta \equiv 0 \text{ poza } B_2,$$

ciąg $t_k = 2^k$ oraz rozbieżny szereg $\sum c_k = \infty$ o wyrazach $c_k \searrow 0$, np. $c_k = \frac{1}{k}$. Zdefiniujmy funkcję

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Delta(\eta P)(t_k x).$$

Wykazać, że funkcja f jest ciągła, ale równanie $\Delta u = f$ nie posiada rozwiązania klasy C^2 na otoczeniu zera.

Wskazówka. Zacząć od sprawdzenia jednego narzucającego się kandydata na rozwiązanie.

Zadanie 3.2. Dane są parametry $1 < \alpha < \beta$ oraz zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}^d$. Kostkę diadyczną Q uznajemy za *dobrą*, jeśli $\beta Q \subseteq U$. Wykazać, że jeśli Q_1, Q_2 są dwiema maksymalnymi dobrymi kostkami oraz $\alpha Q_1, \alpha Q_2$ się przecinają, to ich rozmiary są w stosunku nie przekraczającym $\frac{1+\alpha+2\beta}{\beta-\alpha}$.

Zadanie 3.3 (twierdzenie Nasha–Kuipera w klasie C^∞).

- (a) Jeśli $M \subseteq \mathbb{R}^n$ jest wykresem funkcji $f(x_1, \dots, x_{n-1})$ spełniającej $f(0) = 0$, $\nabla f(0) = 0$, to w punkcie 0 druga forma podstawowa ma postać

$$A_0(u, v) = (0, \dots, 0, -\nabla^2 f_0(u, v)) \quad \text{dla } u, v \in T_0 M \cong \mathbb{R}^{n-1}.$$

- (b) Jeśli podrozmaitość $M^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ leży w kuli B_r , to w pewnym punkcie $p \in M$ skalarna druga forma podstawowa spełnia $N \cdot A_p \geq \frac{1}{r} I$ (jeśli weźmiemy wektor normalny spełniający $N \cdot p \geq 0$).
- (c) Wywnioskować, że jeśli $F: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow B_r \subseteq \mathbb{R}^n$ jest gładkim zanurzeniem, to w pewnym punkcie $p \in F(\mathbb{S}^{n-1})$ wszystkie krzywizny sekcyjne są $\geq 1/r^2$.

Uwaga. Jeśli przyjmiemy prawdziwość Theorema Egregium (Twierdzenie 1.11), to punkt (c) wyklucza prawdziwość twierdzenia Nasha–Kuipera w klasie C^∞ .

Wskazówka. (a) skorzystać z zadania 1.23; (b) rozważyć punkt $p \in M$ najdalej od zera; (c) wykazać monotoniczność wyznacznika jako funkcji macierzy.

Rozdział 4

Rozmaitości Riemannowskie: właściwy wstęp

- Definicja koneksji
- Koneksja Levi-Civita (w oparciu o koneksję styczną na podrozumaitości) i jej kuzyni na iloczynach tensorowych
- Definicja krzywizny Riemanna (i innych), sprawdzenie (1.1)
- Krzywizna dla produktu skręconego, space forms

4.1 Problem z różniczkowaniem

Poniższy wstęp jest inspirowany początkiem rozdziału o koneksjach w książce Lee [Lee97, Ch. 3], który skądinąd polecam przeczytać. Otóż funkcje gładkie $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ łatwo jest różniczkować. Jeśli $V \in T_p M$ jest wektorem stycznym, to w myśl Definicji 2.4 można rozważać wielkość $V(f) \in \mathbb{R}$, która odpowiada pochodnej kierunkowej f w kierunku V w punkcie p – będziemy ją oznaczać również przez $\nabla_V f$.

Więszą trudność stanowi zdefiniowanie pochodnej kierunkowej pola stycznego $V \in \Gamma(TM)$ (potrzebę takiej operacji widać choćby, gdy chcemy zdefiniować wektor przyspieszenia $\ddot{\gamma}$ krzywej $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$). Jednym z pomysłów jest *pochodna Liego*, niewymagająca na potrzeby definicji nic poza strukturą gładką. Otóż mając dane pola X i Y , rozważmy potok Φ_t pola X (tzn. $\Phi_0 = \text{id}$, $\partial_t \Phi_t(x) = X(\Phi_t(x))$). Dla otrzymania pochodnej kierunkowej chcielibyśmy zróżniczkować po t pole $Y_{\Phi_t(x)}$, jednak dla każdego t jest to wektor w innej przestrzeni stycznej $T_{\Phi_t(x)}M$. Możemy jednak wszystkie te wektory *przenieść* z powrotem do $T_x M$ za pomocą różniczki tego potoku: rozważamy $(\Phi_t^* Y)_x := D(\Phi_t)_x^{-1} \cdot Y_{\Phi_t(x)}$. Pozwala to zdefiniować

$$\mathcal{L}_X Y := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t^* Y - Y}{t}.$$

Odnajmy, że w przypadku funkcji podobna konstrukcja (przy określeniu $\Phi_t^* f := f \circ \Phi_t$) faktycznie daje pochodną kierunkową $\mathcal{L}_X f = X(f)$. W przypadku pól wynik $\mathcal{L}_X Y$ zawiera tyleż informację o pochodnych Y , co o pochodnych X – zachodzi wzór $(\mathcal{L}_X Y)(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ (operator po prawej stronie nazywamy *nawiasem Liego*) – poświęcone są temu zadania 4.1, 4.2.

Można dokonać modyfikacji tej konstrukcji, aby uniknąć różniczkowania X . Mianowicie gdyby wektory $Y_{\Phi_t(x)}$ przenosić *wzdłuż krzywej* $\Phi_t(x)$ do wspólnej przestrzeni stycznej $T_x M$ za pomocą tak zwanego *przeniesienia równoległego*, to otrzymane w analogiczny sposób pojęcie pochodnej spełnia warunki, których intuicyjnie byśmy oczekiwali. I rzeczywiście tego właśnie pojęcia będziemy używać, ale dojdziemy do niego całkiem inną drogą.

Na tę drogę naprowadzi nas przypadek podrozmaitości w $\mathbb{R}^n$. Jeśli $M \subseteq \mathbb{R}^n$ jest podrozmaitością i dane są pola styczne X, Y na M (dla wygody możemy przyjąć, że przedłużone gładko na otoczenie M), to oczekivalibyśmy, że wynikiem różniczkowania Y w kierunku X będzie pole styczne na M . Naturalnym kandydatem jest więc wzięcie zwykłej pochodnej kierunkowej $\bar{\nabla}_X Y$ i zrzutowanie wyniku na przestrzeń styczną – wynik oznaczmy przez $\nabla_X^T Y$. Ściślej, jeśli przyjmimy $(\bar{\nabla}_X Y)^i = \nabla_X(Y^i)$ (różniczkowanie po współrzędnych) oraz oznaczmy przez $P(x)$ rzut ortogonalny $\mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$, to definiujemy

$$(\nabla_X^T Y)(x) := P(x)(\bar{\nabla}_X Y)(x). \quad (4.1)$$

Odnajdujemy następujące własności takiej operacji (przypomnijmy, że nawias Liego $[X, Y]$ jest wyjaśniony w zadaniu 4.1):

(a) $C^\infty(M)$ -liniowość względem X :

$$\nabla_{fX_1 + gX_2}^T Y = f\nabla_{X_1}^T Y + g\nabla_{X_2}^T Y \quad \text{dla } f, g \in C^\infty(M);$$

(b) $\mathbb{R}$ -liniowość względem Y :

$$\nabla_X^T (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X^T Y_1 + b\nabla_X^T Y_2; \quad \text{dla } a, b \in \mathbb{R};$$

(c) *reguła Leibniza*:

$$\nabla_X^T (fY) = f\nabla_X^T Y + (\nabla_X f)Y \quad \text{dla } f \in C^\infty(M);$$

(d) symetria (inaczej brak torsji):

$$\nabla_X^T Y - \nabla_Y^T X = [X, Y];$$

(e) zgodność z metryką:

$$\nabla_X \langle Y_1, Y_2 \rangle = \langle \nabla_X^T Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \nabla_X^T Y_2 \rangle.$$

Każda z tych własności w oczywisty sposób przysługuje $\bar{\nabla}$. W przypadku ∇^T nieoczywiste są być może własności (d) i (e) – w pierwszym przypadku należy zauważyć, że pole $[X, Y]$ jest styczne (stąd $P[X, Y] = [X, Y]$), a w drugim, że $\langle \bar{\nabla}_X Y_1, Y_2 \rangle = \langle \nabla_X^T Y_1, Y_2 \rangle$.

4.2 Koneksja na wiązce wektorowej

Co do zasady moglibyśmy w tym miejscu od razu przyjąć własności (a)–(e) powyżej za aksjomaty i sprawdzić, że na dowolnej rozmaitości Riemanna istnieje dokładnie jeden operator spełniający te warunki, nazywany *koneksją Levi-Civity*. Zrobimy to jednak w dwóch krokach, co pozwoli nam na pożyteczne zwiększenie ogólności. Otóż różniczkować będziemy nie tylko pola styczne, ale cięcia dowolnej wiązki wektorowej $E \rightarrow M$. Przypomnijmy, że przestrzeń cięć oznaczamy przez $\Gamma(E)$, a więc w szczególności $\Gamma(TM)$ jest przestrzenią pól stycznych.

Definicja 4.1. Niech $E \rightarrow M$ będzie wiązką wektorową. *Koneksją* lub *pochodną kowariantną* na E nazwiemy operację $\nabla: \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, jeśli jest ona $C^\infty(M)$ -liniowa względem pierwszego argumentu, $\mathbb{R}$ -liniowa względem drugiego argumentu oraz spełnia regułę Leibniza:

- (a) $\nabla_{fX_1+gX_2}Y = f\nabla_{X_1}Y + g\nabla_{X_2}Y$ dla $f, g \in C^\infty(M)$ oraz $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(E)$;
- (b) $\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_XY_1 + b\nabla_XY_2$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $X \in \Gamma(TM)$, $Y_1, Y_2 \in \Gamma(E)$;
- (c) $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$ dla $f \in C^\infty(M)$ oraz $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(E)$.

W świetle definicji wyznaczenie wartości ∇_XY w punkcie $p \in M$ wymaga znajomości pól X, Y na *całym* M . Intuicja związana z różniczkowaniem mówi jednak, że $(\nabla_XY)_p$ powinno zależeć jedynie od wartości X, Y na pewnym otoczeniu p , i tak jest rzeczywiście (zadanie 4.3). Co więcej, ponieważ $(\nabla_XY)_p$ ma być pochodną kierunkową Y w kierunku X , znaczenie powinien mieć jedynie wektor X_p w punkcie p , i to również jest prawdą (zadanie 4.4).

Można się zastanawiać, czy na danej wiązce (np. wiązce stycznej) istnieje więcej niż jedna koneksja. Otóż istnieje ich wiele, a pełną charakteryzację daje poniższe Stwierdzenie:

Stwierdzenie 4.2. Jeśli ∇ jest koneksją na wiązce $E \rightarrow M$, a $A_x: T_xM \times E_x \rightarrow E_x$ przekształceniem dwuliniowym, gładko zależnym od $x \in M$, to przekształcenie ∇' dane wzorem

$$\nabla'_XY := \nabla_XY + A(X, Y)$$

również jest koneksją. Co więcej, różnica między dowolnymi dwiema koneksjami jest zadana przez przekształcenie dwuliniowe A jak wyżej.

Dowód Stwierdzenia 4.2 pominiemy, gdyż jest on analogiczny do zadania 4.4. Można go wyprowadzić z ogólnego faktu (zwanego *Tensor Characterization Lemma* w [Lee97, Lem. 2.4]) stwierdzającego, że każde $C^\infty(M)$ -liniowe przekształcenie między wiązkami w istocie działa „punkt po punkcie” (zadanie 4.5).

Interesującym szczególnym przypadkiem Stwierdzenia 4.2 są tak zwane *symbole Christoffela*. Mianowicie jeśli na M ustalimy koneksję ∇ i zechcemy ją opisać w lokalnych współrzędnych, to możemy to zrobić przez porównanie koneksji ∇ z koneksją $\bar{\nabla}$ zadaną przez różniczkowanie po współrzędnych: $\bar{\nabla}_X(\sum_i Y^i e_i) = \sum_i X(Y^i) e_i$. Zgodnie ze Stwierdzeniem 4.2 mamy $\nabla_XY = \bar{\nabla}_XY + A(X, Y)$ dla pewnego przekształcenia dwuliniowego A . Jego współczynniki Γ_{ij}^k w bazie standardowej (jest to zestaw n^3 funkcji gładkich) nazywamy symbolami Christoffela (drugiego rodzaju). Można je określić, zawężając definicję A do wektorów bazowych $X = e_i$, $Y = e_j$:

$$\nabla_{e_i}e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Brakujące wyżej wyrazy $\bar{\nabla}_{e_i}e_j$ są zerowe na mocy określenia $\bar{\nabla}$.

4.3 Koneksja Levi-Civity

Wracając do warunków (d) i (e) spełnianych przez koneksję ∇^T dla podrozmaitości, przekonamy się teraz, że w abstrakcyjnym kontekście rozmaitości Riemanna (M, g) wyróżniają one jedną jedyną koneksję.

Twierdzenie 4.3 (podstawowy lemat geometrii Riemanna). *Na danej rozmaitości Riemanna (M, g) istnieje dokładnie jedna koneksja ∇ spełniająca warunki:*

(a) *symetria (brak torsji):*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{dla } X, Y \in \Gamma(TM);$$

(b) *zgodność z metryką:*

$$\nabla_X \langle Y_1, Y_2 \rangle = \langle \nabla_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 \rangle \quad \text{dla } X, Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM).$$

Nazywamy ją koneksją Levi-Civity (lub koneksją Riemannowską).

Szkic dowodu. Na podstawie warunków (a) i (b) można wyprowadzić jawny wzór na ∇ . Z (b) wynikają mianowicie równości

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \\ Y \langle X, Z \rangle &= \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle, \\ Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

Jeśli dodamy stronami dwie pierwsze równości i odejmiemy trzecią, a następnie skorzystamy z warunku (a), to otrzymamy:

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, \nabla_X Y + \nabla_Y X \rangle.$$

Wreszcie sumę $\nabla_X Y + \nabla_Y X$ możemy zapisać jako $2\nabla_X Y - [X, Y]$, w ten sposób pozostawiając jedynie jeden wyraz $\nabla_X Y$ zawierający koneksję ∇ . Przepiszmy uzyskaną równość w postaci:

$$2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle. \quad (4.2)$$

Jest to tak zwana *tożsamość Koszula*. Łatwo wynika z niej jednoznaczność ∇ , gdyż prawa strona nie zależy od wyboru koneksji. Skoro iloczyn skalarny $\nabla_X Y$ z dowolnym polem Z jest zadany jednoznacznie, to i pole $\nabla_X Y$ jest zadane jednoznacznie.

Dokończenie dowodu pozostawiamy jako zadanie 4.6. Można charakteryzację (4.2) potraktować jako definicję, a następnie pracownicy sprawdzić poprawność takiej definicji, brak torsji oraz zgodność z metryką. Można też oprzeć się na lokalnych współrzędnych i znaleźć symbole Christoffela, dla których znaleziona lokalnie koneksja spełni (a) i (b). $\square$

4.4 Krzywizna Riemanna

Dla pól stycznych X, Y, Z definiujemy krzywiznę Riemanna jako przekształcenie

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (4.3)$$

Łatwo się przekonać, że jest ono $C^\infty(M)$ -liniowe względem X, Y, Z (zadanie ??), więc zadaje ono w każdym punkcie $x \in M$ przekształcenie trójliniowe $R_x: T_x M \times T_x M \times T_x M \rightarrow T_x M$. Korzystając z metryki, definiujemy też wersję czteroliniową

$$\text{Rm}(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

Definicje krzywizny Ricciego, skalarnej i sekcijnej pozostają takie jak w sekcji 1.4 poświęconej podrozmaitościom w $\mathbb{R}^n$. Tak więc krzywiznę Ricciego otrzymujemy, biorąc ślad względem pierwszej i czwartej współrzędnej:

$$\text{Ric}(X, Y) := (\text{tr}_{1,4} \text{Rm})(X, Y) = \sum_{j=1}^m \text{Rm}_p(e_j, a, b, e_j),$$

gdzie za e_j można przyjąć dowolną bazę ortonormalną. Alternatywnie – i chyba bardziej naturalnie – $\text{Ric}(X, Y)$ można określić jako ślad przekształcenia $Z \mapsto R(X, Y)Z$. Jest to przekształcenie dwuliniowe symetryczne. Biorąc ślad raz jeszcze, dostajemy krzywiznę skalarną:

$$S := \text{tr Ric} = \sum_{j,k=1}^m \text{Rm}(e_j, e_k, e_k, e_j).$$

Definiujemy też *krzywiznę sekcijną*. Jeśli w przestrzeni stycznej $T_p M$ wybierzemy dwuwymiarową podprzestrzeń $\alpha \subseteq T_p M$, to krzywiznę sekcijną w kierunku α definiujemy jako

$$\text{sec}(\alpha) := \text{Rm}(u, v, v, u) \quad \text{dla dowolnej bazy o.n. } u, v \in \alpha,$$

lub też dla dowolnej bazy $u, v \in \alpha$,

$$\text{sec}(\alpha) = \text{sec}(u, v) = \frac{\text{Rm}(u, v, v, u)}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2};$$

4.5 Theorema Egregium

Wróćmy do Theorema Egregium Gaussa, czyli Twierdzenia 1.11. Jeśli przyjmiemy definicję krzywizny z poprzedniej sekcji, to nie ma czego dowodzić – definicja ta nie korzystała z zanurzenia, więc nie jest w żaden sposób zależny od zanurzenia. Jeśli dana jest izometria $f: (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$, to musi ona zachowywać wszystkie wewnętrznie zdefiniowane własności rozmaitości, a więc również koneksję Levi-Civity i w konsekwencji krzywiznę Riemanna.

Żeby wykazać, że ta sama niezmienniczość przysługuje krzywiznie zdefiniowanej w sekcji 1.4 poprzez zanurzenie, sprawdzimy zgodność obu definicji. Innymi słowy, rozważymy rozmaitość podrozmaitość $M \subseteq \mathbb{R}^n$ (z metryką indukowaną z $\mathbb{R}^n$) i dla krzywizny zdefiniowanej wewnętrznie w (4.3) wyprowadzimy wzór (1.1), zwany *równaniem Gaussa* [Lee97, Ch. 8, eq. (8.4)], [Pet06, Ch. 4], [GHL04, Def. 5.3].

Dowód Twierdzenia 1.11. Oznaczmy koneksję Levi-Civity $\bar{\nabla}$ na $\mathbb{R}^n$ oraz koneksję Levi-Civity ∇ na M . Wiemy, że ta druga jest koneksją styczną, to znaczy $\nabla_X Y$ jest rzutem ortogonalnym $\bar{\nabla}_X Y$ na przestrzeń styczną do M . Zgodnie z uwagą poprzedzającą Definicję 1.6, ich różnica jest więc dana przez drugą formę podstawową A :

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + A(X, Y).$$

Dowód sprowadza się do wielokrotnego zastosowania tego rozkładu oraz prostopadłości $A(X, Y)$ do M ,

Korzystając ze styczności W , mamy

$$\begin{aligned}
 \text{Rm}(X, Y, Z, W) &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle \\
 &= \langle \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z - \bar{\nabla}_Y \nabla_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, W \rangle \\
 &= \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, W \rangle + \langle \bar{\nabla}_X A(Y, Z) - \bar{\nabla}_Y A(X, Z), W \rangle \\
 &= \langle \bar{\nabla}_X A(Y, Z) - \bar{\nabla}_Y A(X, Z), W \rangle,
 \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej linijce skorzystaliśmy z faktu, że przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ ma zerową krzywiznę Riemanna.

Odnotujemy prostopadłość $\langle A(Y, Z), W \rangle \equiv 0$, z której w szczególności wynika zerowanie się pochodnej $\nabla_X \langle A(Y, Z), W \rangle \equiv 0$. W połączeniu z metrycznością koneksji $\bar{\nabla}$ oraz rozkładem $\bar{\nabla}_X W = \nabla_X W - A(X, W)$ (na część styczną i prostopadłą) daje nam to równości

$$\langle \bar{\nabla}_X A(Y, Z), W \rangle = -\langle A(Y, Z), \bar{\nabla}_X W \rangle = \langle A(Y, Z), A(X, W) \rangle.$$

Analogiczna równość $\langle \bar{\nabla}_Y A(X, Z), W \rangle = \langle A(X, Z), A(Y, W) \rangle$ zachodzi dla drugiego członu, co kończy dowód. $\square$

Uwaga 4.4. Dokładnie ten sam dowód daje wzór Gaussa w ogólniejszym przypadku podrozmaitości $M \subseteq N$ w abstrakcyjnym przypadku (gdzie M dziedziczy metrykę z N). Wówczas:

$$\text{Rm}^M(X, Y, Z, W) - \text{Rm}^N(X, Y, Z, W) = \langle A(X, W), A(Y, Z) \rangle - \langle A(X, Z), A(Y, W) \rangle.$$

Za definicję drugiej formy podstawowej A może posłużyć dowolna z dotychczasowych charakterystyk.

4.6 Iloczyn tensorowy i koneksja na wiązkach tensorowych

Chcielibyśmy zdefiniować hesjan i pochodne wyższych rzędów dla funkcji gładkich, jak również dla pól stycznych etc. Naiwną definicją hesjanu $f \in C^\infty$ ewaluowanego na polach stycznych X, Y byłaby iterowana pochodna $\nabla_X \nabla_Y f$. To oczywiście niewłaściwa definicja, gdyż w rezultacie różniczkujemy również Y , a nie tylko f . Warto przypomnieć sobie, jakich algebraicznych zabiegów używa się do zdefiniowania pochodnych wyższych rzędów podczas kursu Analizy Matematycznej II.1 [Str12, Rozdz. 2.5.2, 2.5.3]. Podobnie postąpimy tutaj.

Pożyteczny będzie język iloczynu tensorowego. Pozwala on na „przetłumaczenie” przekształceń wieloliniowych na liniowe. Znamy już przykłady przekształceń wieloliniowych – metryka Riemanna jest 2-liniowa, krzywizna Riemanna 4-liniowa, a krzywizna Ricciego 2-liniowa.

Definicja 4.5. Iloczyn tensorowy dwóch przestrzeni wektorowych V, W definiujemy jako przestrzeń wektorową $V \otimes W$ wraz z dwuliniowym przekształceniem $V \times W \xrightarrow{\otimes} V \otimes W$ (używamy przy tym zapisu $\otimes(v, w) = v \otimes w$), o następującej własności uniwersalnej. Dla dowolnego przekształcenia dwuliniowego $V \times W \xrightarrow{B} U$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\bar{B}: V \otimes W \rightarrow U$ spełniające $B(v, w) = \bar{B}(v \otimes w)$.

Szczegóły algebraiczne dotyczące tego pojęcia można znaleźć w [Alu09, Ch. VIII.2]. Łatwo się przekonać, że tak określony iloczyn $V \otimes W$ jest jednoznaczny z dokładnością do (odpowiednio rozumianego) izomorfizmu. W sytuacji przestrzeni skończenie wymiarowych łatwo też się przekonać o istnieniu: jeśli przyjmujemy bazy $v_1, \dots, v_m$ i $w_1, \dots, w_m$, to za $V \otimes W$ możemy przyjąć mn -wymiarową przestrzeń o bazie $v_i \otimes w_j$. W przypadku dwóch wektorów $v \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$ często stosuje się zresztą zapis $v \otimes w$ dla macierzy vw^T – jej wyrazy to właśnie współczynniki w opisaną tu bazie.

Od teraz interesować nas będą głównie iloczyny tensorowe przestrzeni stycznej $V = T_x M$ w jakimś punkcie oraz przestrzeni funkcjonałów V^* . Przypomnijmy, że dzięki skończonemu wymiarowi mamy kanoniczny izomorfizm $V^{**} \cong V$ (zadany przez $v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$). Wśród izomorfizmów $V \cong V^*$ można wyróżnić ten zadany przez iloczyn skalarny, a więc $v \mapsto g(v, \cdot)$ – ale na razie nie będziemy wybierać iloczynu skalarnego. Warto odnotować inne użyteczne izomorfizmy, jak ten między $(V \otimes W)^*$ i $V^* \otimes W^*$ czy między przekształceniami liniowymi $V \rightarrow W$ a elementami iloczynu $V^* \otimes W$. W szczególności przestrzeń endomorfizmów $\text{End}(V)$ jest izomorficzna z $V^* \otimes V$, co pozwala na zgrabną definicję śladu/kontrakcji. Przekształcenie ewaluacji $V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (czyli $(\alpha, w) \mapsto \langle \alpha, w \rangle$) indukuje przekształcenie liniowe $V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$ zwane kontrakcją, które po zastosowaniu wspomnianego izomorfizmu daje ślad $\text{tr}: \text{End}(V) \rightarrow \mathbb{R}$.

Kontrakcję będziemy też stosować w przypadku większych iloczynów. Przypomnijmy, że krzywizna Riemanna Rm_p , zdefiniowana w (1.1) dla podrozmaitości lub ogólnie w poprzedniej sekcji, jest przekształceniem czteroliniowym $R_x: V \times V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, co odpowiada przekształceniu liniowemu $V \otimes V \otimes V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$, lub też elementowi $V^* \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^*$. Krzywiznę Ricciego Ric_p zdefiniowaliśmy jako ślad $\text{tr}_{1,4} R_p$, co oznacza zastosowanie kontrakcji do pierwszego i czwartego czynnika (wcześniej któreś z V^* trzeba zamienić na V za pomocą iloczynu skalarnego). Jest to element $V^* \times V^*$, a więc przekształcenie tego samego typu co metryka Riemanna.

Przyjmijmy bez dowodu, że jeśli dane są dwie wiązki wektorowe E, F nad M , to na iloczynie tensorowym $E \otimes F$ również można naturalnie wprowadzić strukturę wiązki (każde z włókien $E \otimes F$ to $E_x \otimes F_x$). Podobnie przyjmijmy za daną strukturę wiązki na E^* . Dzięki temu będziemy korzystać z dowolnych iloczynów tensorowych TM oraz T^*M : iloczyn tensorowy k kopii TM i l kopii T^*M oznaczmy przez $T_l^k M$. Dobra wiadomość jest taka, że wybór koneksji na TM jednoznacznie wyznacza kompatybilny wybór koneksji na każdej z wiązek tensorowych $T_l^k M$, co stwierdza poniższy lemat.

Lemat 4.6. *Dana jest koneksja ∇ na TM . Wówczas istnieje dokładnie jedna rodzina koneksji na T_l^k (również oznaczanych ∇) spełniająca warunki:*

- (a) ∇ zgadza zadaną koneksję na $T_0^1 M = TM$ oraz z pochodną kierunkową na $T_0^0 M = M \times \mathbb{R}$ (cięcia tej wiązki to $C^\infty(M)$);
- (b) zachodzi reguła Leibniza dla iloczynu tensorowego:

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G);$$

- (c) ∇ komutuje z kontrakcją: jeśli tr jest kontrakcją na dowolnych dwóch indeksach (jednym odpowiadającym V i jednym V^*), to

$$\nabla_X(\text{tr } Y) = \text{tr}(\nabla_X Y).$$

Własności te implikują na przykład, że pola stycznego Y (czyli cięcia $T_0^1 M$) i 1-formy ω (czyli cięcia $T_1^0 M$) mamy

$$X \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle,$$

zob. zadanie 4.8. Dowód Lematu 4.6 – którego szczegóły pominiemy – zaczyna się on zdefiniowania ∇ na $T_1^0 M$ poprzez powyższy wzór (wymaga to sprawdzenia, że wzór na $\langle \nabla_X \omega, Y \rangle$ faktycznie jest $C^\infty(M)$ -liniowy względem Y). Następnie dokonujemy przedłużenia na dowolne iloczyny w oparciu o regułę Leibniza i sprawdzamy, że spełnione są warunki (a), (b), (c).

Możliwość różniczkowania pól tensorowych pozwala na zgrabne przeformułowanie (i lepsze zrozumienie) obu warunków z definicji koneksji Levi-Civity.

Stwierdzenie 4.7. *Koneksja ∇ na TM jest zgodna z metryką (inaczej: metryczna), jeśli $\nabla g \equiv 0$.*

Dowód. Z reguły Leibniza mamy

$$X(g(Y_1, Y_2)) = (\nabla_X g)(Y_1, Y_2) + g(\nabla_X Y_1, Y_2) + g(Y_1, \nabla_X Y_2).$$

Warunek zgodności z metryką to dokładnie powyższa równość, ale z pominięciem członu $\nabla_X g$. To dowodzi równoważności. $\square$

Wróćmy do problemu hesjanu dowolnych pól tensorowych, ale w szczególności funkcji gładkich. Jeśli mamy $F \in \Gamma(T_l^k M)$ i w wielkości $\nabla_X F \in \Gamma(T_l^k M)$ pominiemy X , to otrzymamy $\nabla F \in \Gamma(T_{l+1}^k M)$. Istotnie, dla ustalonego $x \in M$ przekształcenie $X_x \mapsto (\nabla_X F)_x \in (T_l^k M)_x$ jest liniowe, a więc jest elementem $T_x^* M \otimes (T_l^k M)_x$, czyli $(T_{l+1}^k M)_x$. Dla przykładu, ∇f to nic innego jak różniczka df , czyli 1-forma. Można tak otrzymane pole różniczkować dalej.

Definicja 4.8. Hesjanem pola tensorowego $F \in \Gamma(T_l^k M)$ nazywamy pole $\nabla^2 F = \nabla \nabla F \in \Gamma(T_{l+2}^k M)$. Działa ono w następujący sposób:

$$\nabla^2 F(X, Y) = (\nabla_X \nabla F)(Y) = \nabla_X(\nabla_Y F) - \nabla_{\nabla_X Y} F.$$

Będziemy też stosować oznaczenie $\nabla_{X,Y}^2 F$ na $\nabla^2 F(X, Y)$, trzeba tylko uważać, bo kolejność ma znaczenie. Z jednym wyjątkiem:

Stwierdzenie 4.9. *Koneksja ∇ jest beztorsyjna wtedy i tylko wtedy, gdy hesjan $\nabla^2 f$ jest symetryczny dla dowolnej funkcji $f \in C^\infty(M)$, to znaczy zachodzi $\nabla_{X,Y}^2 f = \nabla_{Y,X}^2 f$.*

Dowód. Obliczmy:

$$\begin{aligned} \nabla_{X,Y}^2 f - \nabla_{Y,X}^2 f &= (\nabla_X(\nabla_Y f) - \nabla_{\nabla_X Y} f) - (\nabla_Y(\nabla_X f) - \nabla_{\nabla_Y X} f) \\ &= [X, Y](f) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(f). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy równoważność. $\square$

Dla pól stycznych hesjan nie jest już symetryczny, a dokładnie:

Uwaga 4.10. Wzór (4.3) na krzywiznę Riemanna można równoważnie przepisać jako

$$R(X, Y)Z = \nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z.$$

Istotnie, nawias Liego $[X, Y]$ występujący w (4.3) można przepisać jako $\nabla_X Y - \nabla_Y X$, co daje nam dokładnie różnicę między hesjanem a iterowaną pochodną.

4.7 Zadania

Zadanie 4.1. Dane są pola styczne X, Y na rozmaitości M . Wykazać, że komutator różniczkowań odpowiadających X i Y , czyli operator

$$[X, Y]f := X(Y(f)) - Y(X(f))$$

jest różniczkowaniem (tzn. spełnia regułę Leibniza) i z tego powodu definiuje pewne pole styczne na M , zwane *nawiasem Liego* pól X i Y . Wyprowadzić wzory

$$[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y, \quad [fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X.$$

oraz wyrażenie w lokalnych współrzędnych: $[X, Y]^i = X(Y^i) - Y(X^i)$.

Zadanie 4.2. Dane są pola styczne X, Y oraz potok Φ_t pola X (tzn. $\Phi_0 = \text{id}$, $\partial_t \Phi_t(x) = X(\Phi_t(x))$). Definiujemy pole $(\Phi_t^* Y)_x = (D\Phi_t)_x^{-1} \cdot Y_{\Phi_t(x)}$, a następnie pochodną Lie Y w kierunku X :

$$(\mathcal{L}_X Y)_x := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t^* Y - Y_x}{t}.$$

Wykazać, że $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Zadanie 4.3 ([Lee97, Lem. 4.1, Ex. 4.1]). Przekonać się, że każda koneksja jest operatorem lokalnym, tzn. jeśli na pewnym zbiorze otwartym $U \subseteq M$ zachodzi $X \equiv X'$ oraz $Y \equiv Y'$, to $\nabla_X Y \equiv \nabla_{X'} Y'$ na U .

Wskazówka. Do pokazania jest, że $(\nabla_X Y)_p = 0$, jeśli $Y \equiv 0$ na $U \ni p$. Rozważyć $(\nabla_X(\varphi Y))_p$, gdzie $\varphi \in C_c^\infty(U)$ spełniają $\varphi(p) = 1$.

Zadanie 4.4 ([Lee97, Lem. 4.2]). Przekonać się, że wartość $\nabla_X Y$ w punkcie $p \in M$ zależy jedynie od wartości X_p (oraz zachowania Y w otoczeniu p , jak w poprzednim zadaniu).

Zadanie 4.5. Dana jest wiązka $E \rightarrow M$ oraz przekształcenie $C^\infty(M)$ -liniowe $A: \Gamma(E) \rightarrow C^\infty(M)$. Wówczas istnieje przekształcenie liniowe $B_x: E_x \rightarrow \mathbb{R}$ gładko zależne od $x \in M$, dla którego zachodzi tożsamość $A(X)_x = B_x(X_x)$.

Zadanie 4.6. Dokończyć dowód Twierdzenia 4.3 poprzez konstrukcję koneksji Levi-Civity. Prześledzić następujące drogi dowodu:

- (a) Sprawdzić, że prawa strona (4.2) jest $C^\infty(M)$ -liniową funkcją Z , więc pozwala zdefiniować

Zadanie 4.7. Sprawdzić, że krzywizna Riemanna $R(X, Y)Z$ zdefiniowana wzorem (4.3) jest $C^\infty(M)$ -liniową funkcją każdego z argumentów X, Y, Z .

Zadanie 4.8. Wykazać następującą własność koneksji indukowanej na iloczynach tensorowych: dla pola stycznego Y i 1-formy ω zachodzi wzór

$$X \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle.$$

Wskazówka. Rozważyć wzór na wielkość $\nabla_X(\omega \otimes Y)$ i wzór na jej kontrakcję.

Zadanie 4.9. Pokazać, że standardowa koneksja na $\mathbb{R}^n$ jest jedyną spełniającą warunek $\nabla X \equiv 0$ dla wszystkich stałych pól wektorowych (tzn. pól o stałych współrzędnych w bazie standardowej).

Zadanie 4.10. Uzasadnić, że jeśli $F: M \rightarrow N$ jest izometrią, to $F_*(\nabla_X Y) = \nabla_{F_*X} F_*Y$ dla dowolnych pól stycznych X, Y na M (w obu przypadkach używamy koneksji Levi-Civity).

Zadanie 4.11. Jedyne izometrie $F: (\mathbb{R}^n, g_e) \rightarrow (\mathbb{R}^n, g_e)$ to izometrie afiniczne, to znaczy postaci $F(x) = Qx + b$ dla pewnych $Q \in O(n)$ i $b \in \mathbb{R}^n$.

Wskazówka. Wykazać, że F przekształca stałe pola styczne na stałe pola styczne.

Tematy referatów

Istnienie minimalizujących geodezyjnych. Na rozmaitościach zwartych można w naturalny sposób wykorzystać metodę bezpośrednią rachunku wariacyjnego do znalezienia najkrótszej krzywej między dwoma zadanymi punktami. Można nawet minimalizować odległość w obrębie zadanej klasy homotopii dróg. Dowód można znaleźć w książce Josta [Jos17, Ch. 1.5].

Twierdzenie Nasha–Kuipera. Twierdzenie to Nash dowiódł (niedługo) przed twierdzeniem o gładkim zanurzeniu izometrycznym. Dowód wymaga tych samych lub podobnych narzędzi, wzmocnionych przez odpowiednią iterację. Można go znaleźć w notatkach Székelyhidiiego [Szé12, Ch. 3], przy czym po dowód jednego z lematów warto sięgnąć do Lematu 3.18.

Oszacowania Schaudera. W dowodzie twierdzenia Nasha wybraliśmy oszacowania w przestrzeniach Sobolewa H^s , ale klasyczna droga wiedzie przez oszacowania w $C^{k,\alpha}$, czyli tak zwane oszacowania Schaudera. Ich dowód można znaleźć w wielu miejscach w literaturze, ale notatki Haslhofer [Has21] zawierają nowoczesny i szczególnie czytelnie napisany dowód oszacowań w przypadku laplasjanu.

Bibliografia

- [AFP00] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.
- [Alu09] Paolo Aluffi. *Algebra: chapter 0*, volume 104 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [G91] Matthias Günther. Isometric embeddings of Riemannian manifolds. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)*, pages 1137–1143. Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.
- [GHL04] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [GT01] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [Has21] Robert Haslhofer. PDE II: Schauder estimates. https://www.math.toronto.edu/roberth/pde2/schauder_estimates.pdf, 2021. Lecture notes, University of Toronto.
- [Jos17] Jürgen Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Universitext. Springer, Cham, seventh edition, 2017.
- [Lee97] John M. Lee. *Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to curvature.
- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.
- [Pet06] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [Spi79] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*. Publish or Perish, Inc., Wilmington, DE, second edition, 1979.
- [Ste64] Shlomo Sternberg. *Lectures on differential geometry*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1964.

- [Str12] Paweł Strzelecki. Analiza matematyczna II. <https://dydmat.mimuw.edu.pl/analiza-matematyczna-ii>, 2011/2012. Skrypt wykładu, Uniwersytet Warszawski.
- [Szé12] László Székelyhidi. From isometric embeddings to turbulence. https://www.mis.mpg.de/publications/preprint-repository/lecture_note/2012/issue-41, 2012. Lecture notes, Max Planck Institute.
- [Tao16] Terence Tao. Notes on the nash embedding theorem. <https://terrytao.wordpress.com/2016/05/11/notes-on-the-nash-embedding-theorem/>, May 2016. Blog post on *What's New*, Accessed: 2025-10-24.
- [Tay73] Laird E. Taylor. The tangent space to a C^k manifold. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79:746, 1973.
- [Yan98] Deane Yang. Günther's proof of Nash's isometric embedding theorem. <https://arxiv.org/abs/math/9807169>, 1998. arXiv preprint.