

1 Twierdzenie Fubiniego

Twierdzenie Fubiniego. Jeśli $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją całkowalną, to

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z) \, d\lambda_{n+m}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x).$$

Uwaga 1. Ta sama równość zachodzi z odwrotną kolejnością całkowania, i w ogóle z dowolnym rozbiem $z \in \mathbb{R}^{n+m}$ na dwie zmienne.

Uwaga 2. Całkowalność funkcji

$$y \mapsto f(x, y) \quad (\text{dla p.w. } x \in \mathbb{R}^n), \quad x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, d\lambda_m(y)$$

jest częścią tezy twierdzenia.

Uwaga 3. Analogiczne twierdzenie zachodzi, gdy f jest nieujemną funkcją mierzalną.

Zadanie 1.1. Dany jest graf o V wierzchołkach i E krawędziach, w którym z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie 3 krawędzie.

- (a) Wykazać, że $3V = 2E$.
- (b) Jaki ma to związek z twierdzeniem Fubiniego?

Zadanie 1.2. Obliczyć całki

$$\int_0^1 \int_0^{x^3} e^{y/x} \, dy \, dx, \quad \int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} \, dx \, dy, \quad \int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} \, dy \, dx, \quad \int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{1+x^4} \, dx \, dy.$$

Zadanie 1.3. Obliczyć całkę $\int_A f \, d\lambda_2$, gdzie

- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$, $f(x, y) = \frac{1}{x\sqrt{y}}$;
- (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x\}$, $f(x, y) = (1 - x + y)e^{-x}$;
- (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq y\}$, $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Uwaga. Nie w każdym przypadku jest oczywiste, że założenia twierdzenia Fubiniego są spełnione.

Zadanie 1.4. (a) Niech A będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym przez parabolę $y = x^2$ i prostą $x + y = 2$. Obliczyć

$$\int_A 6x + 2y^2 \, d\lambda_2(x, y).$$

(b) Niech B będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym krzywymi $y = x^2$ i $y = x^3$. Obliczyć

$$\int_B xy^2 \, d\lambda_2(x, y).$$

Zadanie 1.5. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = |x|^\alpha$ jest całkowalna

- na kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$?
- na dopełnieniu kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$?

Wskazówka. Dla $n = 1$ odpowiedź brzmi odpowiednio: $\alpha > -1$, $\alpha < -1$.

Zadanie 1.6. Wykazać, że $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

Wskazówka. Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d\lambda_2(x, y)$, korzystając z twierdzenia Fubini'ego i zasady Cavalieriego.

Zadanie 1.7. Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku przecięcia dwóch (nieskończonych) walców o promieniu 1 i prostopadle przecinających się osiach.

Zadanie 1.8. Dla funkcji całkowalnej f wyprowadzić równość

$$2 \int_a^b \int_x^b f(x)f(y) dy dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2.$$

Zadanie 1.9. ♠ Niech $0 < a < b$. Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

Wskazówka. (sposób I) Zapisać różnicę $e^{-ax} - e^{-bx} = e^{-tx}|_{t=a}^{t=b}$ jako całkę z pochodnej.

Wskazówka. (sposób II) Całkę po przedziale $[\varepsilon, \infty)$ sprowadzić przez podstawienie do całki $[a, b]$, a następnie przejść do granicy $\varepsilon \rightarrow 0$.

Zadanie 1.10. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem o skończonej mierze Lebesgue'a. Udowodnić implikację

$$\int_{A \times A} |x - y|^2 d\lambda_{2n}(x, y) < \infty \implies \int_A |x| d\lambda_n(x) < \infty.$$

Zadanie 1.11. ★ (do 13.03.2025) Dane są obszar $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, funkcja całkowalna $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (tzn. każda ze składowych $F^1, \dots, F^n$ jest funkcją całkowalną) oraz promień $r > 0$. Definiujemy:

$$\operatorname{div}_r F(x) := r^{-n-2} \int_{B_r(x)} F(y) \cdot (y - x) dy, \quad \vec{n}_r(x) := r^{-n-1} \int_{B_r(x) \cap \Omega} (x - y) dy,$$

oraz przez $(\partial\Omega)_r$ oznaczamy zbiór wszystkich punktów odległych od $\partial\Omega$ o najwyżej r . Wyprowadzić tożsamość:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_r F(x) dx = \frac{1}{r} \int_{(\partial\Omega)_r} F(x) \cdot \vec{n}_r(x) dx.$$

Uwaga. W granicy $r \rightarrow 0$ można stąd otrzymać twierdzenie o dywergencji:

$\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} F \cdot \vec{n} dx$. Będziemy je omawiać pod koniec semestru.

2 Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie o zamianie zmiennych. Jeśli $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ jest dyfeomorfizmem dwóch zbiorów otwartych $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$, a $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną, to

$$\int_{\Omega'} f \, d\lambda_n = \int_{\Omega} (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| \, d\lambda_n$$

Uwaga 1. Całkowalność funkcji $(f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|$ jest częścią tezy twierdzenia.

Uwaga 2. Analogiczne twierdzenie zachodzi, gdy f jest nieujemną funkcją mierzalną.

Zadanie 2.1. Obliczyć pole obszaru płaszczyzny ograniczonego od wewnątrz okręgiem jednostkowym, zaś od zewnątrz krzywą opisaną we współrzędnych biegunowych równaniem $r = 2 + \cos \phi$.

Zadanie 2.2. ★ (do 17.03.2025) Dane są koła ω_1, ω_2 o promieniu 1. Pierwsze jest nieruchome, a drugie toczy się po nim bez poślizgu. Wyznaczyć pole ograniczone przez trajektorię wybranego punktu na obwodzie koła ω_2 .

Zadanie 2.3. Obliczyć średnią odległość punktu trójwymiarowej kuli jednostkowej do jej środka.

Zadanie 2.4. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie figurą pod wykresem funkcji $y = \frac{1}{x}$ na przedziale $x \in [1, \infty)$, a B bryłą obrotową powstałą przez obrót A wokół osi x . Wykazać, że $\lambda_2(A) = \infty$, ale $\lambda_3(B) < \infty$.

Uwaga. Jest intuicyjnie zrozumiałe, że skoro $\lambda_2(A) = \infty$, to bryła B ma nieskończoną powierzchnię boczną. Może to dziwić: bryły tej „nie da się pomalować” skończoną ilością farby, choć „da się ją wypełnić po brzegi”.

Zadanie 2.5. Wykazać, że

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} \, d\lambda_2(x,y) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wskazówka. Obrócić o 45° , czyli zastosować podstawienie $x = u + v, y = u - v$.

Uwaga. Wraz z Zadaniem 3.2 daje to rozwiązanie problemu bazylejskiego: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (zob. T. Apostol, *A proof that Euler missed: evaluating $\zeta(2)$ the easy way*, The Mathematical Intelligencer 1983, oraz [link](#))

Zadanie 2.6. Rozważmy następujące przekształcenia $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

(a) $\Phi(z) = z^2$,

(b) $\Phi(z) = e^z$.

Wskażać możliwie dużą dziedzinę $A \subseteq \mathbb{C}$, dla której $\Phi: A \rightarrow \Phi(A)$ jest dyfeomorfizmem. Jaki jest wyznacznik różniczkowy Φ ?

Zadanie 2.7. ■ Dane są: funkcja $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (ozn. $p = (x, y)$) klasy C^1 oraz obszar

$$E_T := \{r \cdot p(t) : r \in (0, 1), t \in (0, T)\}$$

„zamieciony” przez wektor $p(t)$ w czasie $t \in (0, 1)$. Dla małych $T > 0$ wyprowadzić wzór na pole tego obszaru:

$$\lambda_2(E_T) = \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{x}y - x\dot{y}| dt$$

przy dodatkowym założeniu, że funkcja podcałkowa się nie zeruje.

Uwaga. Zadanie to pokazuje równoważność między zachowaniem momentu pędu (wyrażonego wzorem $|p \times \dot{p}|$) a II prawem Keplera (wyrażonym jako proporcjonalność pola E_T do czasu T).

Zadanie 2.8. ★ (do 27.03.2025) Niech $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną, a $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funkcją gładką o zwartym nośniku (tzn. zerującą się poza pewną kulą).

(a) Uzasadnić, że przekształcenie

$$\Phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi_t(x) = x + t \cdot F(x)$$

jest dyfeomorfizmem dla t z pewnego przedziału $(-t_0, t_0)$. Wyznaczyć pochodną $\det D\Phi_t(x)$ względem t w punkcie $t = 0$.

(b) Niech Ψ_t będzie odwrotnością dyfeomorfizmu Φ_t z punktu a). Wykazać, że pochodną funkcji

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) := \int_{\mathbb{R}^n} h(\Psi_t(x)) dx$$

w punkcie $t = 0$ jest

$$f'(0) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) \right)}_{\text{ozn. } \operatorname{div} F(x)} dx.$$

Wskazówka. Można przyjąć wzór $\det(I + tA) = 1 + t \cdot \operatorname{tr} A + o(t)$ za znany.

Zadanie 2.9. ★ (do 27.03.2025) Niech $F: U \rightarrow V$ będzie dyfeomorfizmem (klasy C^1) między dwoma obszarami w $\mathbb{R}^n$. Wprowadźmy oznaczenie

$$d_r(x) := \frac{\lambda_n(F(B_r(x) \cap U))}{\lambda_n(B_r)} \quad \text{dla } x \in U.$$

a) Wykazać bezpośrednio (nie powołując się na twierdzenie o zamianie zmiennych), że

$$\int_U d_r(x) \, dx \leq \lambda_n(V).$$

b) Wywnioskować z poprzedniego punktu, że

$$\int_U |\det DF(x)| \, dx \leq \lambda_n(V).$$

c) Wywnioskować twierdzenie o zamianie zmiennych.

Uwaga. Sensem tego zadania jest alternatywny dowód twierdzenia o zamianie zmiennych, więc nie należy się na nie powoływać. Można za to przyjąć bez dowodu zbieżność

$$d_r(x) \xrightarrow{r \rightarrow 0} |\det DF(x)| \quad \text{dla } x \in U,$$

która jest istotnym lematem również w standardowym dowodzie.

3 Praca domowa – całkowanie w $\mathbb{R}^n$

Zasady rozwiązywania. Rozwiązania zadań należy oddać na piśmie podczas zajęć **13 marca** lub wcześniej. Po uzyskaniu indywidualnej zgody dopuszczalne są odstępstwa (przedłużony termin i/lub forma elektroniczna), ale wówczas liczba zdobytych punktów dzieli się przez 2.

Zadanie 3.1. Dany jest zbiór

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x, x^2 y \leq 16\}.$$

Obliczyć całkę $\int_A 1 \, d\lambda_2$.

Zadanie 3.2. Wykazać, że

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} \, d\lambda_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Wskazówka. Wykorzystać rozwinięcie funkcji $\frac{1}{1-t}$ w szereg potęgowy.

Uwaga. Można się przekonać (Zadanie 2.5), że lewa strona jest równa $\frac{\pi^2}{6}$.

Zadanie 3.3. Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu figury pod wykresem funkcji $y = x^2$, $x \in [1, 2]$, wokół osi x .

Zadanie 3.4. Wyznaczyć całkę

$$\int_D (x^2 + y^2) \, d\lambda_2(x, y), \quad \text{gdzie } D = \{1 < x^2 - y^2 < 2, 2 < xy < 4, x, y \geq 0\}.$$

Wskazówka. Można (ale nie trzeba) skorzystać z podstawienia $z \mapsto z^2$ z Zadania 2.6.

4 Przestrzeń L^1 i sploty

Zadanie 4.1. Dany jest ciąg funkcji $f_n \in L^1$ spełniający $\|f_{n+1} - f_n\|_{L^1} \leq 2^{-n}$. Wprowadźmy oznaczenia:

$$g_n(x) := \inf_{k \geq n} f_k(x), \quad g(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

i odnotujmy przy tym, że $g_n(x) \nearrow g(x)$. Wykazać, że:

$$\begin{aligned} f_m(x) - f_k(x) &\leq \sum_{j=n}^{\infty} |f_{j+1}(x) - f_j(x)| && \text{dla } m, k \geq n, \\ \int f_m - g_n &\leq 2^{-n+1} && \text{dla } m \geq n, \\ \int g - g_n &\leq 2^{-n+1} && \text{dla } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wywnioskować, że f_n zbiega do g w L^1 , oraz że ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny dla p.w. x .

Uwaga. Zadanie to daje alternatywny dowód zupełności przestrzeni L^1 .

Zadanie 4.2. Wskazać ciąg funkcji $f_n \in L^1([0, 1])$ spełniający $\|f_n\|_{L^1} \leq 1$, który nie posiada podciągu zbieżnego w $L^1([0, 1])$.

Uwaga. Istnienie takiego ciągu pokazuje, że kula jednostkowa w przestrzeni $L^1([0, 1])$ nie jest zwarta.

Zadanie 4.3. Pokazać, że dla dowolnego $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ funkcja $\mathbb{R}^n \ni v \mapsto f(\cdot - v) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ jest funkcją ciągłą.

Wskazówka. Warto skorzystać z faktu, że funkcje ciągłe o zwartym nośniku są gęste w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 4.4. Niech $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie funkcją gładką o zwartym nośniku i całce $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi$ równej 1; dla $r > 0$ określmy $\varphi_r(x) := r^{-n} \varphi(x/r)$. Wykazać, że jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to przy $r \rightarrow 0$ zachodzi zbieżność $\varphi_r * f \rightarrow f$ w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Wskazówka. Skorzystać z ciągłości przesunięć (Zadanie 4.3).

Splot funkcji

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \, dy$$

Zadanie 4.5. Dane są dwie niezależne ograniczone zmienne losowe A, B o wartościach w liczbach naturalnych. Oznaczmy $a_k := \mathbb{P}(A = k)$, $b_k := \mathbb{P}(B = k)$ oraz $c_k := \mathbb{P}(A + B = k)$. Wykazać, że ciąg (c_k) jest splotem ciągów (a_k) i (b_k) , to znaczy

$$c_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{k-i} b_i.$$

Przekonać się również, że wielomian $\sum c_k x^k$ jest iloczynem wielomianów $\sum a_k x^k$ i $\sum b_k x^k$.

Zadanie 4.6. ♣ Dla $a, b > 0$ przyjmijmy

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \, dx \quad \text{oraz} \quad B(a, b) := \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \, dx.$$

Wyprowadzić tożsamość $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Wskazówka. Wykorzystać splot funkcji $f_c(x) = x^{c-1} e^{-x} \mathbb{1}_{x>0}$ dla $c = a, b$.

Zadanie 4.7. Znaleźć przykład funkcji $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dla których całka definiująca $f * g(0)$ nie jest zbieżna.

Zadanie 4.8. Wykazać, że jeśli $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $f * g$ jest funkcją ciągłą.

Uwaga. Norma L^∞ jest prawie jak norma supremum:

$$\|f\|_{L^\infty} = \min\{M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.w.}\}$$

Przestrzeń L^∞ zawiera wszystkie funkcje ograniczone prawie wszędzie.

Zadania dodatkowe

Zadanie 4.9. (kostki Sichermana) Niech A, B będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednostajnym rozkładzie na $\{1, \dots, 6\}$ (odpowiada to dwóm rzutom kostką). Znaleźć niezależne zmienne A', B' o innym rozkładzie na liczbach naturalnych, ale dające ten sam rozkład sumy $A' + B'$ co $A + B$.

Zadanie 4.10. Całki niewłaściwe

$$B_k := \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \cdots \frac{\sin(x/(2k+1))}{x/(2k+1)} dx$$

są równe π dla $k = 0, 1, \dots, 6$. Ale dla $k = 7$ dostajemy

$$B_7 = \frac{467'807'924'713'440'738'696'537'864'469}{467'807'924'720'320'453'655'260'875'000} \pi = \pi - 0, \underbrace{0000000000}_{10 \text{ zer}} 462 \dots$$

Sprawdzić, że podobny fenomen zachodzi przy splataniu funkcji $f_d := \frac{1}{d} \mathbb{1}_{(-d/2, d/2)}$. Otóż liczby

$$C_k := f_1 * f_{1/3} \cdots * f_{1/(2k+1)}(0)$$

są równe 1 dla $k = 0, 1, \dots, 6$, ale dla $k = 7$ jest już mniej.

Uwaga. Polecam filmy na kanale Youtube 3Blue1Brown: [Researchers thought this was a bug \(Borwein integrals\)](#) oraz [But what is a convolution?](#).

Zadanie 4.11. Jeśli $p, q, r \geq 1$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, to

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Zadanie 4.12. Dla $t > 0$ określamy tak zwane jądro ciepła $g_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $g_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ (gęstość rozkładu normalnego o wariancji 2), następnie dla $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiujemy $H_t f := f * g_t$. Wykazać, że

- (a) funkcja g_t spełnia równanie ciepła $\partial_t g = \Delta g$ (gdzie $\Delta = \partial_{11} + \dots + \partial_{nn}$);
- (b) funkcja $H_t f(x)$ (zmiennych t, x) jest gładka na $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ i również spełnia $\partial_t f = \Delta f$;
- (c) $\|H_t f - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow 0$;
- (d) $H_t H_s f = H_{t+s} f$.

Wskazówka. W ostatnim punkcie warto najpierw wyprowadzić wzór

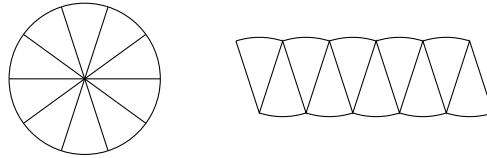
$$\partial_t (H_{r-t} f_t(x)) = (H_{r-t} (\partial_t f_t - \Delta f_t))(x)$$

(w którym f_t jest gładką funkcją dwóch zmiennych t, x).

5 Wstęp do miary powierzchniowej

Zadanie 5.1. (o polu koła i sfery) Załóżmy, że wzór na obwód koła $2\pi r$ jest dany.

- (a) Koło o promieniu r kroimy na n równych wycinków, w przybliżeniu trójkątów o podstawie $2\pi r/n$ i ramionach r . Układając je na przemian jak na rysunku, otrzymujemy z grubsza prostokąt o wymiarach $r \times \pi r$, co dowodzi, że koło ma pole πr^2 . Uzupełnić brakujące szczegóły w tym rozumowaniu.



- (b) Półsfere o promieniu r kroimy południkami na n przystających części, w przybliżeniu trójkątów o podstawie $2\pi r/n$ i ramionach $\pi r/2$. Układając je jak poprzednio, otrzymujemy z grubsza prostokąt o wymiarach $r \times \pi r/2$, co dowodzi, że sfera ma pole $\pi^2 r^2$. Wskazać błąd w tym rozumowaniu – dlaczego „błędy przybliżenia” nie znikają w granicy?

Uwaga. Polecam omówienie tego problemu na kanale 3Blue1Brown: [How to lie using visual proofs](#).

Zadanie 5.2. (o latarni Schwarza) Rozważmy antygraniastosłup prawidłowy n -kątny o wysokości h i podstawie wpisanej w okrąg o promieniu 1.

- (a) Wykazać, że powierzchnia boczna takiego graniastosłupa po zrzutowaniu na płaszczyznę podstawy ma pole P_n niezależne od wysokości h .
- (b) Latarnia Schwarza to powierzchnia powstała przez odpowiednie złączenie podstawami k takich antygraniastosłupów, o wysokości $1/k$ każdy. Wykazać, że pole powierzchni latarni jest ograniczone z dołu przez kP_n .
- (c) Uzasadnić, że istnieje ciąg latarni Schwarza zadany przez parametry $n_j, k_j \rightarrow \infty$, dla którego pole powierzchni rozbiega do nieskończoności.

Uwaga. Polecam omówienie tej konstrukcji na kanale Mathologer: [What's the curse of the Schwarz lantern?](#)

Zadanie 5.3. (o wyznaczniku Grama)

- (a) Na zbiorze otwartym $U \subseteq \mathbb{R}^n$ dane jest przekształcenie $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ klasy C^1 ($n < m$), o maksymalnym (równym n) rzędzie różniczki. Oznaczmy przez $\overline{DF}: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{im } DF$ tę samą różniczkę rozumianą jako przekształcenie w mniejszą podprzestrzeń. Wybierając bazy ortonormalne $\mathcal{A}$ w $\mathbb{R}^n$ i $\mathcal{B}$ w $\text{im } DF$, definiujemy

$$|\det \overline{DF}| := \left| \det \left([\overline{DF}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \right) \right|.$$

Sprawdzić, że definicja ta nie zależy od wyboru baz.

(b) Wykazać, że

$$\text{wyznacznik Grama} = \det(DF^T DF) = |\det \overline{DF}|^2.$$

Uwaga. Można też zdefiniować $\det \overline{DF}$, ale w tym celu trzeba ustalić orientacje odpowiednich przestrzeni i wybierać wyłącznie bazy dodatnio zorientowane.

Zadanie 5.4. Funkcje

$$\begin{aligned} f, g &: (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ f(\alpha, \beta) &= (\cos \beta, \sin \beta, \sin \alpha), \\ g(\alpha, \beta) &= (\cos \alpha \cos \beta, \cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha) \end{aligned}$$

parametryzują odpowiednio walec $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, |z| < 1\}$ oraz sferę $\mathbb{S}^2$ z wyjątkami biegunami $(0, 0, \pm 1)$.

- (a) Wyznaczyć obrazy wektorów bazy standardowej przy przekształceniu Df (czyli $\partial_\alpha f$ oraz $\partial_\beta f$), wybrać dogodną bazę $T_f C$ i obliczyć wyznacznik $|\det \overline{Df}|$.
- (b) W podobny sposób obliczyć wyznacznik $|\det \overline{Dg}|$.
- (c) Podać interpretację geometryczną przekształcenia $h := f \circ g^{-1} : \mathbb{S}^2 \rightarrow C$ (można je wyrazić wzorem $h(\mathbf{u}, z) = (\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|, z)$). Uzasadnić, że przekształcenie liniowe

$$\overline{Dh} : T_p \mathbb{S}^2 \rightarrow T_q C$$

ma wyznacznik (w module) równy 1.

- (d) Obliczyć bezpośrednio wyznaczniki Grama $\sqrt{\det(Df^T Df)}$, $\sqrt{\det(Dg^T Dg)}$ i porównać z wynikami uzyskanymi w punktach a) i b).

Uwaga. Rozumowanie z punktu c) odpowiada temu, jak Archimedes wyznaczył pole sfery w oparciu o pole walca. Omówienie można znaleźć na kanale 3Blue1Brown: [But why is a sphere's surface area four times its shadow?](#)

6 Podrozmaiwości $\mathbb{R}^n$

Definicja. Podzbiór $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy m -wymiarową *podrozmaiością* (inaczej: *rozmaiością zanurzoną*), jeśli lokalnie wygląda jak fragment $\mathbb{R}^m$. Można przyjąć dowolną z poniższych definicji:

$$\begin{aligned}
 M \text{ jest lokalnie wykresem: } & \forall p \in M \exists 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n, U \stackrel{\text{otw.}}{\subseteq} P := \text{span}(e_{i_j}), p \in V \stackrel{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(U, P^\perp) \\
 & M \cap V = \text{wykres } \varphi \cap V \\
 \text{obrazem parametryzacji: } & \forall p \in M \exists U \stackrel{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^m, p \in V \stackrel{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(U, V), \text{rank } D\varphi = m \\
 & \varphi: U \rightarrow M \cap V \text{ jest homeomorfizmem} \\
 \text{poziomicą submersji: } & \forall p \in M \exists p \in V \stackrel{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-m}), \text{rank } D\varphi = n-m \\
 & M \cap V = \text{poziomica } \varphi \\
 \text{jak } \mathbb{R}^m \times \mathbf{0}: & \forall p \in M \exists p \in V \stackrel{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n, 0 \in U \stackrel{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(U, V) \text{ dyfeomorfizm} \\
 & M \cap V = \text{obraz } \mathbb{R}^m \times \{\mathbf{0}\} \text{ przy } \varphi
 \end{aligned}$$

Zadanie 6.1. ◆ Przekonać się na wszystkie możliwe sposoby, że okrąg jednostkowy $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ jest 1-wymiarową podrozmaiością. Wykazać mianowicie, że górny półokrąg $\mathbb{S}^1 \cap \{y > 0\}$

- (a) jest wykresem pewnej funkcji;
- (b) jest obrazem pewnej parametryzacji;
- (c) jest poziomicą pewnej submersji;
- (d) daje się przekształcić na odcinek (być może nieskończony) za pomocą pewnego dyfeomorfizmu z pasa $(-1, 1) \times (0, \infty)$ na pewien otwarty podzbiór $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 6.2. Czy zbiory

$$A = \{x^6 + y^5 + z^4 = 0\}, \quad B = \{x^6 + y^4 + z^3 = 0\}$$

w $\mathbb{R}^3$ są rozmaiściami klasy C^1 ?

Zadanie 6.3. ◆ Niech funkcja $f: (-\infty, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana wzorem

$$f(t) = \begin{cases} (1, t) & \text{dla } t \leq 0, \\ (\cos t, \sin t) & \text{dla } t \geq 0. \end{cases}$$

Przekonać się, że f jest klasy C^1 , ma pochodną pełnego rzędu, a ponadto jest różnowartościowa. Czy jej obraz jest jednowymiarową podrozmaiością w $\mathbb{R}^2$?

Zadanie 6.4. Punkt P porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż odcinka od punktu $A = (0, 0, 0)$ do punktu $B = (1, 0, 0)$. Podobnie w tym samym czasie Q przemieszcza się z $C = (0, 1, 0)$ do $D = (0, 1, 1)$. Niech M będzie sumą wszystkich odcinków PQ (bez końców), łączących punkty P i Q w jednoczesnych położeniach. Znaleźć parametryzację M i uzasadnić, że jest to rozmaitość dwuwymiarowa w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 6.5. Pokazać, że zbiór macierzy ortogonalnych

$$O(n) = \{Q \in M_{n \times n} : Q^T Q = I\}$$

jest rozmaitością wymiaru $n(n-1)/2$. Opisać przestrzeń styczną do $O(n)$ w punkcie I .

Wskazówka. Funkcja $F(Q) = Q^T Q$ nie jest submersją jako funkcja $F: M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$, ale jako $F: M_{n \times n} \rightarrow \text{Sym}_{n \times n}$ już tak.

Zadanie 6.6. Uzasadnić następujące pomocnicze fakty z topologii:

- (a) Załóżmy, że A jest przestrzenią zwartą, B przestrzenią Hausdorffa, a $f: A \rightarrow B$ jest ciągłą bijekcją. Wówczas f jest homeomorfizmem.
- (b) Załóżmy, że A, B są jak wyżej, natomiast $f: A \rightarrow B$ jest funkcją ciągłą spełniającą na pewnym podzbiorku $A_0 \subseteq A$ warunek

$$f(x) = f(y) \implies x = y \text{ lub } x, y \notin A_0.$$

Wówczas obcięcie $f|_{A_0}$ jest homeomorfizmem pomiędzy A_0 i $f(A_0)$.

- (c) Załóżmy, że $f: A \rightarrow B$ jest ciągłą właściwą bijekcją między dwiema przestrzeniami Hausdorffa, a przestrzeń B jest lokalnie zwarta. Wówczas f jest homeomorfizmem.

Uwaga. Jeśli to ułatwi rozwiązanie, to można przyjąć, że A, B są przestrzeniami metrycznymi.

Zadanie 6.7. ★ (do 10.04.2025) Niech M będzie standardową wstęgą Möbiusa w $\mathbb{R}^3$, np. opisaną przez parametryzację:

$$\begin{cases} x &= \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u \\ y &= \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u \\ z &= \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \end{cases} \quad (0 \leq u < 2\pi, -1 < v < 1)$$

Wykazać, że choć M jest rozmaitością, to nie da się przedstawić jako poziomicą submersji. Innymi słowy, nie istnieje zbiór otwarty $M \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$ i funkcja $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 , dla której

$$M = F^{-1}(0), \quad \text{rank } dF(x) = 1 \quad \text{dla } x \in M.$$

Zadania dodatkowe

Zadanie 6.8. Przekonać się, że przekształcenie

$$i: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad i(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

jest gładkim dyfeomorfizmem spełniającym $i^2 = \text{id}$. Sprawdzić, że zadaje ono bijekcję pomiędzy zbiorami

$$P = \{x : x_1 = 1\}, \quad S = \left\{x : \left|x - \frac{1}{2}e_1\right| = \frac{1}{2}\right\} \setminus \{0\},$$

a więc parametryzację sfery z wyjętym punktem.

Uwaga. Przekształcenie i nazywa się *inwersją*, a w obcięciu do $i: S \rightarrow P$ – *rzutem stereograficznym*.

Zadanie 6.9. Dla promieni $0 < r < R$ wprowadźmy torus

$$T_{r,R} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

otrzymany przez obrót okręgu $o((R, 0), r)$ w płaszczyźnie xz wokół osi z . Rozważmy też standardowy torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, czyli zbiór

$$\mathbb{T}^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Uzasadnić, że jedno i drugie jest rozmaitością. Sprawdzić, że

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto ((R + rx_1)x_3, (R + rx_1)x_4, rx_2)$$

jest homeomorfizmem $\mathbb{T}^2 \rightarrow T_{r,R}$.

Zadanie 6.10. Niech $f_\lambda(x, y) = x^3 + \lambda(x^2 - y^2)$ dla dowolnych $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_0(x, y) = c\}$ jest rozmaitością? Dla jakich c jest spójny?
- (b) Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x, y) = c\}$ jest rozmaitością? Dla jakich c jest spójny?

Zadanie 6.11. Pokazać, że zbiór

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, xy + yz + zx = 8\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

jest krzywą (tj. 1-wymiarową rozmaitością) klasy C^1 . Czy jest to krzywa spójna?

Wskazówka. Może być pomocne rozważenie wielkości $(x + y + z)^2$.

Zadanie 6.12. Niech $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ będzie standardową sferą oraz

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad F(x, y, z) = (xy, yz, zx, x^2 - y^2).$$

Sprawdzić, że $F(\mathbb{S}^2)$ jest zwartą rozmaitością.

Uwaga. Jest to tzw. *płaszczyzna rzutowa*. Jako przestrzeń topologiczną można opisać ją prościej: jest to sfera $\mathbb{S}^2$ z utożsamionymi punktami antypodycznymi (czyli parami x i $-x$).

7 Miara powierzchniowa

Zadanie 7.1. Obliczyć długość krzywej zadanej poprzez parametryzację

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad \text{dla } t \in (0, 2\pi).$$

Zadanie 7.2. Obliczyć miarę powierzchni zadanej poprzez parametryzację

$$\varphi(r, t) = (r \cos t, r \sin t, t) \quad \text{dla } r \in (0, 1), \quad t \in (0, 2\pi).$$

Zadanie 7.3. Znaleźć parametryzację krzywej opisanej równaniem

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2,$$

a następnie wyznaczyć jej długość na tyle jawnie, na ile się uda.

Zadanie 7.4. Obliczyć pole powierzchni paraboloidy

$$M = \{(x, y, x^2 + y^2) : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Zadanie 7.5. (reguła Pappusa-Guldina) Wykazać, że miara powierzchni obrotowej powstałej w wyniku obrotu krzywej Γ wynosi 2π razy całka po Γ z odległości do osi obrotu. Lub inaczej: $2\pi r \cdot l(\Gamma)$, gdzie r jest odległością środka ciężkości Γ od osi obrotu.

Zadanie 7.6. Wyznaczyć wzór na pole powierzchni bocznej walca i stożka (o wysokości h i promieniu r) na dwa sposoby:

- (a) w oparciu o regułę Pappusa-Guldina;
- (b) przez wskazanie izometrycznej figury płaskiej w $\mathbb{R}^2$ (chodzi o to, żeby różniczka parametryzacji była włożeniem izometrycznym).

Zadanie 7.7. ♣ Obliczyć całkę

$$\int_C x^2 \, dl_C,$$

jeśli C to krzywa powstała w wyniku przecięcia sfery jednostkowej (o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) z płaszczyzną $x + y + z = 1$.

Zadanie 7.8. Wykazać szczególny przypadek twierdzenia o całkowaniu po włóknach:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, d\lambda_n(x) = \int_0^\infty \int_{\partial B_r} f(x) \, dl_{\partial B_r}(x) \, dr$$

dla wszystkich funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 7.9. ♣ Wykazać, że średnia odległość punktów n -wymiarowej kuli o promieniu R do środka tej kuli wynosi $\frac{n}{n+1}R$.

Zadanie 7.10. Dane są rozmaitości $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^M$ (m -wymiarowa) i $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^N$ (n -wymiarowa). Wykazać, że zbiór

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{M+N} : x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N}\}$$

jest rozmaitością $m + n$ -wymiarową. Dla odpowiednio regularnych funkcji $f: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ wyprowadzić wzór

$$\int_{\mathcal{M} \times \mathcal{N}} f(x, y) \, dl_{\mathcal{M} \times \mathcal{N}}(x, y) = \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathcal{M}} f(x, y) \, dl_{\mathcal{M}}(x) \, dl_{\mathcal{N}}(y).$$

Zadanie 7.11. ★ (do 17.04.2025) (twierdzenie o całkowaniu po włóknach) Załóżmy, że $H: U \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 na $U \subseteq \mathbb{R}^n$, a jej gradient nie zeruje się na zbiorze zwartym $K \subseteq U$. Dla odpowiednio regularnych funkcji f wyprowadzić wzór

$$\int_K f(x) \, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{K \cap H^{-1}(t)} \frac{f(x)}{|\nabla H(x)|} \, dl_{H^{-1}(t)} \, dt.$$

Wskazówka. Można skorzystać z następującej wersji TFU: dla dowolnego punktu istnieje dyfeomorfizm otoczenia Φ spełniający tożsamość $H(\Phi(t, u)) = t$.

8 Otoczenia tubularne

Zadanie 8.1. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie wykresem funkcji $f(x) = |x|^{3/2}$. Przekonać się, że dla małych $\varepsilon > 0$ punkt $(0, \varepsilon)$ ma dokładnie dwa punkty najbliższe na M .

Zadanie 8.2. Rozważmy torus zanurzony w $\mathbb{R}^3$:

$$T := \left\{ (x, y, z) : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \right\} \quad (0 < r < R)$$

oraz płaszczyznę $V \subseteq \mathbb{R}^3$. Czy rzut ortogonalny T na V ma gładki brzeg? Innymi słowy: czy torus widziany ludzkim okiem jest gładki?

Zadanie 8.3. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie gładką m -wymiarową podrozmaitością. Wykazać, że następujące zbiory

$$\begin{aligned} TM &= \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\} && \text{(wiązka styczna),} \\ T^\perp M &= \{(p, v) : p \in M, v \in T_p^\perp M\} && \text{(wiązka normalna)} \end{aligned}$$

są podrozmaitościami $\mathbb{R}^{2n}$ wymiaru odpowiednio $2m$ i n .

Zadanie 8.4. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym obszarem o gładkim brzegu. Uzasadnić, że funkcja

$$d(x) = \text{dist}(x, \Omega^c) - \text{dist}(x, \Omega)$$

jest gładka na pewnym otoczeniu $\partial\Omega$, ponadto dla $p \in \partial\Omega$ gradient $\nabla d(p)$ jest wektorem normalnym wewnętrznym do $\partial\Omega$.

Definicje. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie gładką zwartą podrozmaitością, a $\pi: V \rightarrow M$ rzutem na najbliższy punkt (określonym na pewnym otoczeniu $M \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$). Definiujemy:

- drugą formę podstawową $A_p(u, v) := -D_p^2 \pi(u, v)$ dla $p \in M, u, v \in T_p M$;
- krzywiznę Riemanna $\text{Rm}_p(a, b, c, d) = \langle A_p(a, d), A_p(b, c) \rangle - \langle A_p(a, c), A_p(b, d) \rangle$ dla $p \in M, a, b, c, d \in T_p M$;
- w przypadku $\dim M = 2$ krzywiznę Gaussa $K_p = \text{Rm}_p(u, v, v, u)$ dla $p \in M$ i dowolnej bazy o.n. $u, v \in T_p M$.

Zadanie 8.5. Niech M i π będą jak w definicji wyżej. Uzasadnić, że:

- (a) dla $p \in M$, $D_p\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest rzutem ortogonalnym na T_pM ;
- (b) jeśli $f: U \rightarrow M$ jest funkcją gładką określoną na pewnym podzbiórze przestrzeni euklidesowej, to $D_{f(x)}^2\pi(\partial_i f(x), \partial_j f(x))$ jest rzutem ortogonalnym $\partial_{ij}f(x)$ na $T_{f(x)}^\perp M$.

Wskazówka. Zróżniczkować dwukrotnie tożsamość $\pi \circ f = f$.

Zadanie 8.6. Dla sfery jednostkowej $M = \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ wyznaczyć wzory na:

- (a) rzut $\pi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$;
- (b) drugą formę podstawową $A_p(u, v) = \langle u, v \rangle p$;
- (c) krzywiznę Riemanna $\text{Rm}_p(a, b, c, d) = \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle - \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle$;
- (d) w przypadku $n = 3$ krzywiznę Gaussa $K_p = 1$.

Zadanie 8.7. ★ (do 28.04.2025) (część *theorema egregium* Gaussa) Załóżmy, że $f: U \rightarrow M$ jest *izometryczną* parametryzacją fragmentu pewnej gładkiej zwartej powierzchni $M \subseteq \mathbb{R}^3$, czyli $D_x f$ jest włożeniem izometrycznym dla każdego $x \in U$. Dla $i, j, k, l = 1, 2$ wyprowadzić tożsamości

$$\partial_{ij}f \cdot \partial_k f = 0, \quad \partial_{ij}f \cdot \partial_{kl}f = -\partial_i f \cdot \partial_{jkl}f.$$

Wynioskować, że krzywizna Gaussa K_p jest zerowa dla wszystkich $p \in M$.

Uwaga. Wynika stąd w szczególności, że nie istnieją izometryczne odwzorowania kartograficzne Ziemi.

Zadanie 8.8. ★ (do 05.05.2025) Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym obszarem o gładkim brzegu, a d funkcją odległości od brzegu jak w Zadaniu 8.4. Ustalmy gładką funkcję η spełniającą $\eta(s) = 0$ dla $s \leq \frac{1}{2}$ i $\eta(s) = 1$ dla $s \geq 1$, a następnie określmy $h_r(x) := \eta(d(x)/r)$.

- (a) Uzasadnić, że jeśli $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją gładką, to

$$\int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla h_r(x) \, dx \xrightarrow{r \rightarrow 0} - \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot n(x) \, dl_{\partial\Omega}(x),$$

gdzie $n(x)$ jest wektorem normalnym zewnętrznym (czyli $n(x) = -\nabla d(x)$).

- (b) Wynioskować twierdzenie o dywergencji

$$\int_{\Omega} \text{div } F(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot n(x) \, dl_{\partial\Omega}(x),$$

gdzie $\text{div } F = \partial_1 F^1 + \dots + \partial_n F^n$ jest dywergencją pola F .

O formach różniczkowych

Czego się spodziewać? Kurs analizy matematycznej można prawie uznać za zakończony. Ostatnim prawdziwie analitycznym twierdzeniem, jakie poznamy, jest uogólnienie tzw. podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego (czyli $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$) na wyższe wymiary. Jest to *twierdzenie Stokesa*, stwierdzające równość $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$. Zamiast niego nieco łatwiej jest sformułować równoważne mu (z dokładnością do pewnych technicznych szczegółów) *twierdzenie o dywergencji*:

$$\int_M \operatorname{div}_M F(x) \, dl_M(x) = \int_{\partial M} F(x) \cdot \vec{n}(x) \, dl_{\partial M}(x).$$

Tutaj $M \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zwartą m -wymiarową podrozmaitością z brzegiem, $\operatorname{div}_M F(x)$ to dywergencja zdefiniowana jako suma $\sum_{i=1}^m \langle D_x F(e_i), e_i \rangle$, gdzie $e_1, \dots, e_m$ jest wybraną bazą o.n. $T_x M$. Natomiast $\vec{n}(x)$ to wektor normalny zewnętrzny (styczny do M , ortogonalny do ∂M).

Pozostała część materiału, jaki nam pozostał, to przede wszystkim algebra wieloliniowa. Ta okoliczność ma oczywiście szereg zalet i wad, znanych wszystkim z kursu geometrii z algebrą liniową.

Co zyskujemy? Zyskujemy przede wszystkim zgrabny algebraiczny język, który (po wstępnym oswojeniu) pozwala ujmować wiele problemów w sposób zwięzły, pozwalający na ogólne i geometryczne ujęcie, a jednocześnie ułatwiający konkretne rachunki. Kilka przykładów:

- Pojęcia gradientu ($\operatorname{grad} / \nabla$), dywergencji (div), rotacji ($\operatorname{rot} / \operatorname{curl}$) wszystkie da się ująć jako szczególne przypadki operatora różniczki zewnętrznej: $\omega \mapsto d\omega$.
- Znane z fizyki pojęcia pracy siły wzdłuż krzywej oraz strumienia pola przez powierzchnię są szczególnymi przypadkami całkowania formy różniczkowej: $\int_M \omega$.
- Całkowanie przez podstawienie w klasycznej postaci to wzór

$$\int_U f(\Phi(x)) |\det D\Phi| \, dx = \int_V f(y) \, dy \quad (\text{gdzie } \Phi: U \rightarrow V),$$

a w języku form różniczkowych przyjmuje postać $\int_U \Phi^* \omega = \int_V \omega$. Forma ω niejako zawiera w sobie zarówno informację o funkcji podcałkowej f , jak i o mierze, względem której całkujemy.

- Wiele własności można sformułować w zwięzły sposób, co ułatwia operowanie pojęciami. Przykładowo:

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta), \quad d(f^*\omega) = f^*(d\omega), \quad d(d\omega) = 0,$$

oraz wspomniane wcześniej równości $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$, $\int_U \Phi^* \omega = \int_V \omega$.

9 Całkowanie 1-form różniczkowych

Oznaczenia i definicje: Przez $dx_1, \dots, dx_n$ oznaczamy standardową bazę $(\mathbb{R}^n)^*$ (funkcjonałów liniowych), a 1-formę różniczkową nazywamy kombinacją liniową $a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ o zmiennych współczynnikach. Całka z $f dx$ po (a, b) to po prostu $\int_a^b f dx$, a w ogólnym przypadku stosujemy wzór $\int_\Gamma \omega = \int_{(a,b)} p^* \omega$, gdzie:

- $p: (a, b) \rightarrow \Gamma$ jest parametryzacją krzywej Γ (z zachowaniem orientacji);
- $p^* \omega$ to *przeciągnięcie*, czyli funkcyjnał $(p^* \omega)(v) = \omega(Dp(v))$, lub inaczej

$$p^*(a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n) = (a_1(p)p'_1 + \dots + a_n(p)p'_n) dx.$$

Zadanie 9.1. Obliczyć całkę z formy $\frac{y^2 dx - 2xy dy}{x^2 + y^4}$ wzdłuż półokręgu $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, o początku $(1, 0)$ i końcu $(-1, 0)$.

Zadanie 9.2. Obliczyć całkę z 1-formy $\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ po (dodatnio zorientowanym) okręgu jednostkowym.

Zadanie 9.3. (tw. Stokesa 1D) Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 , a df jej różniczką. Wykazać, że

$$\int_\Gamma df = f(b) - f(a)$$

dla dowolnej krzywej $\Gamma \subseteq U$ z a do b .

Zadanie 9.4. Praca wykonana przez siłę $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wzdłuż zorientowanej krzywej $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zdefiniowana jako całka

$$\int_\Gamma F(p) \cdot \vec{T}(p) dl(p),$$

w której $\vec{T}(p)$ jest jednostkowym wektorem stycznym do Γ (wskazującym zgodnie z orientacją). Sprawdzić, że jest ona tożsama z całką z 1-formy $F^1 dx_1 + \dots + F^n dx_n$.

Uwaga. Ten sam związek można wyrazić w przeciwną stronę: całka z 1-formy $\int_\Gamma \omega$ pokrywa się z całką $\int_\Gamma \omega(\vec{T}) dl$.

Zadanie 9.5. ♣ Sprawdzić, że pole grawitacyjne $F(x) = -\frac{x}{|x|^3}$ jest potencjalne, czyli że istnieje funkcja $E: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca tożsamość $\nabla E = F$. Wywnioskować, że praca siły grawitacji wzdłuż dowolnej zamkniętej krzywej wynosi zero.

Zadanie 9.6. Wykazać, że jeśli Ω jest ograniczonym obszarem klasy C^1 , to

$$\int_{\partial\Omega} xdy = - \int_{\partial\Omega} ydx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} xdy - ydx = \lambda_2(\Omega).$$

Zadanie 9.7. ■ Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą

$$\gamma(t) = (a \cos^3(t), a \sin^3(t)) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

dla zadanego $a > 0$.

Zadanie 9.8. ■ Zapisać 1-formę $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ w postaci $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ i przekonać się, że zachodzi tożsamość $-\partial_y f + \partial_x g = 0$ w $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wykazać, że nie istnieje forma $\eta = f(x,y)dx + g(x,y)dy$ spełniająca ten warunek w $\mathbb{R}^2$ i różniąca się od ω jedynie na pewnym otoczeniu zera.

Zadanie 9.9. Czy forma $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ z poprzedniego zadania daje się zapisać w postaci $\partial_x h(x,y)dx + \partial_y h(x,y)dy$ dla pewnej funkcji $h: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$? Czy jest to możliwe na mniejszym zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$?

Zadanie 9.10. Załóżmy, że forma $\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy$ klasy C^1 jest określona na kuli jednostkowej i spełnia warunek $\partial_y f = \partial_x g$. Wykazać, że dla funkcji h określonej wzorem

$$h(x,y) = \int_{[(0,0),(x,y)]} \omega = \int_0^1 f(tx,ty)x + g(tx,ty)y dt$$

zachodzi $\omega = \partial_x h(x,y)dx + \partial_y h(x,y)dy$.

Wskazówka. Przedstawić $\partial_x h$ w postaci $\int_0^1 \partial_t(f(tx,ty)t) dt$.

Uwaga. Na wykładzie poznamy dużo bardziej ogólny lemat Poincarégo, zgodnie z którym na obszarze gwiazdystym każda forma zamknięta jest dokładna (sens tych słów poznamy w odpowiednim czasie).

Zadanie 9.11. Dla ograniczonego obszaru $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ klasy C^1 oraz pola wektorowego $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ wyprowadzić twierdzenie o dywergencji

$$\int_{\partial\Omega} F(p) \cdot \vec{n}(p) dl(p) = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx.$$

Tutaj $\operatorname{div} F = \partial_1 F^1 + \partial_2 F^2$ to dywergencja, a $\vec{n}(p)$ to jednostkowy wektor prostopadły do $\partial\Omega$, skierowany na zewnątrz.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 9.4.

Zadanie 9.12. ★ (do 08.05.2025) (wstęp do Funkcji Analitycznych) Niech $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją zespoloną, przedstawioną jako kombinacja $f = u + iv$ funkcji rzeczywistych. Zdefiniujmy całkę zespoloną po krzywej $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ wzorem

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f(z)dz &:= \int_{\Gamma} (u(z) + iv(z))(dx + idy) \\ &= \int_{\Gamma} u(z)dx - v(z)dy + i \int_{\Gamma} u(z)dy + v(z)dx.\end{aligned}$$

- (a) Przekonać się, dla jeśli $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jest ograniczonym obszarem klasy C^1 oraz $f \in C^1$, to

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = \int_{\Omega} (-\partial_y u - \partial_x v) + i(\partial_x u - \partial_y v) d\lambda_2.$$

- (b) Sprawdzić, że pochodna zespolona $f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ (w której h jest parametrem zespolonym) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różniczkowalna w z (w zwyczajnym sensie) oraz spełnia równania Cauchy'ego–Riemanna:

$$\partial_x u(z) = \partial_y v(z), \quad \partial_y u(z) = -\partial_x v(z).$$

- (c) Wywnioskować, że jeśli f jest wszędzie różniczkowalna w sensie zespolonym oraz $f \in C^1$, to całka zespolona $\int_{\Gamma} f(z)dz$ po dowolnej krzywej zamkniętej $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ jest zerowa.

10 Formy różniczkowe – algebra wieloliniowa

Definicje. Oznaczamy

$$\begin{aligned}\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* &:= \{\omega: (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R} \mid k\text{-liniowe antysymetryczne}\}, \\ \Omega^k(V) &:= \{\omega: V \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \mid \text{gładkie}\} \quad (k\text{-formy na } V \subseteq \mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Bazą przestrzeni $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ są elementy $dx_I(v_1, \dots, v_k) = \det(v_j^{i_s})_{s,j}$ wyznaczone przez k -elementowe zbiory indeksów $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ (brane w kolejności rosnącej). Iloczyn zewnętrzny $\wedge$ jest działaniem łącznym, a w przypadku 1-form antysymetrycznym, i spełnia tożsamość $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = dx_I$. Różniczka zewnętrzna spełnia tożsamość

$$d\left(\sum_I f_I dx_I\right) = \sum_I df_I \wedge dx_I, \text{ gdzie } df = \partial_1 f dx_1 + \dots + \partial_n f dx_n \text{ jest różniczką } f.$$

Przecignięcie k -formy różniczkowej za pomocą funkcji $g = (g_1, \dots, g_n)$ to

$$g^*\left(\sum_I f_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right) = \sum_I f_I \circ g dg_{i_1} \wedge \dots \wedge dg_{i_k}.$$

Zadanie 10.1. Dane jest przekształcenie dwuliniowe antysymetryczne $\omega: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (czyli element $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)^*$) i wiadomo o nim, że $\omega((2, 1), (1, 2)) = 6$. Wyznaczyć wartości $\omega((2, 1), (3, 3))$ oraz $\omega((1, 0), (0, 1))$.

Zadanie 10.2. Dana jest 2-forma $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$, o której wiadomo, że

$$\omega(e_1, e_2) = 1, \quad \omega(e_1, e_3) = 2, \quad \omega(e_2, e_3) = 3.$$

Wyznaczyć $\omega((0, 1, 2), (1, 3, 0))$.

Zadanie 10.3. Obliczyć iloczyny zewnętrzne

- (a) $(x dy + y dz + z dx) \wedge (dx + dy + dz)$
- (b) $(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) \wedge (dx + dy + dz)$

Zadanie 10.4. Obliczyć $\omega \wedge \omega$, jeśli $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$.

Uwaga. Ten przykład pokazuje, że $\omega \wedge \omega$ wcale nie musi być zerem.

Zadanie 10.5. Niech $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$ będzie formą z poprzedniego zadania. Wykazać, że każdą formę $\beta \in \Lambda^3(\mathbb{R}^4)^*$ da się zapisać w postaci $\alpha \wedge \omega$ dla dokładnie jednej formy $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{R}^4)^*$.

Uwaga. Jest to szczególny przypadek Zadania 10.11.

Zadanie 10.6. Obliczyć:

(a) $x d(\sin(x^2 y)) + y d(\cos(xy^2))$

(b) $d(x_1 x_3 dx_3 \wedge dx_4)$

(c) $d\left(\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\right)$

Zadanie 10.7. Obliczyć przeciągnięcie formy $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ za pomocą odwzorowania $\Phi(t) = (\cos t, \sin t)$.

Zadanie 10.8. Obliczyć przeciągnięcie formy $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ za pomocą odwzorowania $\Phi(u, v) = (uv, u^2, 3u + v)$. Czy wynik jest zaskakujący?

Zadanie 10.9. Obliczyć cofnięcie formy $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ za pomocą odwzorowania

$$\Phi(r, \alpha, \beta) = (r \cos \alpha \cos \beta, r \sin \alpha \cos \beta, r \sin \beta)$$

(czyli dyfeomorfizmu sferycznego).

Zadanie 10.10. Dana jest 2 forma $\omega(\vec{x}) = x dy \wedge dz - z dx \wedge dy$ oraz pole wektorowe $F(x, y, z) = (z, x, y)$. Wyznaczyć współczynniki 1-formy $\eta(\vec{x})(v) = \omega(\vec{x})(F(\vec{x}), v)$ w standardowej bazie dx, dy, dz .

Zadanie 10.11. ★ (do 29.05.2025) (szczególny przypadek lematu Lefschetza)
Niech $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})^*$ będzie formą

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + \dots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

Wykazać, że

$$\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^{2n})^* \ni \eta \longmapsto \eta \wedge \omega \in \Lambda^{n+1}(\mathbb{R}^{2n})^*$$

jest izomorfizmem liniowym.

Zadanie 10.12. Przeciągnięcie za pomocą funkcji $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ to liniowe odwzorowanie $g^*: \Omega^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ (dla $k = 0, 1, \dots$) spełniające tożsamości:

(a) $g^* f = f \circ g$ dla dowolnej 0-formy f , czyli dla funkcji;

(b) $g^*(d\omega) = d(g^*\omega)$ dla dowolnej formy ω ;

(c) $g^*(\alpha \wedge \beta) = (g^*\alpha) \wedge (g^*\beta)$ dla dowolnych form α, β .

Udowodnić, że te własności jednoznacznie wyznaczają g^* .

11 Praca domowa – formy różniczkowe

Zasady rozwiązywania. Rozwiązania zadań należy oddać na piśmie podczas zajęć **9 czerwca** lub wcześniej. Po uzyskaniu indywidualnej zgody dopuszczalne są odstępstwa (przedłużony termin i/lub forma elektroniczna), ale wówczas liczba zdobytych punktów dzieli się przez 2.

Zadanie 11.1. Uzasadnić, że funkcja

$$\gamma(t) = (t, t \sin t) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}$$

jest parametryzacją pewnej krzywej w $\mathbb{R}^2$. Przyjmując na jej fragmencie $\Gamma = \gamma([-\pi, \pi])$ orientację zgodną z tą parametryzacją, obliczyć całkę

$$\int_{\Gamma} 2xy \, dx + x^2 \, dy.$$

Zadanie 11.2. Dane jest pole wektorowe $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ klasy C^1 oraz 3-forma $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^4)$ dana wzorem

$$\omega(\mathbf{x})(v_1, v_2, v_3) := dx_{1,2,3,4}(F(\mathbf{x}), v_1, v_2, v_3) \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4, \, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Wyrazić ω w bazie standardowej, czyli w postaci

$$\omega(\mathbf{x}) = a_{2,3,4}(\mathbf{x}) \, dx_{2,3,4} + a_{1,3,4}(\mathbf{x}) \, dx_{1,3,4} + a_{1,2,4}(\mathbf{x}) \, dx_{1,2,4} + a_{1,2,3}(\mathbf{x}) \, dx_{1,2,3}.$$

(b) Wyprowadzić wzór $d\omega = \operatorname{div} F(\mathbf{x}) \, dx_{1234}$.

Wskazówka. Skorzystać z rozwinięcia Laplace’a.

Zadanie 11.3. Niech

$$\omega = (-2y + x^2y + x^2) \, dx + (2x - xy^2 + y^2) \, dy.$$

Znaleźć taki obszar ograniczony $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ o brzegu kawałkami gładkim, żeby całka $\int_{\partial\Omega} \omega$ (po brzegu Ω z naturalną orientacją) była możliwie największa.

Zadanie 11.4. Zbiór zadany równaniem

$$K = \{(x, y) : x^2 + y = (x^2 + y^2 + 2x)^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

jest krzywą klasy C^1 , a ponadto ogranicza pewien ograniczony obszar $U \subseteq \mathbb{R}^2$ (oba fakty można uznać za dane). Przyjmując na K naturalną orientację brzegu U , wyznaczyć dodatnio zorientowany wektor styczny w punkcie $p = (-1, 0) \in K$.

Wskazówka. W którą stronę wskazuje gradient funkcji zadającej K ?

12 Formy różniczkowe – całkowanie

Co trzeba wiedzieć:

- (a) Całkę z n -formy po otwartym obszarze $U \subseteq \mathbb{R}^n$ definiuje się wzorem $\int_U f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n := \int_U f d\lambda_n$.
- (b) Gdy $\Phi: M \rightarrow N$ jest dyfeomorfizmem zgodnym z orientacją, to $\int_M \omega = \int_M \Phi^* \omega$. W szczególności wzór ten obowiązuje, gdy Φ jest parametryzacją.
- (c) Twierdzenie Stokesa: $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$

Zadanie 12.1. Obliczyć całkę z formy $\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ po dodatnio zorientowanej sferze jednostkowej $\mathbb{S}^2$. Czy forma ta jest zamknięta? Czy jest dokładna?

Zadanie 12.2.  Załóżmy, że $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami klasy C^1 i określmy 2-formę różniczkową

$$\eta = f(y, z) dy \wedge dz + g(x, z) dz \wedge dx + z^2(x^2 + y^2) dx \wedge dy.$$

Obliczyć $\int_M \eta$, gdzie

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 < 1\}$$

jest częścią paraboloidy zorientowaną tak, by w każdym punkcie $p \in M$ wektor normalny do M zgodny z orientacją miał ujemną trzecią składową.

Zadanie 12.3. Dana jest 2-forma różniczkowa $\omega = e^z dx \wedge dy - xe^z dy \wedge dz$ oraz powierzchnia M powstała przez obrót zbioru

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, (x - 3)^2 + z^2 = 1, 0 < x < 3\}$$

wokół osi z , zorientowana tak, by w punkcie $(2, 0, 0) \in M$ wektor $(1, 0, 0)$ był „zewnątrzny”.

- (a) Przekonać się, że forma ω jest dokładna.
- (b) Obliczyć całkę $\int_M \omega$.

Zadanie 12.4. Dana jest 2-forma ω oraz powierzchnia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zadane wzorami

$$\omega = -2x dy \wedge dz + 2 dz \wedge dx + z dx \wedge dy, \quad S = \{y = x^2 + z^2, 1 \leq y \leq 2\},$$

przy czym orientację S przyjmujemy w taki sposób, by wektor $\vec{n} = (x, 0, z)$ był „zewnątrzny”. Wyznaczyć całkę $\int_S \omega$:

- (a) bezpośrednio, przy użyciu wybranej parametryzacji S ;
- (b) stosując twierdzenia Stokesa dla obszaru $\Omega = \{y \geq x^2 + z^2, 1 \leq y \leq 2\}$.

Zadanie 12.5. Rozważmy okrąg $C = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$ zorientowany tak, by w punkcie $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \in C$ wektor $(0, 1, -1)$ był miał dodatnią orientację. Wyznaczyć całkę

$$\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz.$$

Zadanie 12.6. Dowieść, że $dd\omega = 0$ dla dowolnej 1-formy $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, na dwa sposoby:

- (a) przez bezpośredni rachunek;
- (b) jako wniosek z obserwacji, że $\partial\partial\Omega = \emptyset$ dla dowolnego gładkiego obszaru $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

13 Formy różniczkowe a całka powierzchniowa

Twierdzenie o dywergencji: $\int_U \operatorname{div} F = \int_{\partial U} F \cdot \vec{n}$, gdzie

- $\operatorname{div} F = \partial_1 F^1 + \dots + \partial_n F^n$ – dywergencja
- $\vec{n}$ – wektor normalny zewnętrzny do ∂U

Oprócz tego warto być świadomym wzorów typu $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$, $\operatorname{div}(gF) = g \operatorname{div} F + F\nabla g$

Zadanie 13.1. Przekonać się, że całka z k -formy ω po k -wymiarowej podrozmaitości $M \subseteq \mathbb{R}^n$ spełnia równość

$$\int_M \omega = \int_M \omega(x)(v_1(x), \dots, v_k(x)) \, dl_M(x),$$

gdzie funkcje $v_1, \dots, v_n: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ w każdym punkcie $x \in M$ zadają dodatnio zorientowaną bazę ortonormalną $T_x M$ (należy dopuścić, że są nieciągłe).

Uwaga. Zadanie to stanowi ogólnienie Zadania 9.4 i pokazuje, że całkę z formy można zdefiniować w sposób nieopierający się na wyborze parametryzacji.

Zadanie 13.2. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie $(n-1)$ -wymiarową podrozmaitością zorientowaną i oznaczmy przez $\vec{n}$ dodatnio zorientowane pole normalne na M . Dla zadanego ciągłego pola wektorowego $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiujemy $\omega_F \in \Omega^{n-1}(M)$ wzorem

$$\omega_F(x)(v_1, \dots, v_{n-1}) := \det(F(x), v_1, \dots, v_{n-1}) \quad \text{dla } x \in M, v_1, \dots, v_{n-1} \in T_x M.$$

Przekonać się, że zachodzi równość

$$\int_M \omega_F = \int_M F(x) \cdot \vec{n}(x) \, dl_M(x).$$

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 13.1.

Uwaga. Podane warunki na $\vec{n}$ oznaczają, że każdego $x \in M$ zachodzi $\vec{n}(x) \in T_x^\perp M$, $|\vec{n}(x)| = 1$, a jeśli $v_1, \dots, v_{n-1}$ jest dodatnio zorientowaną bazą $T_x M$, to $\vec{n}(x), v_1, \dots, v_{n-1}$ jest dodatnio zorientowaną bazą $\mathbb{R}^n$.

Uwaga. Przyjmując $F := \vec{n}$, otrzymujemy tak zwaną formę objętości. Jej nazwa wiąże się z tym, że forma $\omega_{\vec{n}}$ „zastępuje nam” miarę powierzchniową na M : zachodzi tożsamość $\int_M g \omega_{\vec{n}} = \int_M g \, dl_M$.

Zadanie 13.3. (prawo Archimedes) Ciało A jest zanurzone w jednorodnej cieczy, której górna powierzchnia pokrywa się z płaszczyzną $z = 0$. Ciśnienie w punkcie (x, y, z) jest proporcjonalne do głębokości, a więc wynosi $-cz$ (dla stałej $c = \rho g > 0$). W konsekwencji łączna siła wyporu działająca na ciało A to

$$\vec{F} = \int_{\partial A} (-cz) \cdot (-\vec{n}(x, y, z)) \, dl_{\partial A}(x, y, z)$$

(siła jest skierowana do wewnątrz A , stąd minus przy $\vec{n}(x, y, z)$).

Wykazać, że $\vec{F} = (0, 0, c|A|)$.

Zadanie 13.4. Niech $f \in C_c^\infty(U)$ i niech $U \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie gładkim obszarem ograniczonym, zawierającym punkt 0. Określmy funkcję

$$V(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|^2} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wykazać, że

$$\int_U V(x) \cdot \nabla f(x) \, d\lambda_2(x) = -2\pi f(0).$$

Wskazówka. Rozważyć obszar $U_\varepsilon = U \setminus \{|x| \leq \varepsilon\}$.

Zadanie 13.5. Dana jest półsfera $S^+ = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ oraz pole wektorowe $F(x, y, z) = (x + z, x - y, 0)$. Obliczyć $\int_{S^+} F \cdot \vec{n}$, gdzie wektor normalny $\vec{n}$ wskazuje na zewnątrz kuli jednostkowej.

Zadanie 13.6. Dana jest macierz symetryczna dodatnio określona $A \in M_{n \times n}$ oraz ograniczony obszar $U \subseteq \mathbb{R}^n$ o brzegu klasy C^1 . Funkcja f jest klasy C^1 na pewnym otoczeniu $\bar{U}$ oraz spełnia

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A \cdot \nabla f) = 0 & \text{dla } x \in U, \\ f(x) = 0 & \text{dla } x \in \partial U. \end{cases}$$

Wykazać, że funkcja f zeruje się na U .

14 Zastosowania form różniczkowych

Zadanie 14.1 przedstawia dowód twierdzenia Brouwera o retrakcji; ten sam dowód znajduje się również w notatkach z wykładu. Ciąg Zadań 14.2, 14.3, 14.4 składa się natomiast na dowód twierdzenia Poincarégo o zaczesaniu sfery. Ostatni krok (14.4) omówimy na zajęciach, a pozostałe dwa polecam do rozwiązania jako zadania „z gwiazdką”. W 14.3 można powołać się na 14.2 również gdy tego pierwszego się nie rozwiązało.

Zadanie 14.1. (twierdzenie Brouwera o retrakcji) Niech $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ będzie 2-formą o niezerowej całce $\int_{\mathbb{S}^2} \omega$ (np. formą objętości z Zadania 13.2). Przypuśćmy, że istnieje gładka funkcja $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ spełniająca $u(x) = x$ dla $x \in \mathbb{S}^2$.

- (a) Uzasadnić, że $\int_{\mathbb{S}^2} u^* \omega \neq 0$.
- (b) Uzasadnić, że $d(u^* \omega) = 0$.
- (c) Wywnioskować sprzeczność z założeniem istnienia u i wyprowadzić stąd klasyczne twierdzenie Brouwera.

Zadanie 14.2. ★ (do 12.06.2025) Dana jest 2-forma

$$\omega = x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Przyjmijmy, że przekształcenie $H: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest gładkie i dla $t \in [0, 1]$ oznaczmy przekształcenie $H_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane wzorem $H_t(x, y, z) = H(t, x, y, z)$. Wyprowadzić równość

$$\int_{\mathbb{S}^2} H_0^* \omega - \int_{\mathbb{S}^2} H_1^* \omega = 3 \int_{[0,1] \times \mathbb{S}^2} H^*(dx \wedge dy \wedge dz).$$

(przyjmujemy orientację indukowaną na $\mathbb{S}^2 = \partial B^3$ i $[0, 1] \times \mathbb{S}^2 \subseteq \partial([0, 1] \times B^3)$)

Zadanie 14.3. ★ (do 12.06.2025) Wykazać, że nie istnieje gładka funkcja $H: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, która po obcięciu daje funkcję $H: [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ spełniającą

$$H(0, x) = x, \quad H(1, x) = -x \quad \text{dla } x \in \mathbb{S}^2.$$

Uwaga. Innymi słowy, nie istnieje gładka homotopia między identycznością a przekształceniem antypodycznym na sferze $\mathbb{S}^2$.

Zadanie 14.4. (twierdzenie Poincarégo o zaczesaniu sfery) Wykazać, że na sferze $\mathbb{S}^2$ nie istnieje gładkie nieznikające pole styczne, czyli gładka funkcja $F: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniająca $F(x) \neq 0$ i $F(x) \cdot x = 0$ dla $x \in \mathbb{S}^2$.

(gładkość F oznacza, że przedłuża się do funkcji gładkiej na pewnym zbiorze otwartym)