AM I.2

VI seria zadań domowych

do oddania na początku ćwiczeń 23 kwietnia

Wskazówka dla grupy 2: proszę przypomnieć sobie z wykładu twierdzenia Diniego.

1. Niech $f(x) = \frac{x}{e^x}$ dla $x \geqslant 0$. Zbadać zbieżność jednostajną ciągu $f_n = f \circ \cdots \circ f$ (n-krotne złożenie) na $[0, \infty)$.

2. a) Wyznaczyć wszystkie punkty różniczkowalności funkcji $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$.

b) Wyznaczyć wszystkie punkty różniczkowalności funkcji $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$.

3. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\Big(\frac{2n\pi}{5}\Big) \operatorname{arc\,tg}\Big(\frac{x^2}{n}\Big)$$

jest dobrze określona i klasy C^1 na $\mathbb{R}$.

4. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞ i spełnia $f(0) = f'(0) = 0$. Wykazać, że funkcja

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f\Big(\frac{x}{n}\Big)$$

jest dobrze określona i klasy C^∞ na $\mathbb{R}$. Czy teza jest prawdziwa, jeśli opuścimy założenie $f'(0) = 0$?

5. Znaleźć przedział zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\Big) x^n$$

w zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$. (Chodzi o wyznaczenie zbioru wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których szereg jest zbieżny. Wiadomo z ogólnej teorii szeregów potęgowych, że ten zbiór jest przedziałem – skończonym lub nie; domkniętym lub otwartym lub domknięto-otwartym lub otwarto-domkniętym.)

6 (Zadanie dodatkowe, warte 1 dodatkowy punkt dla grupy 5. Rozwiązania tego zadania proszę oddawać na oddzielnej kartce. **Termin oddania: 21 maja**).
Załóżmy, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny do granicy skończonej g. Wykazać, że

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = g.$$