1 Twierdzenie Fubiniego

Twierdzenie Fubiniego. Jeśli $f\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją całkowalną, to

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)\,\mathrm{d}\lambda_{n+m}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_m(y) \right) \mathrm{d}\lambda_n(x).$$

Uwaga 1. Ta sama równość zachodzi z odwrotną kolejnością całkowania, i w ogóle z dowolnym rozbiciem $z \in \mathbb{R}^{n+m}$ na dwie zmienne.
Uwaga 2. Całkowalność funkcji

$$y \mapsto f(x,y) \quad (\text{dla p.w. } x \in \mathbb{R}^n), \qquad x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_m(y)$$

jest częścią tezy twierdzenia.
Uwaga 3. Analogiczne twierdzenie zachodzi, gdy f jest nieujemną funkcją mierzalną.

Zadanie 1.1. Dany jest graf o V wierzchołkach i E krawędziach, w którym z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie 3 krawędzie.

(a) Wykazać, że $3V = 2E$.

(b) Jaki ma to związek z twierdzeniem Fubiniego?

Zadanie 1.2. (zasada Cavalieriego) Dla nieujemnej funkcji mierzalnej $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}\lambda_n(x) = \int_0^\infty \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\})\,\mathrm{d}t.$$

Wskazówka. Obliczyć całkę z indykatora zbioru $\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < t < f(x)\}$.

Zadanie 1.3. Dla funkcji mierzalnej $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oraz $p \geqslant 1$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,\mathrm{d}\lambda_n(x) = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\})\,\mathrm{d}t.$$

Zadanie 1.4. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = |x|^\alpha$ jest całkowalna

- na kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$?
- na dopełnieniu kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$?

Wskazówka. Dla $n = 1$ odpowiedź brzmi odpowiednio: $\alpha > -1$, $\alpha < -1$.

Zadanie 1.5. Obliczyć pole koła o promieniu r, czyli

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2<r\}}\, \mathrm{d}\lambda_2(x,y).$$

Zadanie 1.6. Wykazać, że $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.
Wskazówka. Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, \mathrm{d}\lambda_2(x,y)$, korzystając z twierdzenia Fubiniego i zasady Cavalieriego.

Zadanie 1.7. Wyznaczyć wartość całki iterowanej

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

poprzez podstawienie $x = yt$ w wewnętrznej całce i zastosowanie twierdzenia Fubiniego.

Zadanie 1.8. Uzasadnić, że funkcja $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ nie jest całkowalna w $[0,1]^2$.

Zadanie 1.9. Obliczyć całkę $\int_A f\, \mathrm{d}\lambda_2$, gdzie

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 2x\}$, $\quad f(x,y) = (1-x+y)e^{-x}$;
(b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 2x,\ x^2y \leqslant 16\}$, $\quad f(x,y) = 1$;
(c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$, $\quad f(x,y) = \frac{1}{x\sqrt{y}}$;
(d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant y\}$, $\quad f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Uwaga. Nie w każdym przypadku jest oczywiste, że założenia twierdzenia Fubiniego są spełnione.

Zadanie 1.10. (a) Niech A będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym przez parabolę $y = x^2$ i prostą $x + y = 2$. Obliczyć

$$\int_A 6x + 2y^2\, \mathrm{d}\lambda_2(x,y).$$

(b) Niech B będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym krzywymi $y = x^2$ i $y = x^3$. Obliczyć

$$\int_B xy^2\, \mathrm{d}\lambda_2(x,y).$$

Zadanie 1.11. Obliczyć całki

$$\int_0^1 \int_0^{x^3} e^{y/x} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \quad \int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{1+x^4} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Zadanie 1.12. Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku przecięcia dwóch (nieskończonych) walców o promieniu 1 i prostopadle przecinających się osiach.

Zadanie 1.13. Obliczyć całkę

$$\int_{[-1,1]^2} \left(1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3\right) \, \mathrm{d}\lambda_2(x,y).$$

Zadanie 1.14. Dany jest wielomian $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o współczynnikach z przedziału $[-1,1]$. Wykazać, że

$$\int_{[-1,1]^2} p(xy) \, \mathrm{d}\lambda_2(x,y) \leqslant 8.$$

Czy stałą 8 można poprawić?

Zadanie 1.15. Wykazać, że

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} \, \mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Wskazówka. Wykorzystać rozwinięcie funkcji $\frac{1}{1-t}$.

Uwaga. Można się przekonać (Zadanie 2.8), że lewa strona jest równa $\frac{\pi^2}{6}$.

Zadanie 1.16. Dla funkcji całkowalnej f wyprowadzić równość

$$2\int_a^b \int_x^b f(x)f(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \left(\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x\right)^2.$$

Zadanie 1.17. Niech $0 < a < b$. Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Wskazówka. (sposób I) Zapisać różnicę $e^{-ax} - e^{-bx} = e^{-tx}\big|_{t=b}^{t=a}$ jako całkę z pochodnej.

Wskazówka. (sposób II) Całkę po przedziale $[\varepsilon, \infty)$ sprowadzić przez podstawienie do całki $[a,b]$, a następnie przejść do granicy $\varepsilon \to 0$.

Zadanie 1.18. Niech $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi o zwartym nośniku. Wyprowadzić wzór na całkowanie przez części:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) \,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \,\mathrm{d}x \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Wywnioskować równości

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \Delta f(x) \,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 \,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 f(x)|^2,$$

w których Δ oznacza operator Laplace'a: $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

Zadanie 1.19. Noga grzyba ma kształt walca (o średnicy 1 i wysokości 2), a na niej leży symetrycznie kapelusz grzyba, będący półkulą (o promieniu R). Przy założeniu, że grzyb jest bryłą jednorodną, a jego środek ciężkości leży na styku nogi i kapelusza, znaleźć promień R.

Zadanie 1.20. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem dodatniej miary λ_n. Pokazać, że rzut ortogonalny na k-wymiarową podprzestrzeń liniową $V \subseteq \mathbb{R}^n$ nie może być zbiorem zerowej miary λ_k.

Uwaga. Taki rzut nie musi być mierzalny. Przykład: jeśli $N \subseteq (0,1)$ jest zbiorem niemierzalnym, to rzut $A = (N \times \{0\}) \cup (1,2)^2$ na pierwszą współrzędną jest niemierzalny, chociaż sam zbiór A jest mierzalny.

Zadanie 1.21. Obliczyć całkę

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} \,\mathrm{d}\lambda_n(x)$$

na dwa sposoby i wywnioskować wzór na miarę kuli jednostkowej:

$$\lambda_n(\mathbb{B}^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)},$$

gdzie $\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x$ jest funkcją gamma Eulera.

Wskazówka. Zadanie 1.6.

Zadanie 1.22. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem o skończonej mierze Lebesgue'a. Udowodnić implikację

$$\int_{A \times A} |x - y|^2 \,\mathrm{d}\lambda_{2n}(x, y) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \int_A |x| \,\mathrm{d}\lambda_n(x) < \infty.$$

2 Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie o zamianie zmiennych. Jeśli $\Phi\colon \Omega \to \Omega'$ jest dyfeomorfizmem dwóch zbiorów otwartych $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$, a $f\colon \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją całkowalną, to

$$\int_{\Omega'} f \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{\Omega} (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| \,\mathrm{d}\lambda_n$$

Uwaga 1. Całkowalność funkcji $(f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|$ jest częścią tezy twierdzenia.
Uwaga 2. Analogiczne twierdzenie zachodzi, gdy f jest nieujemną funkcją mierzalną.

Zadanie 2.1. Obliczyć pole obszaru płaszczyzny ograniczonego od wewnątrz okręgiem jednostkowym, zaś od zewnątrz krzywą opisaną we współrzędnych biegunowych równaniem $r = 2 + \cos\phi$.

Zadanie 2.2. ★ Dane są koła ω_1, ω_2 o promieniu 1. Pierwsze jest nieruchome, a drugie toczy się po nim bez poślizgu. Wyznaczyć pole ograniczone przez trajektorię wybranego punktu na obwodzie koła ω_2.

Zadanie 2.3. Obliczyć średnią odległość punktu trójwymiarowej kuli jednostkowej do jej środka.

Zadanie 2.4. Obliczyć całkę

$$\int_D x^2 + y^2 \,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z), \quad \text{gdzie } D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4,\ z \geqslant 0\right\}.$$

Zadanie 2.5. Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu figury pod wykresem funkcji $y = x^2$, $x \in [1,2]$, wokół osi x.

Zadanie 2.6. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie figurą pod wykresem funkcji $y = \frac{1}{x}$ na przedziale $x \in [1,\infty)$, a B bryłą obrotową powstałą przez obrót A wokół osi x. Wykazać, że $\lambda_2(A) = \infty$, ale $\lambda_3(B) < \infty$.

Zadanie 2.7. Niech $E \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem o dodatniej i skończonej mierze Lebesgue'a, a $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izomorfizmem liniowym. Przekonać się, że L przeprowadza środek ciężkości E na środek ciężkości $L(E)$.

Trudniejsza wersja. To samo pozostaje prawdą, gdy $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest epimorfizmem liniowym.

Zadanie 2.8. Wykazać, że

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\, \mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wskazówka. Obrócić o $45°$, czyli zastosować podstawienie $x = u + v$, $y = u - v$.
Uwaga. Wraz z Zadaniem 1.15 daje to rozwiązanie problemu bazylejskiego: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (zob. T. Apostol, *A proof that Euler missed: evaluating* $\zeta(2)$ *the easy way*, The Mathematical Intelligencer 1983, oraz link)

Zadanie 2.9. Rozważmy następujące przekształcenia $\Phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

(a) $\Phi(z) = z^2$,

(b) $\Phi(z) = e^z$.

Wskazać możliwie dużą dziedzinę $A \subseteq \mathbb{C}$, dla której $\Phi\colon A \to \Phi(A)$ jest dyfeomorfizmem. Jaki jest wyznacznik różniczki Φ?

Zadanie 2.10. Wyznaczyć całkę

$$\int_D (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}\lambda_2(x,y), \quad \text{gdzie} \quad D = \{1 < x^2 - y^2 < 2,\ 2 < xy < 4,\ x, y \geqslant 0\}.$$

Zadanie 2.11. Dana jest krzywa bez samoprzecięć $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ klasy C^2, parametryzowana długością łuku. Oznaczmy wektor normalny $N(t) = (-\dot\gamma_2(t), \dot\gamma_1(t))$ i rozważmy obszar

$$\Gamma_r = \{\gamma(t) + s \cdot N(t) : t \in (a,b),\ |s| < r\}.$$

Wyznaczyć pole obszaru Γ_r dla małych $r > 0$. Jak ma się on do długości krzywej γ?
Wyjaśnienie założeń. *Bez samoprzecięć* oznacza, że γ jest funkcją różnowartościową. Przez *krzywą klasy* C^2 rozumiemy, że γ przedłuża się do funkcji ciągłej na pewnym otwartym przedziale $(a', b') \supseteq [a,b]$. *Parametryzacja długością łuku* to inne określenie na warunek $|\dot\gamma(t)| = 1$ dla wszystkich t.

Zadanie 2.12. Niech A będzie macierzą kwadratową, a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją zadaną wzorem $f(t) = \det(I + tA)$. Wyprowadzić równość $f'(0) = \operatorname{tr} A$.
Trudniejsza wersja. Wyprowadzić wzór na $f'(0)$ dla funkcji $f(t) = \det(B + tA)$, gdzie B jest macierzą odwracalną.

Zadanie 2.13. ★ Niech $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną, a $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funkcją gładką o zwartym nośniku (tzn. zerującą się poza pewną kulą).

(a) Uzasadnić, że przekształcenie

$$\Phi_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \Phi_t(x) = x + t \cdot F(x)$$

jest dyfeomorfizmem dla t z pewnego przedziału $(-t_0, t_0)$. Wyznaczyć pochodną $\det D\Phi_t(x)$ względem t w punkcie $t = 0$.

(b) Niech Ψ_t będzie odwrotnością dyfeomorfizmu Φ_t z punktu a). Wykazać, że pochodną funkcji

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) := \int_{\mathbb{R}^n} h(\Psi_t(x))\,\mathrm{d}x$$

w punkcie $t = 0$ jest

$$f'(0) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x)\right)}_{\text{ozn. } \operatorname{div} F(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 2.14. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie obszarem wypukłym, którego brzeg $\partial\Omega$ jest obrazem 1-okresowej funkcji $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ klasy C^2. Załóżmy ponadto, że $|\dot\gamma(t)| = 1$ oraz że krzywizna $\kappa(t) := |\ddot\gamma(t)|$ jest dodatnia dla każdego t.

(a) Wyprowadzić równość $\kappa(t) = |\ddot\gamma_1(t)\dot\gamma_2(t) - \dot\gamma_1(t)\ddot\gamma_2(t)|$.

(b) Uzasadnić, że $\int_0^1 \kappa(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$.

(c) Dla zadanego (można przyjąć, że odpowiednio małego) $r > 0$ wyznaczyć pole obszaru

$$\Gamma_r = \{\gamma(t) + s \cdot \dot\gamma(t) : t \in [0,1],\ s \in [0,r]\}.$$

Wskazówka. W punkcie (a) zróżniczkować warunek $|\dot\gamma(t)|^2 \equiv 1$, by wyprowadzić prostopadłość $\ddot\gamma(t) \perp \dot\gamma(t)$.

Wskazówka. W punkcie (b) rozważyć pochodną kąta $\alpha(t) := \operatorname{arc\,tg}(\dot\gamma_1(t)/\dot\gamma_2(t))$. Można przyjąć za znany fakt, że wektor jednostkowy $\dot\gamma(t)$ na przedziale $t \in [0,1]$ dokonuje obrotu o 2π.

Uwaga. Gdyby na rowerze o długości r zrobić okrążenie po wypukłym torze, to Γ_r jest dokładnie obszarem między śladami tylnego i przedniego koła ($\partial\Omega$ pełni tu rolę śladu tylnego koła). Więcej szczegółów można znaleźć w artykule *Tractrices, Bicycle Tire Tracks, Hatchet Planimeters, and a 100-year-old Conjecture*, The American Mathematical Monthly, 2013 (link).

Zadanie 2.15. Dane jest funkcja $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (ozn. $p = (x, y)$) klasy C^1 oraz obszar

$$E_T := \{r \cdot p(t) : r \in (0,1),\ t \in (0,T)\}$$

„zamieciony" przez wektor $p(t)$ w czasie $t \in (0,1)$. Zakładając, że funkcja $L := \dot{x}y - x\dot{y}$ nie zeruje się dla $0 \leqslant t \leqslant T$, wyprowadzić wzór na pole obszaru E_T

$$\lambda_2(E_T) = \frac{1}{2}\int_0^T |L(t)|\, \mathrm{d}t$$

dla dostatecznie małych $T > 0$.

Uwaga. Zadanie to pokazuje równoważność między zachowaniem momentu pędu (wyrażonego wzorem $|p \times \dot{p}|$) a II prawem Keplera (wyrażonym jako proporcjonalność pola E_T do czasu T).

Rozwiązanie zadania 2.11 (szkic). Oznaczmy

$$\Phi(t, s) = \gamma(t) + s \cdot N(t), \qquad \kappa(t) = \ddot{\gamma}(t)\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t)\ddot{\gamma}(t).$$

Obliczamy bezposrednio, że $\det D\Phi(t, s) = 1 + s\kappa(t)$. Jeśli przyjmiemy ograniczenie $|\kappa(t)| \leqslant M$ oraz $r < \frac{1}{M}$, to $\det D\Phi(t, s) > 1 - \frac{1}{M} \cdot M = 0$ na zbiorze $(a, b) \times (-r, r)$. Jeśli tylko Φ jest dyfeomorfizmem, to obliczamy

$$\begin{aligned} \lambda_2(\Gamma_r) &= \int_{\Gamma_r} 1 \,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{(a\times b)\times(-r,r)} 1 + s\kappa(t) \,\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= \int_a^b \int_{-r}^{r} 1 + s\kappa(t) \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t = \int_a^b 2r \,\mathrm{d}t = 2r \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Zgodnie z oczekiwaniami miarą zbioru Γ_r jest długość krzywej $(b - a)$ pomnożona przez szerokość wziętego otoczenia $(2r)$. Z twierdzenia o funkcji odwrotnej oraz warunku $\det D\Phi > 0$ wynika, że Φ jest dyfeomorfizmem lokalnie na $(a, b) \times (-r, r)$. Pozostaje więc sprawdzić różnowartościowość Φ (być może zmniejszając w tym celu dziedzinę), co można zrobić na jeden z wielu sposobów:

Sposób I. Oznaczmy interesującą nas krzywą jako $\Gamma := \gamma([a, b])$. Skoro $\gamma\colon [a, b] \to \Gamma$ jest bijekcją, to posiada odwrotność $\Gamma \to [a, b]$. Ze względu na zwartość $[a, b]$ ta odwrotność jest ciągła, a nawet jednostajnie ciągła. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje więc $\delta(\varepsilon) > 0$ taka, że $|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < \delta(\varepsilon)$ implikuje $|t_1 - t_2| < \varepsilon$.

Twierdzenie o funkcji odwrotnej dla każdego $t \in [a, b]$ daje nam otoczenie punktu $(t, 0)$, na którym Φ jest dyfeomorfizmem. Dzięki zwartości możemy więc pokryć odcinek $[a, b]$ skończenie wieloma przedziałami (l_i, p_i) $(i = 1, \dots, m)$ o tej własności, że Φ jest różnowartościowe na $(l_i, p_i) \times (-r_i, r_i)$. Niech $\lambda > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a tego pokrycia, czyli taką liczbą, że każdy pododcinek $[a, b]$ długości $< \lambda$ mieści się w którymś z odcinków (l_i, p_i). Wybieramy teraz

$$r' := \min(\delta(\lambda)/2, r_1, \dots, r_m),$$

gdzie $\delta(\lambda)$ oznacza wartość δ odpowiadającą $\varepsilon = \lambda$ w warunku jednostajnej ciągłości γ^{-1}. Jeśli teraz dla dwóch punktów $(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in (a, b) \times (-r', r')$ zachodzi równość $\Phi(t_1, s_2) = \Phi(t_2, s_2)$, to

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| = |(\Phi(t_1, 0) - \Phi(t_1, s_1)) + (\Phi(t_2, s_2) - \Phi(t_2, 0))| \leqslant |s_1| + |s_2| < \delta(\lambda).$$

Wnioskujemy więc, że $|t_1 - t_2| < \lambda$, co oznacza, że oba punkty t_1, t_2 zawierają się w jednym z przedziałów (l_i, p_i). Z różnowartościowości na $(l_i, p_i) \times (-r', r')$ wynika teraz, że musi zachodzić $(t_1, s_1) = (t_2, s_2)$, tak jak żądamy.

Sposób II. Oznaczmy pomocniczo $E = [a,b] \times [-r,r]$ i rozważmy zbiór

$$A = \{(x,y) \in E \times E : x \neq y,\ \Phi(x) = \Phi(y)\},$$

czyli zbiór par „przeczących różnowartościowości”. Naszym celem jest pokazanie, że dla pewnego $0 < r' < r$ jest on rozłączny z $[a,b] \times (-r', r')$. Zauważmy więc najpierw, że A jest rozłączny z $([a,b] \times \{0\})^2$ – ta obserwacja okazuje się równoważna różnowartościowości γ, co przyjęliśmy jako założenie.

Uzasadnimy też, że A jest domknięty. W tym celu zauważmy najpierw, że jego domknięcie zawiera się w $\{(x,y) \in E^2 : \Phi(x) = \Phi(y)\}$. Gdyby w tym domknięciu był punkt postaci (x,x), to moglibyśmy wziąć otoczenie $U \ni x$, na którym funkcja Φ jest różnowartościowa, co oznacza, że punkt (x,x) posiada otoczenie U^2 rozłączne z A. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że domknięcie A nie zawiera punktów spoza A.

Z domkniętości zbioru $A \subseteq E^2$ wynika jego zwartość, więc funkcja ciągła

$$g((t_1, s_2), (t_2, s_2)) = |s_1| + |s_2|$$

przyjmuje na nim swoje minimum. To minimum jest niezerowe, co sprowadza się do wcześniejszej obserwacji o rozłączności zbiorów A oraz $([a,b] \times \{0\})^2$. Mamy więc $g \geqslant 2\varepsilon$ na A (dla pewnego $\varepsilon > 0$). Natomiast dla punktów $x, y \in ((a,b) \times (-\varepsilon, \varepsilon))^2$ mamy $g(x,y) < 2\varepsilon$, co dowodzi żądanej rozłączności i kończy dowód.

Sposób III. Przypuśćmy, że nie istnieje żądane $r' > 0$ takie, by Φ było różnowartościowe na $[a,b] \times (-r', r')$. Dla każdego $r' = \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ możemy więc wybrać różne $(t_k, s_k), (t'_k, s'_k) \in [a,b] \times (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ spełniające $\Phi(t_k, s_k) = \Phi(t'_k, s'_k)$. Oczywiście $s_k, s'_k \to 0$, możemy też wybrać podciągi, na których mamy zbieżność $t_k \to t$, $t'_k \to t'$. W granicy zachodzi równość $\Phi(t, 0) = \Phi(t', 0)$, czyli $\gamma(t) = \gamma(t')$, a zatem $t = t'$. Jednak w pewnym otoczeniu U punktu $(t, 0)$ funkcja Φ jest różnowartościowa, a dla dużych k mamy $(t_k, s_k), (t'_k, s'_k) \in U$, co prowadzi do sprzeczności.

3 Sploty

Splot funkcji $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

Splot ciągów $a, b\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:

$$(a * b)_n := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n-k}b_k$$

Zadanie 3.1. Dane są dwie niezależne ograniczone zmienne losowe A, B o wartościach w liczbach naturalnych. Oznaczmy $a_k := \mathbb{P}(A = k)$, $b_k := \mathbb{P}(B = k)$ oraz $c_k := \mathbb{P}(A + B = k)$. Wykazać, że ciąg (c_k) jest splotem ciągów (a_k) i (b_k), to znaczy

$$c_k = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_{k-i}b_i.$$

Przekonać się również, że wielomian $\sum c_k x^k$ jest iloczynem wielomianów $\sum a_k x^k$ i $\sum b_k x^k$.

Zadanie 3.2. Znaleźć przykład funkcji $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dla których całka definiująca $f * g(0)$ nie jest zbieżna.

Zadanie 3.3. Wskazać ciąg funkcji $f_n \in L^1([0,1])$ spełniający $\|f_n\|_{L^1} \leqslant 1$, który nie posiada podciągu zbieżnego w $L^1([0,1])$.

Uwaga. Istnienie takiego ciągu pokazuje, że kula jednostkowa w przestrzeni $L^1([0,1])$ nie jest zwarta.

Zadanie 3.4. Niech $f \in L^1(\Omega,\mu)$. Wykazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\mu(A) < \delta \quad\Longrightarrow\quad \int_A |f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) < \varepsilon.$$

Zadanie 3.5. Wykazać, że przestrzeń $L^1(\mathbb{R}^n)$ z działaniem splotu nie posiada jedynki: nie istnieje funkcja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, spełniająca $f * g = g$ dla wszystkich $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Wskazówka. Sprawdzić tę równość w przypadku funkcji g będącej indykatorem małego zbioru.

Zadanie 3.6. Pokazać, że dla dowolnego $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ funkcja $\mathbb{R}^n \ni v \mapsto f(\cdot - v) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ jest funkcją ciągłą.

Wskazówka. Warto skorzystać z faktu, że funkcje ciągłe o zwartym nośniku są gęste w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 3.7. Dla $a, b > 0$ przyjmijmy

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x \quad \text{oraz} \quad B(a,b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \, \mathrm{d}x.$$

Wyprowadzić tożsamość $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Wskazówka. Wykorzystać splot funkcji $f_c(x) = x^{c-1} e^{-x} \mathbb{1}_{x>0}$ dla $c = a, b$.

Zadanie 3.8. Wykazać, że jeśli $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $f * g$ jest funkcją ciągłą.

Uwaga. Norma L^∞ jest prawie jak norma supremum:
$\|f\|_{L^\infty} = \min\{M > 0 : |f(x)| \leqslant M \text{ p.w.}\}$
Przestrzeń L^∞ zawiera wszystkie funkcje ograniczone prawie wszędzie.

Zadanie 3.9. Jeśli $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to funkcja $\varphi * f$ jest gładka oraz $D^\alpha(\varphi * f) = (D^\alpha \varphi) * f$ dla dowolnego wielowskaźnika α.

Zadanie 3.10. Niech $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie funkcją gładką o zwartym nośniku i całce $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi$ równej 1; dla $r > 0$ określmy $\varphi_r(x) := r^{-n}\varphi(x/r)$. Wykazać, że jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to przy $r \to 0$ zachodzi zbieżność $\varphi_r * f \to f$ w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Uwaga. W połączeniu z poprzednim zadaniem oznacza to, że funkcje gładkie są gęste w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Zadania dodatkowe

Zadanie 3.11. (kostki Sichermana) Niech A, B będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednostajnym rozkładzie na $\{1, \ldots, 6\}$ (odpowiada to dwóm rzutom kostką). Znaleźć niezależne zmienne A', B' o innym rozkładzie na liczbach naturalnych, ale dające ten sam rozkład sumy $A' + B'$ co $A + B$.

Zadanie 3.12. Całki niewłaściwe

$$B_k := \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin(x/(2k+1))}{x/(2k+1)} \, \mathrm{d}x$$

są równe π dla $k = 0, 1, \ldots, 6$. Ale dla $k = 7$ dostajemy

$$B_7 = \frac{467'807'924'713'440'738'696'537'864'469}{467'807'924'720'320'453'655'260'875'000} \pi = \pi - 0,\underbrace{0000000000}_{\text{10 zer}}462\ldots$$

Sprawdzić, że podobny fenomen zachodzi przy splataniu funkcji $f_d := \frac{1}{d}\mathbb{1}_{(-d/2,d/2)}$. Otóż liczby

$$C_k := f_1 * f_{1/3} \ldots * f_{1/(2k+1)}(0)$$

są równe 1 dla $k = 0, 1, \ldots, 6$, ale dla $k = 7$ jest już mniej.

Uwaga. Polecam filmy na kanale Youtube 3Blue1Brown: Researchers thought this was a bug (Borwein integrals) oraz But what is a convolution?.

Zadanie 3.13. Jeśli $p, q, r \geqslant 1$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, to

$$\|f * g\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Zadanie 3.14. Dla $t > 0$ określamy tak zwane jądro ciepła $g_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wzorem $g_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ (gęstość rozkładu normalnego o wariancji 2), następnie dla $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiujemy $H_t f := f * g_t$. Wykazać, że

(a) funkcja g_t spełnia równanie ciepła $\partial_t g = \Delta g$ (gdzie $\Delta = \partial_{11} + \ldots + \partial_{nn}$);

(b) funkcja $H_t f(x)$ (zmiennych t, x) jest gładka na $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ i również spełnia $\partial_t f = \Delta f$;

(c) $\|H_t f - f\|_{L^1} \to 0$ przy $t \to 0$;

(d) $H_t H_s f = H_{t+s} f$.

Wskazówka. W ostatnim punkcie warto najpierw wyprowadzić wzór

$$\partial_t (H_{r-t} f_t(x)) = (H_{r-t}(\partial_t f_t - \Delta f_t))(x)$$

(w którym f_t jest gładką funkcją dwóch zmiennych t, x).

2024-06-10

4 Podrozmaitości $\mathbb{R}^n$

Definicja. Podzbiór $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy m-wymiarową *podrozmaitością* (inaczej: *rozmaitością zanurzoną*), jeśli lokalnie wygląda jak fragment $\mathbb{R}^m$. Można przyjąć dowolną z poniższych definicji:

M jest lokalnie wykresem:	$\forall_{p\in M}\ \exists_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n,\, U \overset{\text{otw.}}{\subseteq} P:=\operatorname{span}(e_{i_j}),\, p\in V \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n\, \varphi\in C^1(U,P^\perp)}$ $M \cap V = \text{wykres } \varphi \cap V$
obrazem parametryzacji:	$\forall_{p\in M}\ \exists_{U \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^m,\, p\in V \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n,\, \varphi\in C^1(U,V),\, \operatorname{rank} D\varphi=m}$ $\varphi\colon U \to M \cap V$ jest homeomorfizmem
poziomicą submersji:	$\forall_{p\in M}\ \exists_{p\in V \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n,\, \varphi\in C^1(V,\mathbb{R}^{n-m}),\, \operatorname{rank} D\varphi=n-m}$ $M \cap V = \text{poziomica } \varphi$
jak $\mathbb{R}^m \times \mathbf{0}$:	$\forall_{p\in M}\ \exists_{p\in V \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n,\, 0\in U \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n,\, \varphi\in C^1(U,V)}$ dyfeomorfizm $M \cap V = \text{obraz } \mathbb{R}^m \times \mathbf{0} \text{ przy } \varphi$

Zadanie 4.1. Dla promieni $0 < r < R$ wprowadźmy torus

$$T_{r,R} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

otrzymany przez obrót okręgu $o((R,0),r)$ w płaszczyźnie xz wokół osi z. Rozważmy też standardowy torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, czyli zbiór

$$\mathbb{T}^2 = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3^2 + x_4^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Uzasadnić, że jedno i drugie jest rozmaitością. Sprawdzić, że

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto ((R+rx_1)x_3, (R+rx_1)x_4, rx_2)$$

jest dyfeomorfizmem $\mathbb{T}^2 \to T_{r,R}$.

Zadanie 4.2. Czy zbiory

$$A = \{x^6 + y^5 + z^4 = 0\}, \quad B = \{x^6 + y^4 + z^3 = 0\}$$

w $\mathbb{R}^3$ są rozmaitościami klasy C^1?

Zadanie 4.3. Pokazać, że zbiór

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ xy + yz + zx = 8\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

jest krzywą (tj. 1-wymiarową rozmaitością) klasy C^1. Czy jest to krzywa spójna?
Wskazówka. Może być pomocne rozważenie wielkości $(x+y+z)^2$.

Zadanie 4.4. Punkt P porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż odcinka od punktu $A = (0,0,0)$ do punktu $B = (1,0,0)$. Podobnie w tym samym czasie Q przemieszcza się z $C = (0,1,0)$ do $D = (0,1,1)$. Niech M będzie sumą wszystkich odcinków PQ (bez końców), łączących punkty P i Q w jednoczesnych położeniach. Znaleźć parametryzację M i uzasadnić, że jest to rozmaitość dwuwymiarowa w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 4.5. Niech $f_\lambda(x,y) = x^3 + \lambda(x^2 - y^2)$ dla dowolnych $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_0(x,y) = c\}$ jest rozmaitością? Dla jakich c jest spójny?

(b) Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x,y) = c\}$ jest rozmaitością? Dla jakich c jest spójny?

Zadanie 4.6. Pokazać, że zbiór macierzy ortogonalnych

$$O(n) = \{Q \in M_{n\times n} : Q^T Q = I\}$$

jest rozmaitością wymiaru $n(n-1)/2$. Opisać przestrzeń styczną do $O(n)$ w punkcie I.
Wskazówka. Funkcja $F(Q) = Q^T Q$ nie jest submersją jako funkcja $F\colon M_{n\times n} \to M_{n\times n}$, ale jako $F\colon M_{n\times n} \to \mathrm{Sym}_{n\times n}$ już tak.

Zadanie 4.7. Niech $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ będzie standardową sferą oraz

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad F(x,y,z) = (xy, yz, zx, x^2 - y^2).$$

Sprawdzić, że $F(\mathbb{S}^2)$ jest zwartą rozmaitością.

Uwaga. Jest to tzw. *płaszczyzna rzutowa.* Można podać jej prostszy opis: jest to sfera $\mathbb{S}^2$ z utożsamionymi punktami antypodycznymi (czyli parami x i $-x$).

Zadanie 4.8. Niech funkcja $f\colon (-\infty, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana wzorem

$$f(t) = \begin{cases} (1,t) & \text{dla } t \leqslant 0, \\ (\cos t, \sin t) & \text{dla } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Przekonać się, że f jest różnowartościową funkcją klasy C^1. Czy jej obraz jest jednowymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^2$?

Zadanie 4.9. Uzasadnić następujące pomocnicze fakty z topologii:

(a) Załóżmy, że A jest przestrzenią zwartą, B przestrzenią Hausdorffa, a $f\colon A \to B$ jest ciągłą bijekcją. Wówczas f jest homeomorfizmem.

(b) Załóżmy, że A, B są jak wyżej, natomiast $f\colon A \to B$ jest funkcją ciągłą spełniającą na pewnym podzbiorze $A_0 \subseteq A$ warunek

$$f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad x = y \text{ lub } x, y \notin A_0.$$

Wówczas obcięcie $f|_{A_0}$ jest homeomorfizmem pomiędzy A_0 i $f(A_0)$.

Uwaga. Jeśli to ułatwi rozwiązanie, to można przyjąć, że A, B są przestrzeniami metrycznymi.

Zadanie 4.10. Przekonać się, że przekształcenie

$$i\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad i(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

jest gładkim dyfeomorfizmem spełniającym $i^2 = \mathrm{id}$. Sprawdzić, że zadaje ono bijekcję pomiędzy zbiorami

$$P = \{x : x_1 = 1\}, \qquad S = \left\{x : \left|x - \tfrac{1}{2}e_1\right| = \tfrac{1}{2}\right\} \setminus \{0\},$$

a więc parametryzację sfery z wyjętym punktem.

Zadanie 4.11. ★ Niech M będzie standardową wstęgą Möbiusa w $\mathbb{R}^3$, np. opisaną przez parametryzację:

$$\begin{cases} x &= \left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u \\ y &= \left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u \\ z &= \frac{v}{2}\sin\frac{u}{2} \end{cases} \qquad (0 \leqslant u < 2\pi,\ -1 < v < 1)$$

Wykazać, że choć M jest rozmaitością, to nie da się przedstawić jako poziomica submersji. Innymi słowy, nie istnieje zbiór otwarty $M \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$ i funkcja $F\colon U \to \mathbb{R}$ klasy C^1, dla której

$$M = F^{-1}(0), \qquad \operatorname{rank} dF(x) = 1 \quad \text{dla } x \in M.$$

5 Wyznacznik Grama

Zadanie 5.1. (o wyznaczniku Grama)

(a) Załóżmy, że U, V są przestrzeniami liniowymi z iloczynem skalarnym, tego samego wymiaru, a $L\colon U \to V$ jest przekształceniem liniowym. Zdefiniujmy $|\det L|$ jako

$$|\det L| := \left|\det\left([L]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\right)\right|,$$

gdzie $[L]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ jest macierzą L w pewnych bazach ortonormalnych $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ przestrzeni U, V. Sprawdzić, że definicja nie zależy od wyboru baz.

(b) Przekonać się, że nadal obowiązują wzory $|\det(L_1 L_2)| = |\det L_1| \cdot |\det L_2|$ oraz $|\det L^T| = |\det L|$.

(c) Przyjmijmy teraz, że $V \subseteq W$, przekształcenie $E\colon V \hookrightarrow W$ jest włożeniem (tzn. $E(v) = v$) oraz $M := EL$. Dowieść, że $\det(M^T M) = |\det L|^2$.

(d) Załóżmy, że różniczka pewnego przekształcenia $Df\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ma rząd n (maksymalny). Oznaczmy przez $\overline{Df}\colon \mathbb{R}^n \to \operatorname{im} Df$ tę samą różniczkę rozumianą jako przekształcenie w mniejszą podprzestrzeń. Wykazać, że

$$\text{wyznacznik Grama} = \sqrt{\det(Df^T Df)} = |\det \overline{Df}|.$$

Uwaga. Jeśli rozważać przestrzenie liniowe z wybraną orientacją, to przez ograniczenie do baz dodatnio zorientowanych można zdefiniować $\det L$ bez modułu. Przykładowo, przekształcenie $M\colon U \to U$ ma dobrze zdefiniowany wyznacznik $\det M = \det[M]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}}$ (niezależny od wyboru orientacji U, gdyż przyjmujemy tę samą bazę dwa razy).

Zadanie 5.2. Funkcje

$$\begin{aligned} f, g\colon (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3, \\ f(\alpha, \beta) &= (\cos\beta, \sin\beta, \sin\alpha), \\ g(\alpha, \beta) &= (\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha) \end{aligned}$$

parametryzują odpowiednio walec $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1,\ |z| < 1\}$ oraz sferę $\mathbb{S}^2$ z wyjętymi biegunami $(0, 0, \pm 1)$.

(a) Wyznaczyć obrazy wektorów bazy standardowej przy przekształceniu Df (czyli $\partial_\alpha f$ oraz $\partial_\beta f$), wybrać dogodną bazę $T_f C$ i obliczyć wyznacznik $|\det \overline{Df}|$.

(b) W podobny sposób obliczyć wyznacznik $|\det \overline{Dg}|$.

(c) Podać interpretację geometryczną przekształcenia $g \circ f^{-1} \colon C \to \mathbb{S}^2$. Uzasadnić, że przekształcenie liniowe

$$Dg \circ Df^{-1} \colon T_p C \to T_q \mathbb{S}^2$$

ma wyznacznik (w module) równy 1.

(d) Obliczyć bezpośrednio wyznaczniki Grama $\sqrt{\det(Df^\top Df)}$, $\sqrt{\det(Dg^\top Dg)}$ i porównać z wynikami uzyskanymi w punktach a) i b).

Wywnioskować, że pole czaszy sfery zakreślonej cyrklem o rozwartości r $(0 < r < 2)$ wynosi πr^2.

Zadanie 5.3. Korzystając z wybranej przez siebie charakteryzacji, wyprowadzić wzory:

(a) $|\det \overline{D\varphi}| = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$, gdy $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$;

(b) $|\det \overline{D\varphi}| = |\varphi'|$, gdy $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

6 Miara powierzchniowa

Zadanie 6.1. Obliczyć długość krzywej zadanej poprzez parametryzację

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t) \qquad \text{dla } t \in (0, 2\pi).$$

Zadanie 6.2. Obliczyć miarę powierzchni zadanej poprzez parametryzację

$$\varphi(r,t) = (r\cos t, r\sin t, t) \qquad \text{dla } r \in (0,1),\ t \in (0, 2\pi).$$

Zadanie 6.3. Znaleźć parametryzację krzywej opisanej równaniem

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2,$$

a następnie wyznaczyć jej długość na tyle jawnie, na ile się uda.

Zadanie 6.4. Obliczyć całkę

$$\int_C x^2 \,\mathrm{d}l_C,$$

jeśli C to krzywa powstała w wyniku przecięcia sfery jednostkowej (o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) z płaszczyzną $x + y + z = 1$.

Zadanie 6.5. Wyznaczyć miarę powierzchni M z Zadania 4.4.

Zadanie 6.6. Wykazać szczególny przypadek twierdzenia o całkowaniu po włóknach:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \,\mathrm{d}\lambda_n(x) = \int_0^\infty \int_{\partial B_r} f(x) \,\mathrm{d}l_{\partial B_r}(x) \,\mathrm{d}r$$

dla odpowiednio regularnych funkcji f.

Uwaga. Równość zachodzi dla wszystkich $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ale na potrzeby rozwiązania można np. założyć ciągłość.

Zadanie 6.7. Wykazać, że średnia odległość punktów n-wymiarowej kuli o promieniu R do środka tej kuli wynosi $\frac{n}{n+1}R$.

Zadanie 6.8. Obliczyć pole powierzchni paraboloidy

$$M = \Big\{(x, y, x^2 + y^2) : x^2 + y^2 < 1\Big\}.$$

Zadanie 6.9. Wyprowadzić wzór na miarę wykresu funkcji $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: jeśli $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ jest wykresem f na zbiorze U, czyli zbiorem $\{(x, f(x)) : x \in U\}$, to

$$l(M) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}\, \mathrm{d}x.$$

Zadanie 6.10. (reguła Pappusa-Guldina) Wykazać, że miara powierzchni obrotowej powstałej w wyniku obrotu krzywej Γ wynosi 2π razy całka po Γ z odległości do osi obrotu. Lub inaczej: $2\pi r \cdot l(\Gamma)$, gdzie r jest odległością środka ciężkości Γ od osi obrotu.

Zadanie 6.11. Wyznaczyć wzór na pole powierzchni bocznej walca i stożka (o wysokości h i promieniu r) na dwa sposoby:

(a) w oparciu o regułę Pappusa-Guldina;

(b) przez wskazanie izometrycznej figury płaskiej w $\mathbb{R}^2$ (chodzi o to, żeby różniczka parametryzacji była włożeniem izometrycznym).

Zadanie 6.12. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie rozmaitością jednowymiarową, $f\colon M \to (0, \infty)$ będzie funkcją ciągłą, a $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zbiorem zadanym przez

$$S = \{(x, y, t) : (x, y) \in M,\ 0 < t < f(x, y)\}.$$

Uzasadnić, że S jest rozmaitością 2-wymiarową oraz że

$$l(S) = \int_M f(x, y)\, \mathrm{d}l_M(x, y).$$

Zadanie 6.13. Dane są rozmaitości $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^M$ (m-wymiarowa) i $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^N$ (n-wymiarowa). Wykazać, że zbiór

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{M+N} : x \in \mathcal{M},\ y \in \mathcal{N}\}$$

jest rozmaitością $m+n$-wymiarową. Dla odpowiednio regularnych funkcji $f\colon \mathcal{M}\times\mathcal{N} \to \mathbb{R}$ wyprowadzić wzór

$$\int_{\mathcal{M}\times\mathcal{N}} f(x, y)\, \mathrm{d}l_{\mathcal{M}\times\mathcal{N}}(x, y) = \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathcal{M}} f(x, y)\, \mathrm{d}l_{\mathcal{M}}(x)\, \mathrm{d}l_{\mathcal{N}}(y).$$

Zadanie 6.14. ★ (twierdzenie o całkowaniu po włóknach) Załóżmy, że $H\colon U \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 na $U \subseteq \mathbb{R}^n$, a jej gradient nie zeruje się na zbiorze zwartym $K \subseteq U$. Dla odpowiednio regularnych funkcji f wyprowadzić wzór

$$\int_K f(x)\,\mathrm{d}\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{K\cap H^{-1}(t)} \frac{f(x)}{|\nabla H(x)|}\,\mathrm{d}l_{H^{-1}(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Wskazówka. Można skorzystać z następującej wersji TFU: dla dowolnego punktu istnieje dyfeomorfizm otoczenia Φ spełniający tożsamość $H(\Phi(t,u)) = t$.

7 Otoczenia tubularne

Zadanie 7.1. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie wykresem funkcji $f(x) = |x|^{3/2}$. Przekonać się, że dla małych $\varepsilon > 0$ punkt $(0, \varepsilon)$ ma dokładnie dwa punkty najbliższe na M.

Zadanie 7.2. Rozważmy torus zanurzony w $\mathbb{R}^3$:

$$T := \left\{(x, y, z) : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\right\} \qquad (0 < r < R)$$

oraz płaszczyznę $V \subseteq \mathbb{R}^3$. Czy rzut ortogonalny T na V ma gładki brzeg? Innymi słowy: czy torus widziany ludzkim okiem jest gładki?

Zadanie 7.3. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie gładką zwartą podrozmaitością, a $\pi\colon V \to M$ rzutem na najbliższy punkt (określonym na pewnym otoczeniu $M \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$). Definiujemy:

- drugą formę podstawową $A_p(u, v) := -D_p^2\pi(u, v)$ dla $p \in M$, $u, v \in T_pM$;
- krzywiznę Riemanna $\mathrm{Rm}_p(a, b, c, d) = \langle A_p(a, d), A_p(b, c)\rangle - \langle A_p(a, c), A_p(b, d)\rangle$ dla $p \in M$, $a, b, c, d \in T_pM$;
- w przypadku $\dim M = 2$ krzywiznę Gaussa $K_p = \mathrm{Rm}_p(u, v, v, u)$ dla $p \in M$ i dowolnej bazy o.n. $u, v \in T_pM$.

W przypadku sfery jednostkowej $M = \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ wyznaczyć wzory na:

(a) rzut $\pi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$;

(b) drugą formę podstawową $A_p(u, v) = \langle u, v\rangle\, p$;

(c) krzywiznę Riemanna $\mathrm{Rm}_p(a, b, c, d) = \langle a, d\rangle \langle b, c\rangle - \langle a, c\rangle \langle b, d\rangle$;

(d) w przypadku $n = 3$ krzywiznę Gaussa $K_p = 1$.

Zadanie 7.4. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie gładką m-wymiarową podrozmaitością. Wykazać, że następujące zbiory

$$\begin{aligned} TM &= \{(p, v) : p \in M,\ v \in T_pM\} && \text{(wiązka styczna)},\\ T^\perp M &= \{(p, v) : p \in M,\ v \in T_p^\perp M\} && \text{(wiązka normalna)} \end{aligned}$$

są podrozmaitościami $\mathbb{R}^{2n}$ wymiaru odpowiednio $2m$ i n.

Zadanie 7.5. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym obszarem o gładkim brzegu. Uzasadnić, że funkcja

$$d(x) = \operatorname{dist}(x, \Omega^c) - \operatorname{dist}(x, \Omega)$$

jest gładka na pewnym otoczeniu $\partial\Omega$, ponadto dla $p \in \partial\Omega$ gradient $\nabla d(p)$ jest wektorem normalnym wewnętrznym do $\partial\Omega$.

Zadanie 7.6. ★ Niech Ω i d będą jak w poprzednim zadaniu. Ustalmy gładką funkcję η spełniającą $\eta(s) = 0$ dla $s \leqslant \frac{1}{2}$ i $\eta(s) = 1$ dla $s \geqslant 1$, a następnie określmy $h_r(x) := \eta(d(x)/r)$.

(a) Uzasadnić, że jeśli $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją gładką, to

$$\int_\Omega F(x) \cdot \nabla h_r(x)\, \mathrm{d}x \xrightarrow{r\to 0} -\int_{\partial\Omega} F(x) \cdot n(x)\, \mathrm{d}l_{\partial\Omega}(x),$$

gdzie $n(x)$ jest wektorem normalnym zewnętrznym (czyli $n(x) = -\nabla d(x)$).

(b) Wywnioskować twierdzenie o dywergencji

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot n(x)\, \mathrm{d}l_{\partial\Omega}(x),$$

gdzie $\operatorname{div} F = \partial_1 F^1 + \ldots + \partial_n F^n$ jest dywergencją pola F.

8 O formach różniczkowych

Czego się spodziewać. Kurs analizy matematycznej można prawie uznać za zakończony. Ostatnim prawdziwie analitycznym twierdzeniem, jakie poznamy, jest uogólnienie tzw. podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego (czyli $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a)$) na wyższe wymiary. Jest to *twierdzenie Stokesa* [Tw. 7.53][1], stwierdzające równość $\int_M d\omega = \int_{\partial M}\omega$. Zamiast niego nieco łatwiej jest przedstawić równoważne mu (z dokładnością do pewnych technicznych szczegółów) *twierdzenie o dywergencji* [Lem. 7.55]:

$$\int_M \operatorname{div}_M F(x)\,\mathrm{d}l_M(x) = \int_{\partial M} F(x)\cdot\vec{n}(x)\,\mathrm{d}l_{\partial M}(x).$$

Tutaj $M \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zwartą m-wymiarową podrozmaitością z brzegiem, $\operatorname{div}_M F(x)$ to dywergencja zdefiniowana jako suma $\sum_{j=1}^m \langle \nabla_{e_i} F(x), e_i\rangle$, gdzie $e_1,\ldots,e_m$ jest wybraną bazą o.n. T_xM. Natomiast $\vec{n}(x)$ to wektor normalny zewnętrzny (styczny do M, ortogonalny do ∂M).

Pozostała część materiału, jaki nam pozostał, to przede wszystkim algebra wieloliniowa. Ta okoliczność ma oczywiście szereg zalet i wad, znanych wszystkim z kursu geometrii z algebrą liniową.

Dotychczasowe spotkania z formami. Dla funkcji $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ określonej na zbiorze otwartym $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ różniczka jest funkcją $Df\colon \Omega\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liniową względem swojego drugiego argumentu. Można też na nią patrzeć jako na funkcję $Df\colon \Omega \to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ określoną na Ω, ale za to przyjmującą wartości w przestrzeni liniowej $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. I to jest właśnie definicja 1-formy (warto zaznaczyć, że nie każda 1-forma jest postaci Df dla pewnego f).

Przypomnijmy też, że definicja drugiej różniczki wykorzystuje ten drugi sposób patrzenia na Df [rozdz. 2.5.2]. Otóż różniczka funkcji Df to $D^2f\colon \Omega \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))$. Pojawiającą się tutaj przestrzeń $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))$ możemy utożsamić z przestrzenią $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ funkcji 2-liniowych. Okazuje się potem, że $D^2f(x)$ jest przekształceniem nie byle jakim, bo *symetrycznym*, 2-formy definiujemy natomiast jako funkcje o wartościach w przekształceniach *antysymetrycznych*. Jak się okaże, ten kontrast odgrywa istotną rolę.

Czołowym przykładem przekształcenia wieloliniowego antysymetrycznego jest wyznacznik. Jeśli wyznacznik rozumiemy jako funkcję określoną nie tyle na macierzach $n\times n$, co na n-tkach wektorów w $\mathbb{R}^n$, to jest to antysymetryczne przekształcenie $\det \in L(\mathbb{R}^n,\ldots,\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, które na dowolnej dodatnio zorientowanej bazie ortonormalnej przyjmuje wartość 1 (jak łatwo zauważyć, orientacja jest tu istotna).

Warto przypomnieć, że orientacja może odgrywać rolę przy całkowaniu. O ile całka Lebesgue'a $\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$ bierze pod uwagę jedynie odcinek $[a,b]$ jako przestrzeń

[1] Odnośniki odwołują się do skryptu Pawła Strzeleckiego z Analizy Matematycznej II

z miarą, to całka Newtona czy Riemanna $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest już czuła na wybór orientacji. Według popularnej konwencji mamy $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, a więc zmiana kolejności a, b zmienia znak całki.

Co zyskujemy? Zyskujemy przede wszystkim zgrabny algebraiczny język, który (po wstępnym oswojeniu) pozwala ujmować wiele problemów w sposób zwięzły, pozwalający na ogólne i geometryczne ujęcie, a jednocześnie ułatwiający konkretne rachunki. Zainteresowanym polecam lekturę eseju Terence'a Tao na ten temat[2], a tutaj podam kilka przykładów:

- Pojęcia gradientu (grad / ∇), dywergencji (div), rotacji (rot / curl) wszystkie da się ująć jako szczególne przypadki operatora różniczki zewnętrznej: $\omega \mapsto d\omega$.
- Znane z fizyki pojęcia pracy siły wzdłuż krzywej oraz strumienia pola przez powierzchnię są szczególnymi przypadkami całkowania formy różniczkowej: $\int_M \omega$.
- Całkowanie przez podstawienie w klasycznej postaci to wzór

  $$\int_U f(\Phi(x))|\det D\Phi|\,\mathrm{d}x = \int_V f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (\text{gdzie } \Phi\colon U \to V),$$

  a w języku form różniczkowych przyjmuje postać $\int_U \Phi^*\omega = \int_V \omega$. Forma ω niejako zawiera w sobie zarówno informację o funkcji podcałkowej f, jak i o mierze, względem której całkujemy.
- Wiele własności można sformułować w zwięzły sposób, co ułatwia operowanie pojęciami. Przykładowo:

  $$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta), \qquad d(f^*\omega) = f^*(d\omega), \qquad d(d\omega) = 0,$$

  oraz wspomniane wcześniej równości $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$, $\int_U \Phi^*\omega = \int_V \omega$.
- (dla osób zainteresowanych geometrią różniczkową) Operowanie na formach różniczkowych (całkowanie, różniczkowanie...) jest możliwe na abstrakcyjnych *rozmaitościach gładkich* w odróżnieniu od pojęć typu dywergencja, które wymagają tzw. *metryki Riemannowskiej* na rozpatrywanej rozmaitości.

[2] Terence Tao, Differential forms and integration

9 Formy różniczkowe – wstęp

Na początek będziemy 1-formy traktować jako *formalne napisy*

$$\omega = f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n,$$

i całkować po krzywej Γ (parametryzowanej przez $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$) zgodnie ze wzorem

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \left(f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \ldots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)\right)\, \mathrm{d}t.$$

Dla 1-form w dwóch wymiarach twierdzenie Greena mówi wówczas, że (przy stosownych założeniach)

$$\int_{\partial\Omega} f dx + g dy = \int_\Omega (-\partial_y f + \partial_x g)\, \mathrm{d}\lambda_2.$$

Zadanie 9.1. Praca wykonana przez siłę $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wzdłuż zorientowanej krzywej $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ jest zdefiniowana jako całka

$$\int_\Gamma F(p) \cdot \vec{T}(p)\, \mathrm{d}l(p),$$

w której $\vec{T}(p)$ jest jednostkowym wektorem stycznym do Γ (wskazującym zgodnie z orientacją). Załóżmy teraz, że siła F jest potencjalna, to znaczy $F(p) = \nabla E(p)$ dla pewnej funkcji skalarnej E. Wykazać, że wówczas praca F wzdłuż dowolnej zamkniętej krzywej jest zerowa.

Zadanie 9.2. Sprawdzić, że pole grawitacyjne $F(x) = -\frac{x}{|x|^3}$ jest potencjalne. Wykazać, że potencjalne jest również każde inne pole centralne, czyli zadane wzorem $F(x) = f(|x|)x$.

Zadanie 9.3. Dana jest krzywa zorientowana $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, a dla każdego punktu $p \in \Gamma$ dany jest jednostkowy dodatnio zorientowany wektor styczny $\vec{T}(p) \in T_p\Gamma$. Przekonać się, że między całką z 1-formy a całką powierzchniową zachodzi następująca równość:

$$\int_\Gamma f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n = \int_\Gamma \left\langle \vec{f}, \vec{T} \right\rangle\, \mathrm{d}l_\Gamma(p),$$

gdzie $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$.

Uwaga. Już niedługo przez 1-formę będziemy rozumieli funkcję o wartościach w $(\mathbb{R}^n)^*$. Wówczas powyższa równość przyjmuje postać $\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \omega(p)(\vec{T}(p))\, \mathrm{d}l_\Gamma(p)$.

Zadanie 9.4. Obliczyć całkę z 1-formy $\omega = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ po (dodatnio zorientowanym) okręgu jednostkowym.

Zadanie 9.5. Obliczyć całkę z formy $\frac{y^2dx-2xydy}{x^2+y^4}$ wzdłuż półokręgu $x^2+y^2=1$, $y \geqslant 0$, o początku $(1,0)$ i końcu $(-1,0)$.

Zadanie 9.6. Wykazać, że jeśli Ω jest ograniczonym obszarem klasy C^1, to

$$\int_{\partial\Omega} xdy = -\int_{\partial\Omega} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} xdy - ydx = \lambda_2(\Omega).$$

Zadanie 9.7. Sprawdzić, że forma $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ zapisana w postaci $f(x,y)dx+g(x,y)dy$ spełnia $-\partial_y f+\partial_x g = 0$ w $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Wykazać, że nie istnieje forma $\eta = f(x,y)dx+g(x,y)dy$ spełniająca ten warunek w $\mathbb{R}^2$ i różniąca się od ω jedynie na pewnym otoczeniu zera.

Zadanie 9.8. Czy forma $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ z poprzedniego zadania daje się zapisać w postaci $\partial_x h(x,y)dx + \partial_y h(x,y)dy$ dla pewnej funkcji $h\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$? Czy jest to możliwe na mniejszym zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$?

Zadanie 9.9. Załóżmy, że forma $\omega = f(x,y)dx+g(x,y)dy$ klasy C^1 jest określona na kuli jednostkowej i spełnia warunek $\partial_y f = \partial_x g$. Wykazać, że $\omega = \partial_x h(x,y)dx+\partial_y h(x,y)dy$ dla funkcji h określonej wzorem

$$h(x,y) = \int_{[(0,0),(x,y)]} \omega = \int_0^1 f(tx,ty)x + g(tx,ty)y \,\mathrm{d}t.$$

Wskazówka. Przedstawić $\partial_x h$ w postaci $\int_0^1 \partial_t(f(tx,ty)t)\,\mathrm{d}t$.

Uwaga. Na wykładzie poznamy dużo bardziej ogólny lemat Poincaré'go, zgodnie z którym na obszarze gwiaździstym każda forma zamknięta jest dokładna (sens tych słów poznamy w odpowiednim czasie).

Zadanie 9.10. Dla ograniczonego obszaru $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ klasy C^1 oraz pola wektorowego $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ wyprowadzić twierdzenie o dywergencji

$$\int_{\partial\Omega} F(p)\cdot\vec{n}(p)\,\mathrm{d}l(p) = \int_\Omega \operatorname{div} F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tutaj $\operatorname{div} F = \partial_1 F^1 + \partial_2 F^2$ to dywergencja, a $\vec{n}(p)$ to jednostkowy wektor prostopadły do $\partial\Omega$, skierowany na zewnątrz.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 9.3.

Zadanie 9.11. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą

$$\gamma(t) = (a\cos^3(t), a\sin^3(t)) \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

dla zadanego $a > 0$.

Zadanie 9.12. ★ (wstęp do Funkcji Analitycznych) Niech $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją zespoloną, przedstawioną jako kombinacja $f = u + iv$ funkcji rzeczywistych. Zdefiniujmy całkę zespoloną po krzywej $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ wzorem

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &:= \int_\Gamma (u(z) + iv(z))(dx + idy)\\ &= \int_\Gamma u(z)dx - v(z)dy + i\int_\Gamma u(z)dy + v(z)dx.\end{aligned}$$

(a) Przekonać się, dla jeśli $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jest ograniczonym obszarem klasy C^1 oraz $f \in C^1$, to

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = \int_\Omega (-\partial_y u - \partial_x v) + i(\partial_x u - \partial_y v)\, \mathrm{d}\lambda_2.$$

(b) Sprawdzić, że pochodna zespolona $f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ (w której h jest parametrem zespolonym) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różniczkowalna w z (w zwyczajnym sensie) oraz spełnia równania Cauchy'ego–Riemanna:

$$\partial_x u(z) = \partial_y v(z), \qquad \partial_y u(z) = -\partial_x v(z).$$

(c) Wywnioskować, że jeśli f jest wszędzie różniczkowalna w sensie zespolonym oraz $f \in C^1$, to całka zespolona $\int_\Gamma f(z)dz$ po dowolnej krzywej zamkniętej $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ jest zerowa.

10 O formach różniczkowych – dygresja algebraiczna

O co chodzi? Do opisu form różniczkowych można użyć bardziej algebraicznego języka. Pozwala to zauważyć, że w przyjętych definicjach nie ma nic arbitralnego (zależności od wyboru bazy etc.). Oczywiście ceną jest większa abstrakcja.

Na potrzeby niniejszej dygresji będziemy rozważać skończenie wymiarowe przestrzenie nad $\mathbb{R}$, choć oczywiście można przyjąć większą ogólność. Przekształcenia k-liniowe antysymetryczne (niekoniecznie o wartościach w $\mathbb{R}$) będziemy nazywać przekształceniami k-alternującymi. Użyjemy oznaczenia $\mathrm{Hom}(U, V)$ na przestrzeń przekształceń liniowych $U \to V$ oraz $\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{alt}}(U, V)$ na przestrzeń przekształceń k-alternujących $U^k \to V$. Jako dalszą lekturę polecam *Algebra: Chapter 0* P. Aluffiego, zwłaszcza rozdziały 2 i 4 w części VIII.

Potęga zewnętrzna. Dla przestrzeni U oraz liczby $k \geqslant 0$ definiujemy potęgę zewnętrzną $\Lambda^k U$ jako przestrzeń liniową wraz z przekształceniem k-alternującym $U^k \xrightarrow{\wedge} \Lambda^k U$ o następującej własności uniwersalnej: jeśli $T\colon U^k \to V$ jest przekształceniem k-alternującym, to istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\overline{T}\colon \Lambda^k U \to V$ spełniające równość $T = \overline{T} \circ \wedge$, czyli

$$T(u_1, \ldots, u_k) = \overline{T}(u_1 \wedge \ldots \wedge u_k) \text{ dla } u_1, \ldots, u_k \in U.$$

$$\begin{tikzcd} U^k \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\wedge"'] & V \\ \Lambda^k U \arrow[ur, "\exists! \overline{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Obraz k-tki $(u_1, \ldots, u_k)$ przy przekształceniu $\wedge$ oznaczamy tu przez $u_1 \wedge \ldots \wedge u_k$.

Jest to *definicja*, ale nie *konstrukcja*. Można z niej łatwo wywnioskować, że istnieje tylko jedna taka para w tym sensie, że jeśli są dwie $U^k \xrightarrow{\wedge_i} \Lambda_i^k U$ $(i = 1, 2)$, to istnieją izomorfizmy liniowe $\Lambda_i^k U \xrightarrow{f_{ij}} \Lambda_j^k U$ spełniające $f_{ij} \circ \wedge_i = \wedge_j$. Dlatego będziemy uważali potęgę zewnętrzną za obiekt jednoznacznie wyznaczony.

Nie jest natomiast oczywiste, czy taka para istnieje. Można się jednak przekonać, że jeśli wybierzemy bazę $e_1, \ldots, e_n$ przestrzeni U, to za $\Lambda^k U$ można przyjąć dowolną przestrzeń $\binom{n}{k}$-wymiarową W wraz z przekształceniem k-alternującym $U^k \to W$, dla którego obrazy k-tek $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n)$ stanowią bazę W.

Przekształcenia alternujące Jest jasne, że każdemu elementowi $S \in \mathrm{Hom}(\Lambda^k U, V)$ (czyli przekształceniu liniowemu) można przyporządkować element $T \in \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{alt}}(U, V)$ (czyli przekształcenie alternujące) wzorem $T := S \circ \wedge$. Takie przyporządkowanie oczywiście jest liniowe. Definicja potęgi zewnętrznej stwierdza, że jest to bijekcja, określiliśmy więc izomorfizm liniowy

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^k U, V) \cong \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{alt}}(U, V). \tag{$\star$}$$

Oznacza to, że przekształcenia alternujące z U^k można reprezentować jako przekształcenia *liniowe* z $\Lambda^k U$.

Iloczyn zewnętrzny. Rozważmy teraz przekształcenie Ψ zadane jako przekształcenie $\wedge \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{alt}}_{k+l}(U, \Lambda^{k+1}U)$ z *opóźnioną ewaluacją*:

$$\Psi \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{alt}}_k(U, \mathrm{Hom}^{\mathrm{alt}}_l(U, \Lambda^{k+l}U)),$$
$$\Psi(u_1, \ldots, u_k)(u_{k+1}, \ldots, u_{k+l}) := u_1 \wedge \ldots \wedge u_k \wedge u_{k+1} \wedge \ldots \wedge u_{k+l}.$$

Stosując izomorfizm ($\star$) dwukrotnie, otrzymujemy stąd element

$$\overline{\Psi} \in \mathrm{Hom}(\Lambda^k U, \mathrm{Hom}(\Lambda^l U, \Lambda^{k+l}U)).$$

Z powrotem dokonując wcześniejszej ewaluacji, określamy przekształcenie dwuliniowe

$$\Lambda^k U \times \Lambda^l U \to \Lambda^{k+l}U;$$

jest to właśnie iloczyn zewnętrzny oznaczany znowu symbolem $\wedge$. Innymi słowy, dla dwóch elementów $\alpha \in \Lambda^k U$, $\beta \in \Lambda^l U$ określiliśmy element $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}U$. Jego definicję można streścić następująco: jest to jedyne przekształcenie dwuliniowe, dla którego zachodzi tożsamość

$$(u_1 \wedge \ldots \wedge u_k) \wedge (u_{k+1} \wedge \ldots \wedge u_{k+l}) = u_1 \wedge \ldots \wedge u_k \wedge u_{k+1} \wedge \ldots \wedge u_{k+l}$$

Porównanie z pojęciami z zajęć. Główna różnica między pojęciami przedstawionymi tutaj a tymi na zajęciach jest następująca: otóż na potrzeby zajęć przyjmujemy, że $\Lambda^k U^*$ jest przestrzenią przekształceń k-alternujących $U^k \to \mathbb{R}$, czyli przestrzenią $\mathrm{Hom}^{\mathrm{alt}}_k(U, \mathbb{R})$ (oczywiście stosujemy to w przypadku $U = \mathbb{R}^n$). Wskażemy teraz izomorfizm między tymi przestrzeniami.
W tym celu określmy przekształcenie

$$\Phi \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{alt}}_k(U^*, \mathrm{Hom}^{\mathrm{alt}}_k(U, \mathbb{R})), \quad \Phi(u_1^*, \ldots, u_k^*)(u_1, \ldots, u_k) := \det(\langle u_i^*, u_j \rangle)_{ij}.$$

Jako argument przyjmuje ono k elementów U^* i zwraca przekształcenie k-alternujące $U^k \to \mathbb{R}$ zadane powyższym wzorem (dla zadanej k-tki elementów U jest to wyznacznik macierzy $k \times k$ złożonej z ewaluacji elementów U^* na elementach U).
Zgodnie z definicją mamy teraz indukowane przekształcenie liniowe

$$\Lambda^k U^* \xrightarrow{\overline{\Phi}} \mathrm{Hom}^{\mathrm{alt}}_k(U, \mathbb{R})$$

i można sprawdzić, że jest to izomorfizm. Skądinąd przekonaliśmy się wcześniej, że $\mathrm{Hom}^{\mathrm{alt}}_k(U, \mathbb{R})$ jest izomorficzne z $\mathrm{Hom}(\Lambda^k U, \mathbb{R})$, a to z kolei jest tożsame z $\left(\Lambda^k U\right)^*$ na mocy definicji, więc otrzymany izomorfizm można podsumować w postaci

$$\left(\Lambda^k U\right)^* \cong \Lambda^k U^*.$$

Łatwo się też przekonać, że $\overline{\Phi}$ jest tym samym utożsamieniem, którego użyliśmy na zajęciach. Otóż jeśli $e_1, \ldots, e_n$ jest wybraną bazą U, a $dx_1, \ldots, dx_n$ jest bazą dualną, to przekształcenie k-alternujące odpowiadające $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ jest dane wzorem

$$\overline{\Phi}(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})(u_1, \ldots, u_k) = \det(\langle dx_{i_s}, u_j \rangle)_{sj} = \det(u_j^{i_s})_{sj},$$

a więc jest dokładnie wyznacznikiem z macierzy, która ma w kolumnach wektory $u_1, \ldots, u_k$, ale w której wybrano jedynie wiersze odpowiadające indeksom $i_1, \ldots, i_k$. Inaczej mówiąc, jest to jedyny element $\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{alt}}(U, \mathbb{R})$, który przyjmuje wartość 1 na k-tce $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ (przy założeniu, że i_j się nie powtarzają) oraz wartość 0 na wszystkich istotnie różnych k-tkach tej postaci.

11 Formy różniczkowe – algebra wieloliniowa

Definicje. Oznaczamy

$$\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* := \{\omega\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R} \quad k\text{-liniowe antysymetryczne}\},$$
$$\Omega^k(V) := \{\omega\colon V \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \quad \text{gładkie}\} \qquad (k\text{-formy na } V \subseteq \mathbb{R}^n).$$

Bazą przestrzeni $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ są elementy $dx_I(v_1, \ldots, v_k) = \det(v_j^{i_s})_{sj}$ wyznaczone przez k-elementowe zbiory indeksów $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ (brane w kolejności rosnącej). Iloczyn zewnętrzny $\wedge$ jest działaniem łącznym, a w przypadku 1-form antysymetrycznym, i spełnia $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = dx_I$ (przy oznaczeniach j.w.).
Różniczka zewnętrzna spełnia tożsamość

$$d\Big(\sum_I f_I dx_I\Big) = \sum_I df_I \wedge dx_I, \text{ gdzie } df = \partial_1 f dx_1 + \ldots + \partial_n f dx_n \text{ jest różniczką } f.$$

Przeciągnięcie k-formy różniczkowej za pomocą funkcji $g = (g_1, \ldots, g_n)$ to

$$g^*\Big(\sum_I f_I dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\Big) = \sum_I f_I \circ g\, dg_{i_1} \wedge \ldots \wedge dg_{i_k}.$$

Zadanie 11.1. Dane jest przekształcenie dwuliniowe antysymetryczne $\omega\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (czyli element $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)^*$) i wiadomo o nim, że $\omega((2,1),(1,2)) = 6$. Wyznaczyć wartości $\omega((2,1),(3,3))$ oraz $\omega((1,0),(0,1))$.

Zadanie 11.2. Dana jest 2-forma $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$, o której wiadomo, że

$$\omega(e_1, e_2) = 1, \quad \omega(e_1, e_3) = 2, \quad \omega(e_2, e_3) = 3.$$

Wyznaczyć $\omega((0,1,2),(1,3,0))$.

Zadanie 11.3. Niech $\eta\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie iloczynem wektorowym: $\eta(u,v) = u \times v$.

(a) Wykazać, że $\eta = (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)$.

(b) Niech $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie gładkim polem wektorowym oraz $\eta_F(x)(u,v) := \langle F(x), u \times v\rangle$. Wyrazić η_F w bazie $dx \wedge dy$, $dx \wedge dz$, $dy \wedge dz$.

Zadanie 11.4. Obliczyć iloczyny zewnętrzne

(a) $(xdy + ydz + zdx) \wedge (dx + dy + dz)$

(b) $(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \wedge (dx + dy + dz)$

Zadanie 11.5. Obliczyć $\omega \wedge \omega$, jeśli $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$.
Uwaga. Ten przykład pokazuje, że $\omega \wedge \omega$ wcale nie musi być zerem.

Zadanie 11.6. Niech $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$ będzie formą z poprzedniego zadania. Wykazać, że każdą formę $\beta \in \Lambda^3(\mathbb{R}^4)^*$ da się zapisać w postaci $\alpha \wedge \omega$ dla dokładnie jednej formy $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{R}^4)^*$.
Uwaga. Jest to szczególny przypadek Zadania 11.13.

Zadanie 11.7. Obliczyć:

(a) $xd(\sin(x^2y)) + yd(\cos(xy^2))$

(b) $e^{-x-y+z}d(e^{x+y+z})$

(c) $d(x_1x_3\, dx_3 \wedge dx_4)$

(d) $d\left(\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\right)$

Zadanie 11.8. Obliczyć przeciągnięcie elementu $dy_2 \wedge dy_1 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ za pomocą przekształcenia liniowego $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadanego macierzą (w bazie standardowej)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 11.9. Obliczyć przeciągnięcie formy $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ za pomocą odwzorowania $\Phi(t) = (\cos t, \sin t)$.

Zadanie 11.10. Obliczyć przeciągnięcie formy $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ za pomocą odwzorowania $\Phi(u, v) = (uv, u^2, 3u + v)$. Czy wynik jest zaskakujący?

Zadanie 11.11. Obliczyć cofnięcie formy $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ za pomocą odwzorowania

$$\Phi(r, \alpha, \beta) = (r \cos \alpha \cos \beta, r \sin \alpha \cos \beta, r \sin \beta)$$

(czyli dyfeomorfizmu sferycznego).

Zadanie 11.12. Dana jest 2 forma $\omega(\vec{x}) = x\, dy \wedge dz - z\, dx \wedge dy$ oraz pole wektorowe $F(x, y, z) = (z, x, y)$. Wyznaczyć współczynniki 1-formy $\eta(\vec{x})(v) = \omega(\vec{x})(F(\vec{x}), v)$ w standardowej bazie dx, dy, dz.

Zadanie 11.13. ★ (szczególny przypadek lematu Lefschetza) Niech $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})^*$ będzie formą

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + \ldots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

Wykazać, że

$$\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^{2n})^* \ni \eta \longmapsto \eta \wedge \omega \in \Lambda^{n+1}(\mathbb{R}^{2n})^*$$

jest izomorfizmem liniowym.

12 Formy różniczkowe – całkowanie

Co trzeba wiedzieć:

(a) Całkę z n-formy po otwartym obszarze $U \subseteq \mathbb{R}^n$ definiuje się wzorem

$$\int_U f\, dx_1 \wedge \ldots dx_n := \int_U f \,\mathrm{d}\lambda_n.$$

(b) Całka z k-formy ω po k-wymiarowej rozmaitości M spełnia

$$\int_{\Phi(N)} \omega = \int_N \Phi^* \omega$$

dla dowolnego gładkiego przekształcenia $\Phi \colon N \to M$ zgodnego z orientacją (w szczególności może to być parametryzacja).

Zadanie 12.1. Obliczyć całkę z formy $\omega = \frac{xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ po dodatnio zorientowanej sferze jednostkowej $\mathbb{S}^2$. Czy forma ta jest zamknięta? Czy jest dokładna?

Zadanie 12.2. Dana jest 2-forma ω oraz powierzchnia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zadane wzorami

$$\omega = -2xdy \wedge dz + 2dz \wedge dx + zdx \wedge dy, \qquad S = \{y = x^2 + z^2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\},$$

przy czym orientację S przyjmujemy w taki sposób, by wektor $\vec{n} = (x, 0, z)$ był „zewnętrzny". Wyznaczyć całkę $\int_S \omega$:

(a) bezpośrednio, przy użyciu wybranej parametryzacji S;

(b) stosując twierdzenia Stokesa dla obszaru $\Omega = \{y \geqslant x^2 + y^2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Zadanie 12.3. Dana jest półsfera $S^+ = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$ oraz pole wektorowe $F(x, y, z) = (x + z, x - y, 0)$.

(a) Obliczyć $\int_{S^+} F \cdot \vec{n}$.

(b) Obliczyć $\int_{\mathbb{S}^+} \omega$ dla formy $\omega = i_F(dx \wedge dy \wedge dz)$, czyli formy zadanej wzorem $\omega_p(v_1, v_2) = (dx \wedge dy \wedge dz)(F(p), v_1, v_2)$.

Zadanie 12.4. (prawo Archimedesa) Ciało A jest zanurzone w cieczy, której powierzchnia pokrywa się z płaszczyzną $z = 0$. Ciśnienie w punkcie (x, y, z) jest proporcjonalne do głębokości, a więc wynosi $-cz$. W konsekwencji łączna siła wyporu działająca na ciało A to

$$\vec{F} = \int_{\partial A} (-cz) \cdot (-\vec{n}(x, y, z)) \, \mathrm{d}l_{\partial A}(x, y, z)$$

(siła jest skierowana do wewnątrz A, stąd minus przy $\vec{n}(x, y, z)$). Wykazać, że $\vec{F} = (0, 0, c|A|)$.

Zadanie 12.5. Przekonać się, że całka z k-formy ω po k-wymiarowej podrozmaitości $M \subseteq \mathbb{R}^n$ spełnia równość

$$\int_M \omega = \int_M \omega_x(v_1(x), \ldots, v_k(x)) \, \mathrm{d}l_M(x),$$

gdzie funkcje $v_1, \ldots, v_n \colon M \to \mathbb{R}^n$ w każdym punkcie $x \in M$ zadają dodatnio zorientowaną bazę ortonormalną $T_x M$ (należy dopuścić, że są one jedynie kawałkami ciągłe).

Uwaga. Zadanie to stanowi ogólnienie Zadania 9.3 i pokazuje, że całkę z formy można zdefiniować w sposób nieopierający się na wyborze parametryzacji.

Zadanie 12.6. (forma objętości) Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie $(n-1)$-wymiarową podrozmaitością zorientowaną i oznaczmy przez $\vec{n}$ dodatnio zorientowane pole normalne na M (dowolnie przedłużone na $\mathbb{R}^n$, jeśli jest taka potrzeba). Niech $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ będzie formą określoną wzorem

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_{n-1}) := \det(\vec{n}(x), v_1, \ldots, v_{n-1}) \quad \text{dla } x \in M,\ v_1, \ldots, v_{n-1} \in T_x M.$$

Przekonać się, że dla dowolnej (odpowiednio regularnej) funkcji f zachodzi

$$\int_M f\omega = \int_M f(x) \, \mathrm{d}l_M(x).$$

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 12.5.

Uwaga. Warunek dodatniej orientacji oznacza, że każdego $x \in M$ zachodzi $\vec{n}(x) \in T_x^{\perp} M$, $|\vec{n}(x)| = 1$, a jeśli $v_1, \ldots, v_{n-1}$ jest dodatnio zorientowaną bazą $T_x M$, to $\vec{n}(x), v_1, \ldots, v_{n-1}$ jest dodatnio zorientowaną bazą $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 12.7. Dowieść, że $dd\omega = 0$ dla dowolnej 1-formy $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, na dwa sposoby:

(a) przez bezpośredni rachunek;

(b) jako wniosek z obserwacji, że $\partial\partial\Omega = \emptyset$ dla dowolnego gładkiego obszaru $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Zadanie 12.8. (twierdzenie Brouwera o retrakcji) Niech $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ będzie 2-formą o niezerowej całce $\int_{\mathbb{S}^2} \omega$ (np. formą objętości z Zadania 12.6). Przypuśćmy, że istnieje gładka funkcja $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^2$ spełniająca $u(x) = x$ dla $x \in \mathbb{S}^2$.

(a) Uzasadnić, że $\int_{\mathbb{S}^2} u^*\omega \neq 0$.

(b) Uzasadnić, że $d(u^*\omega) = 0$.

(c) Wywnioskować sprzeczność z założeniem istnienia u i wyprowadzić stąd klasyczne twierdzenie Brouwera.

13 Praca domowa dla chętnych

Zasady rozwiązywania. Rozwiązania zadań należy oddać na piśmie podczas zajęć **13 czerwca**. Praca domowa jest nieobowiązkowa – stanowi jeszcze jeden sposób dla chętnych, by uzupełnić punkty za pracę na ćwiczeniach.

Zadanie 13.1. Obliczyć całkę

$$\int_D (x^2 + y)dx + (x - y)dy,$$

gdzie D to łuk paraboli $x = y^2$ zorientowany od punktu $(1, 1)$ do $(1, -1)$.

Zadanie 13.2. O formie $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ wiadomo, że $d\omega = 0$ oraz $\int_{\mathbb{S}^1} \omega = 0$. Wykazać, że ω jest dokładna, czyli $\omega = df$ dla pewnej funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

Wskazówka. Wykazać, że istnieją takie funkcje f_+, f_- na mniejszych obszarach

$$A_\pm = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0,\ \pm y > 0\}.$$

Jak je połączyć w jedną funkcję?