

# AM II.1, semestr zimowy 2024/25

Michał Strzelecki · michalst@mimuw.edu.pl · 20 grudnia 2024

**O tym pliku.** Plik jest w budowie i będzie się powiększał w trakcie semestru. Będę się starał udostępniać w miarę kompletne rozdziały, ale numeracja zadań i ich treści mogą się zmienić. Mogą się pojawiać rozmaite błędy – *będę wdzięczny za informacje o wszystkich.*

Każdy z rozdziałów jest podzielony na dwie części. Pierwsza część zawiera zadania, które planuję omawiać podczas zajęć, a także hasłowy skrót najważniejszych treści teoretycznych. Można to przejrzeć przed zajęciami (np. żeby zorientować się, jaką tematykę będziemy poruszać i co należy powtórzyć z wykładu), ale raczej nie warto rozwiązywać zadań z części pierwszej w domu przed zajęciami. Zadania oznaczone pełną kropką (●) omówimy prawie na pewno na ćwiczeniach.

Druga część rozdziału to zadania, z których większości – z różnych powodów – nie będziemy omawiać na zajęciach (np. bo omówimy inne podobne, bo są za łatwe, bo są za trudne, bo są za mało na temat, bo będą zadane w pracy domowej, bo są pomyślane jako zadania do pracy własnej). Te zadania można wykorzystać jako zadania treningowe lub uzupełniające (ale nie twierdę, że warto lub należy zrobić wszystkie).

**O przedmiocie.** AM 2 będzie trochę innym przedmiotem niż AM 1. Będziemy pracować z funkcjami  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ . W wielu wymiarach będzie trudniej korzystać z geometrycznych intuicji (bo będzie trudniej wyobrazić sobie lub narysować na komputerze wykres funkcji). Niektóre fakty, które były praktycznie oczywiste dla funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tu będą wymagały bardziej uważnych, skomplikowanych lub technicznych dowodów. Niektóre pojęcia będą dość abstrakcyjne. Ze względu na charakter materiału same ćwiczenia też pewnie będą wyglądały trochę inaczej niż na pierwszym roku.

Wiele osób zniechęca się przez „znaczkologię” – faktycznie, czasami będzie trochę indeksów, bo funkcja będzie brała wektor o  $k$  współrzędnych i zwracała wektor o  $l$  współrzędnych, a zamiast pochodnej funkcji w punkcie (czyli liczby) będziemy mieli przekształcenie liniowe (macierz). (A jeśli byśmy mieli ciąg funkcji i/lub ich pochodnych wzięty w jakimś ciągu punktów i zaczęli wybierać podciągi zbieżne, to ...). Wielka prośba: proszę nie dać się zniechęcić, zmylić i zgubić! Za większością pojęć, twierdzeń i rozumowań nadal będą stały konkretne geometryczne lub analityczne pomysły. Poznamy różne *bardzo ważne* fakty, *bardzo piękne* twierdzenia i *bardzo mocne* teorie.

**Wymagania wstępne** Oczywiście będzie potrzebne rozsądne ogarnięcie w tematyce AM 1 (funkcje jednej zmiennej), ale zakładam, że z tym nie powinno być problemów.

Po drugie, jeśli ktoś przez wakacje zupełnie zapomniał o GALu, to dobrze nabyłoby przypomnieć sobie, że macierze zadają przekształcenia liniowe, jak się mnoży macierze (i kiedy można to robić) i jak się mnoży macierz przez wektor, a w dalszej kolejności, że były takie rzeczy jak iloczyn skalarny, macierze symetryczne, formy kwadratowe, oraz że wyznacznik ma coś wspólnego ze zmianą objętości.

Wreszcie, będzie praktycznie od razu potrzebne trochę topologii (zbiory otwarte i domknięte [w przestrzeni  $\mathbb{R}^k$ ], ich własności), więc proszę skupić się na szybkim ogarnięciu podstawowych definicji, które pojawiają się na wykładzie z AM 2, oraz uważać zajęciach z topologii.

# Spis treści

<b>1. Normy, granice, ciągłość</b>	<b>4</b>
Materiał do omówienia na zajęciach [3–4 ćw.] . . . . .	4
Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe . . . . .	7
<b>2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność</b>	<b>13</b>
Materiał do omówienia na zajęciach [4+ ćw. (??)] . . . . .	13
Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe . . . . .	16
<b>3. Pochodne wyższych rzędów</b>	<b>25</b>
Materiał do omówienia na zajęciach [3+ ćw. (?)] . . . . .	25
Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe . . . . .	26
<b>4. Teoria lokalna odwzorowań klasy <math>C^1</math></b>	<b>34</b>
Materiał do omówienia na zajęciach [3–4 ćw. (?)] . . . . .	34
Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe . . . . .	35
<b>A. Teoria miary</b>	<b>40</b>
Materiał do omówienia na zajęciach [4+ ćw. (?)] . . . . .	40
Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe . . . . .	43
<b>B. Całki</b>	<b>51</b>
Materiał do omówienia na zajęciach . . . . .	51
Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe . . . . .	55

# 1. Normy, granice, ciągłość

## Materiał do omówienia na zajęciach [3–4 ćw.]

*Teoria* (dèjà vu). Przestrzeń liniowa  $\mathbb{R}^k$ . Wiemy, że:

- $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$  to punkty/wektory,
- $x \cdot y = \langle x, y \rangle = xy^T = \sum_{j=1}^k x_j y_j$  to iloczyn skalarny,
- $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = (\sum_{j=1}^k x_j^2)^{1/2}$  to norma euklidesowa (odległość od zera),
- $\|x - y\|_2$  to odległość punktów  $x, y$  (spełnia aksjomaty przestrzeni metrycznej),
- zachodzi nierówność Cauchy'ego–Schwarza:  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$ .

*Teoria* (dèjà vu). Definicja normy [na przestrzeni liniowej].

- **1.1** (norma w  $\ell_p^k$ ). Dla  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$  oraz  $p \in [1, \infty)$  kładziemy

$$\|x\|_p := \left( \sum_{j=1}^k |x_j|^p \right)^{1/p}.$$

- Co kładziemy dla  $p = \infty$ ?
- Uświadomić sobie, że  $\|\cdot\|_p$  jest normą na  $\mathbb{R}^k$  dla  $p \in \{1, 2, \infty\}$ .
- Dla  $k = 2, p \in \{1, 2, \infty\}$  naszkicować domknięte kule jednostkowe

$$\{x \in \mathbb{R}^k : \|x\|_p \leq 1\}.$$

Naszkicować lub słownie opisać te kule również dla  $k = 3, p \in \{1, 2, \infty\}$ .

d) Uzasadnić, że  $\|x\|_p \geq \|x\|_q$  dla  $1 \leq p \leq q \leq \infty, x \in \mathbb{R}^k$ . Zrozumieć, co znaczy ta nierówność w terminach kul jednostkowych.

e) Wykazać, że  $\|\cdot\|_p$  jest normą na  $\mathbb{R}^k$  dla każdego  $p \in [1, \infty]$ .

- **1.2** (uzupełnienie wiedzy podwórkowej). a) Załóżmy, że  $p, q \in (1, \infty)$  spełniają  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Wykazać, że dla  $x, y \in \mathbb{R}^k$  zachodzi nierówność Höldera:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

*Wskazówki.* Dowodów jest wiele. Można udowodnić najpierw nierówność Younga:  $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$  ( $a, b \geq 0$ ) korzystając z wypukłości odpowiedniej funkcji. Alternatywnie można najpierw udowodnić nierówność Höldera dla  $p, q \in \mathbb{Q}, \frac{1}{p} = \frac{n}{n+m}, \frac{1}{q} = \frac{m}{n+m}$ .

- Uzasadnić, że tak naprawdę zachodzi też  $\|x\|_p = \sup\{\langle x, y \rangle : \|y\|_q \leq 1, y \in \mathbb{R}^k\}$ .
- Uświadomić sobie, że wszystko działa też dla  $p, q \in [1, \infty]$ .

1. Normy, granice, ciągłość

- **1.3.** Dana jest pewna norma  $\|\cdot\|$  na  $\mathbb{R}^k$ . Sprawdzić, że domknięta kula jednostkowa  $B = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leq 1\}$  jest zbiorem wypukłym i symetrycznym (względem 0, tzn.  $B = -B$ ). Uzasadnić, że dla każdej prostej  $L \subset \mathbb{R}^k$  przechodzącej przez  $0 \in \mathbb{R}^k$  zbiór  $B \cap L$  jest odcinkiem skończonej [euklidesowej] długości.
- **1.4.** Dany jest zbiór  $K \subset \mathbb{R}^k$ , który jest wypukły, zwarty (tzn. – w przypadku  $\mathbb{R}^k$  – domknięty i ograniczony), ma niepusty wewnątrz, i jest symetryczny ( $K = -K$ ). Dla  $x \in \mathbb{R}^k$  definiujemy

$$\|x\|_K = \inf\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in K\}.$$

- a) Wykonać rysunek poglądowy.
- b) Wykazać, że  $\|\cdot\|_K$  jest normą, zaś  $K$  domkniętą kulą jednostkową w tej normie.

\*\*\*

*Teoria* (łatwe i naturalne). Definicja zbieżności ciągu punktów w  $\mathbb{R}^k$  (w normie [euklidesowej]); zbieżność współrzędnych.

*Komentarz.* Odtąd będziemy na ogół pracować ze standardową normą euklidesową  $\|\cdot\|_2$  w  $\mathbb{R}^k$ , ale gdybyśmy wybrali inną normę, to we wprowadzanych pojęciach zbieżności, ciągłości, otwartości itp. niewiele by się zmieniło, bo okazuje się, że na przestrzeni  $\mathbb{R}^k$  wszystkie normy są równoważne (patrz zadanie 1.10 poniżej).

*Teoria* (déjà vu). Definicja granicy funkcji w punkcie (mamy  $A \subset \mathbb{R}^k$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , oraz punkt  $p \in \mathbb{R}^k$ , który jest punktem skupienia zbioru  $A$ ).

- **1.5.** Obliczyć poniższe granice lub wykazać, że nie istnieją:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}, & \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + xy + y^2}, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^4)}{\exp(x^2 + y^4) - 1}, & \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^{7/5} y^3}{x^2 + 4y^6}. \end{aligned}$$

- **1.6.** Funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ma tę własność, że dla każdej prostej  $L \subset \mathbb{R}^2$  przechodzącej przez  $(0,0)$  zachodzi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), (x,y) \in L} f(x,y) = 0$$

(po obcięciu  $f$  do prostej  $L$  granica w punkcie  $(0,0)$  istnieje i jest równa 0). Rozstrzygnąć, czy wynika z tego, że istnieje granica  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ .

- **1.7.** a) Podać przykład możliwie najprostszej funkcji  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , która spełnia wszystkie poniższe warunki:

- dla każdego  $y \in \mathbb{R}$  istnieje skończona granica  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$ ,
- dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  istnieje skończona granica  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$ ,
- istnieją skończone granice iterowane

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right)$$

(i są równe),

## 1. Normy, granice, ciągłość

- granica  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  nie istnieje.
- b) Funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest zadana wzorem

$$f(x,y) = (x^2 + y^2) \cdot \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x, y \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Uświadomić sobie, że  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ , ale nie istnieje granica iterowana  $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y))$ .

c) Załóżmy, że dla funkcji  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zachodzi  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ , a ponadto dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  istnieje skończona granica  $g(x) := \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$ . Czy jest prawdą, że  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ?

*Teoria* (déjà vu). Mamy  $A \subset \mathbb{R}^k$  (dowolny),  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^l$ . Definicja ciągłości funkcji (ciągowa i epsilonowo-deltowa (w punkcie  $p \in A$ , na całym  $A$ )).

*Uwaga* (istotna). Mamy  $A \subset \mathbb{R}^k$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^l$ . Twierdzeniem z wykładu jest, że wtedy powyższa definicja funkcji ciągłej  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^l$  jest zgodna z ogólną definicją z wykładu topologii<sup>1</sup> – w zbiorze  $A$  rozpatrujemy naturalną topologię indukowaną z całej przestrzeni  $\mathbb{R}^k$ , tj. zbiory otwarte w naszej mniejszej przestrzeni topologicznej  $A$  to dokładnie zbiory postaci  $A \cap U$ , gdzie  $U \subset \mathbb{R}^k$  jest otwarty (w  $\mathbb{R}^k$ ).

- **1.8.** Zbadać ciągłość funkcji  $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zadanych wzorami:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2} e^{-|y|/x^2} & \text{jeśli } x \neq 0, \\ 1 & \text{jeśli } x = 0, \end{cases} \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^3-y} & \text{dla } y \neq x^3, \\ 1 & \text{dla } y = x^3. \end{cases}$$

*Teoria* (elementy topologii). Zbiór otwarty, domknięty. Ciągowa charakteryzacja domkniętości. W  $\mathbb{R}^k$  (!) zbiór zwarty to zbiór domknięty i ograniczony. Wnętrze, domknięcie, brzeg. Spójność.

*Teoria* (déjà vu). Większość faktów o ciągłość przenosi się na przypadek funkcji wielu zmiennych funkcji, m.in. te dotyczące operacji arytmetycznych, składania, osiągnięcia kresów na zbiorach zwartych, jednostajnej ciągłości na zbiorach zwartych, ale trzeba trochę uważać, patrz np. zadania 1.27, 1.28, 2.12, 2.13.

- **1.9** (klasyczne; por. zadanie 1.35). a) Funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest zdefiniowana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Sprawdzić, że  $f$  jest ciągła na  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , nie jest ciągła w punkcie  $(0,0)$ , ale jest ciągła po obcięciu do dowolnej prostej przechodzącej przez  $(0,0)$ .

b) Podać przykład funkcji  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mającej dokładnie dwa [zadane z góry] punkty nieciągłości  $(a,b)$ ,  $(c,d)$  i takiej, że  $g$  jest ciągła po obcięciu do dowolnej prostej  $L \subset \mathbb{R}^2$ .

c) Podać przykład funkcji  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  nieciągłej dokładnie w [zadanych z góry] punktach  $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), i ciągłej po obcięciu do dowolnej prostej  $L \subset \mathbb{R}^2$ .

<sup>1</sup>Przekształcenie  $f: X \rightarrow Y$  przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}_X)$  w przestrzeń topologiczną  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $U \in \mathcal{T}_Y$  mamy  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$  (przeciwobrazy zbiorów otwartych [w  $Y$ ] są otwarte [w  $X$ ]).

## 1. Normy, granice, ciągłość

- **1.10** (ważne). Dane jest  $k \in \mathbb{N}$  i pewna norma  $\|\cdot\|$  na  $\mathbb{R}^k$ . Wykazać, że istnieją pewne stałe  $A, B \in (0, \infty)$ , zależne tylko od  $k$  i  $\|\cdot\|$ , takie że dla każdego  $x \in \mathbb{R}^k$  zachodzi

$$A\|x\|_2 \leq \|x\| \leq B\|x\|_2.$$

W szczególności, ciąg punktów jest zbieżny w normie  $\|\cdot\|$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny w standardowej normie euklidesowej.

- **1.11.** Ustalmy niepusty zbiór  $A \subset \mathbb{R}^k$ . Dla  $x \in \mathbb{R}^k$  definiujemy

$$\text{dist}(x, A) := \inf\{\|x - y\|_2 : y \in A\}.$$

a) Wykazać, że  $\text{dist}(\cdot, A): \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty)$  jest funkcją ciągłą na  $\mathbb{R}^k$ , a nawet spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1.

b) Wykazać, że jeśli zbiór  $A$  jest domknięty, to powyższe infimum jest osiągnięte.

c) Wykazać, że jeśli zbiór  $A$  jest domknięty i wypukły, to powyższe infimum jest osiągnięte w dokładnie jednym punkcie.

d) Wykazać, że jeśli  $A, B \subset \mathbb{R}^k$  są niepuste, domknięte i rozłączne, to istnieje funkcja ciągła  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$ , taka że

$$f(x) = 0 \iff x \in A, \quad f(x) = 1 \iff x \in B.$$

- **1.12.** Załóżmy, że funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia następujące warunki:

1) dla każdego  $y \in \mathbb{R}$  funkcja  $x \mapsto f(x, y)$  jest ciągła, rosnąca,

2) dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  funkcja  $y \mapsto f(x, y)$  jest ciągła.

Wykazać, że funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła.

## Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

**1.13** (powtórka z GALu). Przypomnieć sobie z GALu hasła: forma dwuliniowa, iloczyn skalarny, norma/długość wektora, tożsamość równoległoboku.

**1.14.** Dana jest pewna norma  $\|\cdot\|$  na  $\mathbb{R}^k$ . Uzasadnić, że wzór

$$\|x\|_* := \sup\{\langle x, y \rangle : y \in \mathbb{R}^k, \|y\| \leq 1\}, \quad x \in \mathbb{R}^k,$$

również zadaje normę na  $\mathbb{R}^k$ . [W szczególności uzasadnić, że  $\|x\|_* < \infty$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}^k$ .]

**1.15** (niekluczowe dla nauki AM 2, ale naturalne, choć być może dość abstrakcyjne). Dla niepustego zbioru  $A \subset \mathbb{R}^k$  definiujemy zbiór

$$A^\circ = \{y \in \mathbb{R}^k : \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ dla każdego } x \in A\}.$$

Zbiór ten nazywa się zbiorem polarnym albo polem zbioru  $A$ .

a) Uzasadnić, że  $A^\circ$  jest domkniętym, wypukłym podzbiorem  $\mathbb{R}^k$  zawierającym 0.

b) Uzasadnić, że jeśli  $A \subset B$ , to  $A^\circ \supset B^\circ$ .

1. Normy, granice, ciągłość

c) Wykazać, że jeśli zbiór  $K \subset \mathbb{R}^k$  jest wypukły, zwarty, ma niepuste wnętrze, i jest symetryczny ( $K = -K$ ), to zbiór  $K^\circ$  też jest wypukły, zwarty, ma niepuste wnętrze, i jest symetryczny, a ponadto  $(K^\circ)^\circ = K$ .

d) Wykazać, że  $\|\cdot\|_{K^\circ}$  jest normą dualną do  $\|\cdot\|_K$ , tzn. dla  $x \in \mathbb{R}^k$  zachodzi

$$\|x\|_K = \sup\{\langle x, y \rangle : \|y\|_{K^\circ} \leq 1, y \in \mathbb{R}^k\}.$$

e) Zorientować się, że  $\|\cdot\|_K$  jest normą dualną do  $\|\cdot\|_{K^\circ}$ .

**1.16** (norma operatorowa). Dla przekształcenia liniowego  $A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  (które można utożsamiać z zadającą je macierzą  $(a_{ij})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k}$  rozmiaru  $l \times k$ ) kładziemy

$$\|A\|_{2 \rightarrow 2} := \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 \leq 1, x \in \mathbb{R}^k\}.$$

a) Wykazać, że

$$\|A\|_{2 \rightarrow 2} \leq \left( \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Podać przykład macierzy  $2 \times 2$ , dla której powyższa nierówność jest ostra.

b) Uświadomić sobie, że dla każdego  $x \in \mathbb{R}^k$  zachodzi  $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_{2 \rightarrow 2} \|x\|_2$ , że  $A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  spełnia warunek Lipschitza (i że  $\|A\|_{2 \rightarrow 2}$  jest najmniejszą stałą z jaką on zachodzi).

c) Sprawdzić, że  $\|\cdot\|_{2 \rightarrow 2}$  jest normą [na przestrzeni przekształceń liniowych  $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ , którą można utożsamiać z  $\mathbb{R}^{lk}$ ].

d) Uzasadnić, że jeśli  $A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $B: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$  to przekształcenia liniowe, to

$$\|BA\|_{2 \rightarrow 2} \leq \|B\|_{2 \rightarrow 2} \|A\|_{2 \rightarrow 2}.$$

e) Uzasadnić, że jeśli  $A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest izomorfizmem liniowym, to

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_{2 \rightarrow 2}} \|x\|_2 \leq \|Ax\|_2 \leq \|A\|_{2 \rightarrow 2} \|x\|_2 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^k.$$

**1.17.** Dla przekształcenia liniowego  $A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  (które można utożsamiać z zadającą je macierzą  $(a_{ij})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k}$  rozmiaru  $l \times k$ ) kładziemy

$$\|A\|_{1 \rightarrow 2} := \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_1 \leq 1, x \in \mathbb{R}^k\},$$

$$\|A\|_{2 \rightarrow \infty} := \sup\{\|Ax\|_\infty : \|x\|_2 \leq 1, x \in \mathbb{R}^k\}.$$

Wykazać, że

$$\|A\|_{1 \rightarrow 2} = \max\{\|(a_{ij})_{i=1}^l\|_2 : 1 \leq j \leq k\}$$

$$\|A\|_{2 \rightarrow \infty} = \max\{\|(a_{ij})_{j=1}^k\|_2 : 1 \leq i \leq l\}.$$

(maksimum [euklidesowych] długości kolumn i wierszy macierzy  $A$ , odpowiednio).



1. Normy, granice, ciągłość

1.18. Niech  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ ,  $f(x, y) = y^x$  dla  $(x, y) \in A$ . Zbadać istnienie granicy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} f(x, y)$$

w zależności od parametru  $a \in \mathbb{R}$ .

1.19. Obliczyć granice:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \ln(x^2 + 3x^4), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$$

o 1.20. Obliczyć poniższe granice lub wykazać, że nie istnieją:

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x+y)}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos^2(|x| + |y|)}{x^2 + y^2}, \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^4}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + x^4 + y^4}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^4}, \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^4}{x^2 + y^4}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^4}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}, \\ & \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^{10} y^{10} z^{10}}{x^4 + y^2 z} \quad \text{na zbiorze } \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 z \neq 0\}, \end{aligned}$$

1.21. Obliczyć poniższe granice lub wykazać, że nie istnieją:

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x)y}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(x)yz}{x^2 + y^2}, \\ & \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(x)y}{x^2 + |z|y^2}, \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(x)y}{zx^2 + y^2}. \end{aligned}$$

(ostatni przykład na „naturalnej” dziedzinie, na której  $zx^2 + y^2 \neq 0$ ).

1.22. Dla każdego punktu  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , którego współrzędne spełniają równanie  $a+b=1$ , obliczyć granicę

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{y \sin(\pi x)}{x + y - 1}$$

lub wykazać jej nieistnienie. (Zakładamy „naturalną” dziedzinę funkcji, odpowiadającą niezerującemu się mianownikowi).

1.23 (kolokwium 2010). Obliczyć granicę lub wykazać, że nie istnieje:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0^+)} \sqrt{\frac{1}{x^4 + y^4} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^4 + y^4} + \frac{1}{y}}.$$

1.24. a) Wskazać przykład rodziny zbiorów domkniętych w  $\mathbb{R}^2$ , której suma jest zbiorem otwartym (ale nie całą przestrzenią).

b) Wskazać przykład rodziny zbiorów otwartych w  $\mathbb{R}^2$ , której przecięcie jest niepustym zbiorem domkniętym.

## 1. Normy, granice, ciągłość

**1.25.** a) Uświadomić sobie, że każdy zbiór otwarty  $U \subset \mathbb{R}^k$  jest sumą pewnej rodziny kul otwartych.

b) Uzasadnić, że każdy zbiór otwarty  $U \subset \mathbb{R}^k$  jest sumą pewnej *przeliczalnej* rodziny kul otwartych.

c) Uzasadnić, że każdy zbiór otwarty  $V \subset \mathbb{R}$  jest sumą pewnej rodziny parami rozłącznych odcinków otwartych [być może nieskończonej długości].

- **1.26.** a) W zbiorze  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  zadajemy naturalną topologię indukowaną z  $\mathbb{R}^2$  (zbiory otwarte w  $A$  to zbiory postaci  $A \cap U$ , gdzie  $U \subset \mathbb{R}^2$  jest otwarty). Dla każdego z następujących zbiorów określić, czy jest on otwartym, domkniętym, zwartym podzbiorem  $A$ :

$$\begin{aligned} & \{(x, y) \in A : 0 < y < 1\}, \\ & \{(x, y) \in A : 0 < y \leq 1\}, \\ & \{(x, y) \in A : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

b) W zbiorze  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$  zadajemy naturalną topologię indukowaną z  $\mathbb{R}^2$  (zbiory otwarte w  $B$  to zbiory postaci  $B \cap U$ , gdzie  $U \subset \mathbb{R}^2$  jest otwarty). Dla każdego z następujących zbiorów określić, czy jest on otwartym, domkniętym, zwartym podzbiorem  $B$ :

$$\begin{aligned} & \{(x, y) \in B : 0 < y < 1\}, \\ & \{(x, y) \in B : 0 \leq y < 1\}, \\ & \{(x, y) \in B : 0 < y \leq 1\}, \\ & \{(x, y) \in B : 0 \leq y \leq 1\}, \\ & \{(x, y) \in B : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

- **1.27.** a) Przypomnieć sobie, że jeśli  $P$  jest wielomianem jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych, to obrazem prostej jest półprosta domknięta, cała prosta lub punkt.

b) Podać przykład wielomianu dwóch zmiennych o współczynnikach rzeczywistych  $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , którego obrazem jest półprosta otwarta  $(0, \infty)$ .

**1.28.** a) Przypomnieć sobie, że jeśli  $I \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem, to  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy gdy jest ściśle monotoniczna. Ponadto, jeśli  $f$  jest różnowartościowa i ciągła, to jest bijekcją na swój obraz, a funkcja odwrotna  $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$  też jest ciągła.

b) Podać przykład przedziału  $I \subset \mathbb{R}$  i funkcji  $g: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , która jest ciągła i różnowartościowa, ale funkcja odwrotna  $g^{-1}: g(I) \rightarrow I$  nie jest ciągła.

**1.29.** Z badać ciągłość funkcji  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zadanej wzorem:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y-x}{y-\sin(x)} & \text{jeśli } y \neq \sin(x), \\ 1 & \text{jeśli } y = \sin(x). \end{cases}$$

1. Normy, granice, ciągłość

**1.30.** Zbadać ciągłość funkcji  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zadanej wzorem:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \left( \frac{x + \sin(y)}{1 + z^2}, \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{1 - \cos(xyz)}{x^2 + y^4 + z^6} \right) & \text{dla } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ (0, 0, 0) & \text{dla } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

**1.31.** Niech  $k \geq 2$ . Załóżmy, że funkcja  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła i istnieją  $a, b \in \mathbb{R}^k$  takie, że  $f(a) < 0 < f(b)$ . Uzasadnić, że funkcja  $f$  ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

**1.32.** Dla  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  niech

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2) \cos(x^2 + y^2 + z^2) \exp(-(x^2 + y^2 + z^2)), \\ g(x, y, z) &= \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2) \cos(xyz) \exp(-(x^2 + y^4 + z^6)). \end{aligned}$$

Uzasadnić, że każda z tych funkcji osiąga swoje kresy.

**1.33.** a) Funkcja  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  jest ciągła. Uzasadnić, że jej wykres, tj. zbiór

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l : x \in \mathbb{R}^k\},$$

jest domknięty [w przestrzeni  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^{k+l}$ ].

b) Podać przykład funkcji  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , która nie jest ciągła w punkcie 0, ale której wykres  $\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$  jest domkniętym podzbiorem  $\mathbb{R}^2$ .

**1.34.** a) Funkcja  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  jest ustalony. Wykazać, że poziomicą funkcji  $f$  przechodzącą przez punkt  $x_0$ , tj. zbiór

$$\{x \in \mathbb{R}^k : f(x) = f(x_0)\},$$

jest domknięty.

b) Podać przykład zbioru  $A \subset \mathbb{R}^k$ , funkcji ciągłej  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  i punktu  $x_0 \in A$ , takich że  $\{x \in A : g(x) = g(x_0)\}$  nie jest domkniętym podzbiorem  $\mathbb{R}^k$ .

o **1.35** (por. zadanie 1.9). Funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest zdefiniowana wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp(-1/x^2)y}{\exp(-2/x^2)+y^2} & \text{jeśli } x \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } x = 0. \end{cases}$$

a) Sprawdzić, że  $f$  jest ciągła po obcięciu do dowolnej krzywej postaci  $y = cx^{m/n}$  ( $c \in \mathbb{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  – względnie pierwsze,  $x \geq 0$  w przypadku gdy  $n$  jest parzyste).

b) Rozstrzygnąć, czy  $f$  jest ciągła w punkcie  $(0, 0)$ .

**1.36.** Załóżmy, że funkcja  $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła. Niech

$$g(x) := \sup\{f(x, y) : y \in [0, 1]\} \quad \text{dla } x \in [0, 1].$$

Wykazać, że funkcja  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła.

1. Normy, granice, ciągłość

**1.37.** Załóżmy, że funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia następujące warunki:

- 1) dla każdego  $y \in \mathbb{R}$  funkcja  $x \mapsto f(x, y)$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą 7,
- 2) dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  funkcja  $y \mapsto f(x, y)$  jest ciągła.

Wykazać, że funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła.

**1.38.** Załóżmy, że zbiór  $A \subset \mathbb{R}^2$  jest spójny. Wiadomo z wykładu topologii, że wówczas domknięcie zbioru  $A$  też jest zbiorem spójnym.<sup>2</sup>

- a) Czy wnętrze zbioru  $A$  może być zbiorem niespójnym?
- b) Czy brzeg zbioru  $A$  może być zbiorem niespójnym?

**1.39** (informacyjnie). Rozważmy [nieskończeniowymiarową] przestrzeń liniową

$$\ell_2(\mathbb{N}) := \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}$$

z normą  $\|x\|_2 := (\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2)^{1/2}$  dla  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$ .

a) Wskazać ciąg różnych punktów w [domkniętej] kuli jednostkowej  $\{x \in \ell_2(\mathbb{N}) : \|x\|_2 \leq 1\}$ , z których każde dwa są w odległości  $\sqrt{2}$ .

b) Wywnioskować, że [domknięta] kula jednostkowa nie jest zwarta.

*Uwaga.* Okazuje się, że prawdziwe jest następujące twierdzenie: przestrzeń unormowana jest skończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy jej domknięta kula jednostkowa jest zwarta.

c) Połóżmy  $\|x\|_{\infty} := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$  dla  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$ . Uświadomić sobie, że to też jest norma [na przestrzeni  $\ell_2(\mathbb{N})$ ]. Uzasadnić, że normy  $\|\cdot\|_2$  i  $\|\cdot\|_{\infty}$  nie są równoważne (np. wskazując dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  punkt  $x \in \ell_2(\mathbb{N})$ , taki że  $\|x\|_2 = 1$ , ale  $\|x\|_{\infty} = 1/n$ ).

---

<sup>2</sup>Wręcz: dowolny zbiór spełniający  $A \subset B \subset \bar{A}$  jest spójny (i jest to prawda w ogólnej przestrzeni topologicznej).

## 2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność

*Umowa.* W przestrzeni euklidesowej mamy naturalne bazy i będziemy utożsamiać przekształcenie liniowe  $A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  z zadającą je macierzą  $A$  rozmiaru  $l \times k$  (w bazach standardowych, mnemotechnicznie:  $l$  linii/wierszy,  $k$  kolumn). Wektory będziemy na ogół zapisywać poziomo,  $x = (x_1, \dots, x_k)$ , ale wektor można utożsamiać z „pionową” macierzą rozmiaru  $k \times 1$  (i nazywać go wtedy wektorem kolumnowym) i interpretować  $Ax$  jako mnożenie dwóch macierzy (którego wynikiem jest wektor kolumnowy). [Nie będziemy tego na ogół zaznaczać i rozróżniać w notacji].

### Materiał do omówienia na zajęciach [4+ ćw. (??)]

*Teoria.* Pochodne cząstkowe (ozn.  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f = f'_{x_i} = f_{x_i} = f'_i = f_i = D_i f = D_{e_i} f$ ), pochodna kierunkowa.

- **2.1.** a) Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji  $f(x, y) = \sin(x) + y^2 e^{xy}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .  
b) Obliczyć pochodne cząstkowe i kierunkowe (jeśli istnieją) funkcji

$$g(x, y) = \mathbf{1}_{\{y=x^2, x>0\}} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } y = x^2 \text{ oraz } x > 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

- c) Obliczyć pochodne cząstkowe (jeśli istnieją) funkcji  $h(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Znaleźć pochodne kierunkowe w punkcie  $(0, 0)$ .
- **2.2.** a) Zbiór  $A \subset \mathbb{R}^2$  jest otwarty i wypukły. Pochodne cząstkowe funkcji  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  istnieją w zbiorze  $A$  i są funkcjami ograniczonymi:  $|f'_x(x, y)| \leq C$ . Wykazać, że funkcja  $f$  spełnia warunek Lipschitza.  
b) Podać przykład zbioru otwartego, spójnego  $B \subset \mathbb{R}^2$  i funkcji  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ , która jest ciągła, ma [wszędzie w zbiorze  $B$ ] pochodne cząstkowe, pochodne cząstkowe są ciągłe i ograniczone na  $B$ , ale funkcja  $g$  nie jest jednostajnie ciągła.

*Teoria.* Mamy  $U = \text{int } U \subset \mathbb{R}^k$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $p \in U$ . Definicja różniczkowalności.<sup>1</sup> Własności:

<sup>1</sup>Istnieje przekształcenie liniowe  $Df(p): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ , takie że:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p) - Df(p)h}{\|h\|_2} = 0$$

(po lewej stronie  $\mathbb{R}^k \ni h \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^k$ , po prawej stronie  $0 \in \mathbb{R}^l$ ).

## 2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność

- różniczkowalność  $\implies$  ciągłość (djà vu);
  - różniczkowalność  $\implies$  istnienie pochodnych cząstkowych (kierunkowych);
  - jeśli pochodne cząstkowe istnieją [wszędzie] w otoczeniu  $p$  i są *ciągłe* w  $p$ , to  $f$  jest różniczkowalna w  $p$ .
- **2.3.** Niech  $f(x, y) = x\sqrt{4 + |x| - |y|}$  (na „naturalnej” dziedzinie:  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , takie że  $4 + |x| - |y| \geq 0$ ). Zbadać różniczkowalność w wewnętrznych punktach dziedziny.
  - **2.4.** Niech  $f(x, y) = y^x$  dla  $y > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Policzyc (w możliwie najprostszy sposób)  $f'_{(4,5)}(2, 3)$ , tj. pochodną kierunkową funkcji  $f$  w punkcie  $(2, 3)$  w kierunku wektora  $(4, 5)$ .
  - **2.5.** Czy funkcja  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , jest różniczkowalna w punkcie  $(0, 0)$ ?
  - **2.6.** Rozważamy przestrzeń  $M_{k \times k}(\mathbb{R})$  (macierze wymiaru  $k \times k$  o wyrazach rzeczywistych), którą utożsamiamy z  $\mathbb{R}^{k^2}$ . Funkcja  $F(A) = A^2$  oczywiście musi być różniczkowalna – rozpisac definicję i sprawdzić, czy  $DF(A) = 2A$ . [Jeśli nie, to zrozumieć, jakim przekształceniem liniowym jest  $DF(A)$ .]
  - **2.7.** Zbadać różniczkowalność funkcji  $f(x, y) = |x^2 - y| \ln(1 + y)$  (na „naturalnej” dziedzinie:  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , takie że  $y > -1$ ).

*Teoria* (djà vu?). Różniczka złożenia. Różniczka funkcji odwrotnej ( $k = l$ ,  $f^{-1}$  istnieje i ciągła w  $f(p)$ ,  $f(U)$  otwarty,  $Df(p)$  to izomorfizm). Przekształcenia wieloliniowe.

\*\*\*

*Teoria* (djà vu). Punkty krytyczne, szukanie kresów funkcji różniczkowalnych.

- **2.8.** Znaleźć kresy funkcji  $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$  na zbiorze  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Co by się zmieniło, gdybyśmy rozważali  $\tilde{f}(x, y) = x^2 + xy - 2y^2$ ?
- **2.9.** Znaleźć kresy funkcji  $f(x, y) = (3x + 2y) \exp(-4x^2 - y^2)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
- **2.10.** Niech  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x \geq 0\}$ ,  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2 + 1}$  dla  $(x, y) \in A$ . Wiadomo, że funkcja  $f$  nie ma punktów krytycznych we wnętrzu  $A$ . Znaleźć  $\sup_A f$ .
- **2.11.** Niech  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \geq x - 1, x^2 \geq 4y, 0 < x < 2\}$  oraz

$$f(x, y) = \frac{(1 - y)^2(x^2 - y - 2xy + 2y^2)}{(x - 2y)^2}$$

dla  $(x, y) \in A$ . Znaleźć  $\sup_A f$ ,  $\inf_A f$ .

*Sugestia.* Naszkicować zbiór  $A$ , zbadać znak  $f'_x(x, y)$ .

- **2.12** (klasyczne, por. zadanie 2.33). Niech  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Sprawdzić, że funkcja  $f$  obcięta do dowolnej prostej  $L \subset \mathbb{R}^2$  przechodzącej przez punkt  $(0, 0)$  ma w punkcie  $(0, 0)$  minimum lokalne, ale punkt  $(0, 0)$  nie jest minimum lokalnym funkcji  $f$ .

## 2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność

- **2.13** (patrz też zadanie 2.32). Niech  $f(x, y) = x^2(1+y)^3 + y^2$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Sprawdzić, że jedynym punktem krytycznym funkcji  $f$  jest  $(0, 0)$ , że  $f$  ma w  $(0, 0)$  minimum lokalne, ale  $f$  nie jest ograniczona ani z góry, a ani z dołu.

*Komentarz.* W szczególności punkcie swojego jedynego ekstremum lokalnego funkcja  $f$  nie osiąga ani kresu dolnego, ani kresu górnego – czy taka sytuacja może się zdarzyć dla funkcji jednej zmiennej?

\*\*\*

*Teoria.* Gradient, „kierunek najszybszego wzrostu”, prostopadłość do poziomicy.

*Teoria.* Wektor styczny do zbioru; stożek styczny.

- **2.14.** a) Jakie wektory są styczne do wykresu funkcji  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt{|x|}$  w punkcie  $(0, 0)$ ?  
 b) Jakie wektory są styczne do zbioru  $(\mathbb{Q} \cap [0, \infty))^2$  w punkcie  $(0, 0)$ ?  
 c) Narysować poziomice  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  funkcji  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , obliczyć  $\nabla f(x, y)$  i zaznaczyć ten wektor na rysunku dla wybranego punktu z poziomicy – jakie wektory są styczne do poziomicy w tym punkcie?  
 d) Rozważmy paraboloidę obrotową w  $\mathbb{R}^3$  opisaną równaniem  $z = x^2 + y^2$ , tj. wykres  $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$  funkcji z poprzedniego podpunktu. Opisać [geometrycznie/słownie], jak wyglądają [afiniczne] płaszczyzny styczne [do paraboloidy/do wykresu] w punktach  $(0, 0, 0)$  i  $(1, 0, 1)$ . Niech  $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$  będzie parametryzacją paraboloidy. Wypisać  $D\varphi(0, 0)$  oraz  $D\varphi(1, 0)$  i sprawdzić, że wektory  $D\varphi(0, 0)e_1, D\varphi(0, 0)e_2$  oraz  $D\varphi(1, 0)e_1, D\varphi(1, 0)e_2$  tworzą bazę odpowiednich [liniowych] przestrzeni stycznych.

\*\*\*

*Teoria.* Różniczka złożenia, *chain rule*.

- **2.15.** a) Funkcja  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna, a jej pochodne cząstkowe spełniają zależność

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Udowodnić, że  $g(x, y, z) = \varphi(x + y + z)$  dla pewnej różniczkowalnej funkcji  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- b) Jak zmieni się teza, jeśli założymy, że  $\frac{\partial g}{\partial x} = 2\frac{\partial g}{\partial y} = 3\frac{\partial g}{\partial z}$ ?
- **2.16.** a) Funkcja  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna, a jej pochodne cząstkowe spełniają zależność

$$y \frac{\partial g}{\partial x} = x \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Udowodnić, że  $g(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$  dla pewnej funkcji  $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  (ciągłej, różniczkowalnej na  $(0, \infty)$ ).

- b+c+d) Patrz zadanie 2.48.
- **2.17.** Funkcja  $f: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna i spełnia zależność

$$xf'_x + yf'_y = f.$$

Udowodnić, że  $f(x, y) = x\varphi(y/x)$  dla pewnej różniczkowalnej funkcji  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność

\*\*\*

*Teoria.* Tw. Lagrange'a o wartości średniej.

### Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

**2.18.** a) Niech  $U \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem otwartym, takim że dla każdego  $c \in \mathbb{R}$  część wspólna prostej  $\{(c, y) : y \in \mathbb{R}\}$  i zbioru  $U$  jest odcinkiem lub zbiorem pustym. Załóżmy, że funkcja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia  $f'_y(x, y) = 0$  dla  $(x, y) \in U$  (pochodna cząstkowa istnieje w każdym punkcie dziedziny i jest równa 0). Uświadomić sobie, że, że wówczas funkcja  $f$  nie zależy od zmiennej  $y$ , tzn. jeśli  $(x, y_1), (x, y_2) \in U$ , to  $f(x, y_1) = f(x, y_2)$ .

b) Niech  $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ oraz } y = 0\}$ . Podać przykład [możliwie prostej] funkcji  $g: \mathbb{R}^2 \setminus L \rightarrow \mathbb{R}$ , która ma ciągle pochodne cząstkowe oraz  $g'_y(x, y) = 0$  dla każdego  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ , ale mimo to nie jest prawdą, że funkcja  $g$  nie zależy od zmiennej  $y$  (tzn. nie jest prawdą, że dla każdych  $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus L$  mamy  $g(x, y_1) = g(x, y_2)$ ).

**2.19.** Niech  $U = \{(x, p, a, b, c) \in \mathbb{R}^5 : x > 0\}$  i niech  $f(x, p, a, b, c) = x^p + b^2 - 4ac$  dla  $(x, p, a, b, c) \in U$ . Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji  $f$ .

- o **2.20.** a) Obliczyć macierz Jacobiego i jakobian<sup>2</sup> przekształcenia

$$(r, \alpha) \mapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

- b) Obliczyć macierz Jacobiego przekształcenia

$$(r, \alpha, \beta) \mapsto (r \cos \alpha \cos \beta, r \cos \alpha \sin \beta, r \sin \alpha).$$

W ramach autosprawdzenia sprawdzić, że kolumny macierzy Jacobiego są wektorami prostopadłymi. Następnie obliczyć jakobian (można do tego wykorzystać prostopadłość kolumn (jak zorientowana jest taka baza?)).

c) Zrozumieć interpretację geometryczną poprzedniego podpunktu (patrz Rysunek 2.1): punkt  $(x, y, z) = (r \cos \alpha \cos \beta, r \cos \alpha \sin \beta, r \sin \alpha)$  spełnia  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , tzn. leży na sferze o promieniu  $r$ . Trzecia współrzędna,  $z = r \sin(\alpha)$ , może się zmieniać od  $-r$  do  $r$ , więc  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$  jest szerokością geograficzną. Z kolei  $\beta \in [-\pi, \pi]$  jest długością geograficzną. Prostopadłość kolumn macierzy Jacobiego jest związana z tym, że promień sfery jest do niej prostopadły, więc jest prostopadły do południków i równoleżników, które też są wzajemnie prostopadłe.

- d) Ewentualnie obliczyć macierz Jacobiego przekształcenia

$$(r, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_k),$$

gdzie

$$x_1 = r \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_{k-2} \cos \alpha_{k-1},$$

---

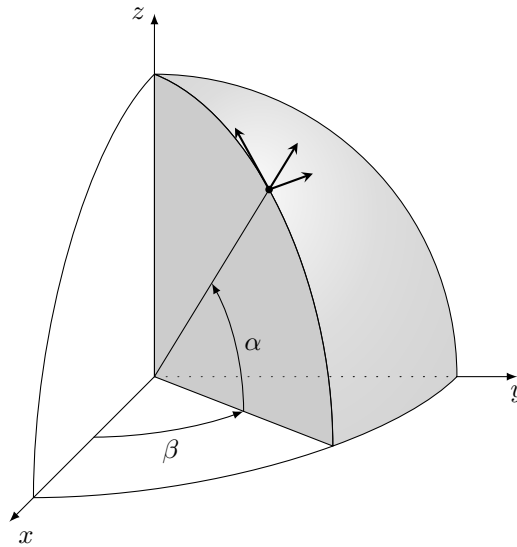
<sup>2</sup>Przypomnienie: macierz Jacobiego to macierz pochodnych cząstkowych (w  $i$ -tej kolumnie są pochodne cząstkowe po  $i$ -tej zmiennej), jakobian to jej wyznacznik.



## 2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność

$$\begin{aligned}x_2 &= r \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_{k-2} \sin \alpha_{k-1}, \\x_3 &= r \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \sin \alpha_{k-2}, \\&\vdots \\x_{k-1} &= r \cos \alpha_1 \sin \alpha_2, \\x_k &= r \sin \alpha_1.\end{aligned}$$

W ramach autosprawdzenia, sprawdzić, że kolumny macierzy Jacobiego są wektorami prostopadłymi. Następnie obliczyć jacobian.



Rysunek 2.1.: Współrzędne biegunowe z zadania 2.20 b). Zaznaczone wektory to kolumny macierzy Jacobiego (przeskalowane dla zwiększenia czytelności). Zaadaptowane z [Juan Castaño, How to draw a 3D sphere and a 3D cone for Spherical coordinates, <https://tex.stackexchange.com/questions/676181/>, licensed under CC BY-SA 3.0].

**2.21.** Funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w punkcie  $(1, 1)$  i  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2$ . Ponadto  $f(x, x^2) = 0$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ . Znaleźć  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$ . Znaleźć również pochodną kierunkową funkcji  $f$  w punkcie  $(1, 1)$  w kierunku wektora  $(-1, 1)$ .

**2.22.** Dane są funkcje  $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  oraz  $G: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Uzasadnić, że funkcja  $(F, G): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{l+m}$  jest różniczkowalna w punkcie  $p \in \mathbb{R}^k$  wtedy i tylko wtedy gdy,  $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  oraz  $G: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  są różniczkowalne w punkcie  $p \in \mathbb{R}^k$ . Jak różniczka funkcji  $(F, G)$  wyraża się w terminach różniczek  $F$  oraz  $G$ ?

*Uwaga.* To prawie na pewno było w jakiejś postaci dowodzone na wykładzie, ale warto to jeszcze raz przemyśleć.

## 2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność

**2.23.** Zbadać, w których punktach płaszczyzny różniczkowalne są funkcje:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{xy}{1 + |x - y|}, \\ g(x, y) &= \ln(1 + |xy|^p) \quad (p > 0 \text{ jest parametrem}), \\ h(x, y) &= \begin{cases} \frac{1}{y}(e^{xy} - 1) & \text{jeśli } y \neq 0, \\ x & \text{jeśli } y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

*Plan pracy.* Jest jasne, że w niektórych punktach trzeba sprawdzać istnienie pochodnych cząstkowych i różniczkowalność z definicji. Punkt  $(0, 0)$  może wymagać dodatkowej czujności – rachunki mogą być nieco inne (niekoniecznie trudniejsze).

*W ramach autosprawdzenia.* W przypadku funkcji  $g$  parametr  $p$  wpływa na odpowiedź (przynajmniej w niektórych punktach).

**2.24.** Czy funkcja  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4} - \sqrt{x^2 + y^6}$  jest różniczkowalna w punkcie  $(0, 0)$ ?

○ **2.25.** Podać przykłady pokazujące, że w poniższym ciągu warunków żaden warunek nie jest równoważny poprzedniemu.

- (i) pochodne cząstkowe  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}$  istnieją w pewnym otoczeniu  $p$  i są ciągłe w  $p$ ,
- (ii) funkcja  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $p$ ,
- (iii) dla każdego  $v \in \mathbb{R}^k$  pochodna kierunkowa  $f'_v(p)$  istnieje oraz  $f'_v(p)$  zależy liniowo od  $v$  oraz funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $p$ ,
- (iv) dla każdego  $v \in \mathbb{R}^k$  pochodna kierunkowa  $f'_v(p)$  istnieje oraz  $f'_v(p)$  zależy liniowo od  $v$ ,
- (v) dla każdego  $v \in \mathbb{R}^k$  pochodna kierunkowa  $f'_v(p)$  istnieje,
- (vi) pochodne cząstkowe  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}$  istnieją w punkcie  $p$ .

(Wszędzie zakładamy, że funkcja  $f$  jest określona w pewnym otoczeniu punktu  $p \in \mathbb{R}^k$ ; wymiary przestrzeni można w każdym z przykładów wybrać dowolnie).

*Wskazówka.* Większość przykładów można pewnie odnaleźć w materiałach z zajęć (wykład, zadania z ćwiczeń, zadania z pracy domowej, inne zadania z tego pliku).

**2.26** (dējà vu?). Funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest zdefiniowana wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) + y^2 \sin(1/y) & \text{jeśli } xy \neq 0, \\ x^2 \sin(1/x) & \text{jeśli } y = 0 \text{ oraz } x \neq 0, \\ y^2 \sin(1/y) & \text{jeśli } x = 0 \text{ oraz } y \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } x = y = 0. \end{cases}$$

Uświadomić sobie, że funkcja  $f$  ma pochodne cząstkowe [wszędzie], ale nie są one ciągłe w punkcie  $(0, 0)$ . Uzasadnić, że  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $(0, 0)$ .

**2.27.** Rozważmy funkcję  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zadaną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

## 2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność

a) Sprawdzić, że pochodne cząstkowe funkcji  $f$  istnieją [w każdym punkcie płaszczyzny].

a) Sprawdzić, że pochodne cząstkowe funkcji  $f$  są ograniczone na  $\mathbb{R}^2$ . Przypomnieć sobie, że z tego wynika, że funkcja  $f$  jest lipschitzowska.

b) Sprawdzić, że dla każdego wektora  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|v\|_2 = 1$ , istnieje pochodna kierunkowa  $f'_v(0,0)$  oraz  $|f'_v(0,0)| \leq 1$ .

c) Załóżmy, że  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest funkcją różniczkowalną, taką że  $\gamma(0) = (0,0)$  oraz  $D\gamma(0) \neq (0,0)$ .<sup>3</sup> Sprawdzić [z definicji], że funkcja  $t \mapsto f(\gamma(t))$  jest różniczkowalna w  $t = 0$ .

d) Uzasadnić, że funkcja  $f$  *nie* jest różniczkowalna w punkcie  $(0,0)$ .

**2.28.** Wyznaczyć wszystkie punkty, w których funkcja  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x_1, \dots, x_k) = |x_1 \dots x_k|$  nie jest różniczkowalna.

o **2.29** (dość ważne). a) Niech  $f(x) = \|x\|_2^2$  dla  $x \in \mathbb{R}^k$ . Znaleźć  $\nabla f(x)$  – odpowiedź wyrazić bez odwoływania się do współrzędnych punktu  $x$ .

b) Niech  $A$  będzie pewną macierzą rozmiaru  $k \times k$  o współczynnikach rzeczywistych. Niech  $g(x) = \langle Ax, x \rangle$  dla  $x \in \mathbb{R}^k$ . Znaleźć  $\nabla g(x)$  – odpowiedź wyrazić bez odwoływania się do współrzędnych punktu  $x$ . *Silna sugestia.* Przeprowadzić rachunki bez odwoływania się w ogóle do współrzędnych punktu  $x$  czy współczynników macierzy  $A$ .

o **2.30.** Rozważamy przestrzeń  $M_{k \times k}(\mathbb{R})$  (macierze wymiaru  $k \times k$  o wyrazach rzeczywistych), którą utożsamiamy z  $\mathbb{R}^{k^2}$ ;  $I \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$  to macierz jednostkowa.

a) Wykazać, że dla  $A \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$ ,

$$D \det(I)A = \text{tr}(A)$$

(funkcja  $\det: \mathbb{R}^{k^2} \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w punkcie  $I$ , a jej różniczka w tym punkcie (tj.  $D \det(I)$ ) jest przekształceniem liniowym z  $\mathbb{R}^{k^2}$  w  $\mathbb{R}$  zadany przez  $A \mapsto \text{tr}(A)$ ).

*Koło ratunkowe.* Może być łatwiej zacząć od przypadku  $k = 2$  lub  $3$ .

b) Wykazać, że jeśli macierz  $B \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$  jest odwracalna, to

$$D \det(B)A = \det(B) \text{tr}(B^{-1}A)$$

dla  $A \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$ .

**2.31.** Rozważamy przestrzeń  $M_{k \times k}(\mathbb{R})$  (macierze wymiaru  $k \times k$  o wyrazach rzeczywistych);  $I \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$  to macierz jednostkowa. Niech

$$U = \{A \in M_{k \times k}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\},$$

i niech  $\Phi: U \rightarrow U$  będzie dane wzorem  $\Phi(A) = A^{-1}$  dla  $A \in U$ . Poniżej  $\|\cdot\|_{2 \rightarrow 2}$  to norma operatorowa (patrz zadanie 1.16), ale proszę pamiętać, że przestrzeń  $M_{k \times k}(\mathbb{R})$  można utożsamiać z  $\mathbb{R}^{k^2}$ , więc wszystkie normy są równoważne.

<sup>3</sup>Krzywa  $\gamma$  jest postaci  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  dla pewnych funkcji  $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Różniczkowalność  $\gamma$  [jako przekształcenia z  $\mathbb{R}$  w  $\mathbb{R}^2$ ] oznacza dokładnie, że funkcje  $u, v$  są różniczkowalne. Warunek niezerowania się różniczki  $\gamma$  w punkcie  $t = 0$  oznacza dokładnie, że  $(u'(0), v'(0)) \neq (0,0)$ .

## 2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność

a) Wykazać, że jeśli macierz  $B \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$  spełnia  $\|B\|_{2 \rightarrow 2} < 1$ , to macierz  $I - B$  jest odwracalna oraz

$$(I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n.$$

Uświadomić sobie, że to w szczególności oznacza, że  $I$  należy do wnętrza zbioru  $U$ .

b) Sprawdzić, że przekształcenie  $\Phi$  jest różniczkowalne w  $I$  oraz

$$D\Phi(I)B = -B$$

(różniczka  $\Phi$  w punkcie  $I$  to przekształcenie liniowe z  $M_{k \times k}(\mathbb{R})$  w  $M_{k \times k}(\mathbb{R})$  zadane przez  $B \mapsto -B$ ).

c) Uświadomić sobie, że  $U$  jest otwartym podzbiorem  $M_{k \times k}(\mathbb{R})$ . Sprawdzić, że przekształcenie  $\Phi$  jest różniczkowalne oraz dla  $A \in U$  zachodzi

$$D\Phi(A)B = -A^{-1}BA.$$

- **2.32** (por. zadanie 2.13). *Motywacja.* Zadanie 2.13 w podanej wyżej wersji (sprawdzić, że podana funkcja ma jakieś własności) jest łatwe, ale byłoby chyba trudnawne, gdyby sformułować je: „Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja, taka że ...”. Poniżej alternatywne i chyba bardziej wymyślane podejście do konstrukcji funkcji o odpowiednich własnościach.

a) Niech  $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Sprawdzić, że funkcja  $g$  ma dokładnie dwa punkty krytyczne i że w jednym z nich jest minimum lokalne, a drugi jest punktem siodłowym. Sprawdzić też, że funkcja  $g$  nie jest ograniczona ani z góry, a ani z dołu.

b) Niech  $f(x, y) := g(x, e^y) = x^3 + e^{3y} - 3xe^y$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Sprawdzić, że funkcja  $f$  ma dokładnie jeden punkt krytyczny i uzasadnić, że ma w nim minimum lokalne. Sprawdzić też, że funkcja  $f$  nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu.

*Komentarz.* Dobrze by było spróbować wyobrazić sobie, co się stało i jak wygląda wykres funkcji  $f$ . Funkcja  $f$  ma jedno minimum lokalne i nie jest ograniczona z góry – to nie jest dziwne. Dziwniejsze jest to, że z tego minimum lokalnego funkcja  $f$  jest w stanie wykroczyć tak, by zejść z wartościami do  $-\infty$ , i odbywa się bez przechodzenia przez punkty krytyczne (siodła lub maksima lokalne). Punkt siodłowy funkcji  $g$  został wysłany do „[minus?] nieskończoności”, na „brzeg” płaszczyzny ( $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$ ). Siodła już nie mamy, ale w pewnym sensie można do niego podejść i to wystarcza. [Lepsze intuicje chętnie przyjmę].

**2.33** (por. zadanie 2.12). Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} (y - \exp(-1/x^2))(y - 3\exp(-1/x^2)) & \text{dla } x \neq 0, y \in \mathbb{R}, \\ y^2 & \text{dla } x = 0, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sprawdzić, że funkcja  $f$  ma po obcięciu do dowolnej krzywej postaci  $y = cx^{m/n}$  ( $c \in \mathbb{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  – względnie pierwsze,  $x \geq 0$  w przypadku gdy  $n$  jest parzyste) minimum lokalne w punkcie  $(0, 0)$ , ale punkt  $(0, 0)$  nie jest minimum lokalnym funkcji  $f$ .

## 2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność

**2.34.** Wykazać, że funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem

$$f(x, y) = (1 + e^y) \cos(x) - ye^y$$

ma nieskończenie wiele maksimów, ale nie ma żadnego minimum lokalnego.

**2.35.** Niech  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ ,  $f(x, y) = \frac{x-2y}{8+x^2+4y^2}$  dla  $(x, y) \in A$ . Wyznaczyć  $\sup_A f$ ,  $\inf_A f$ .

**2.36.** Niech  $A = [0, \infty)^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $f(x, y) = \frac{xe^{-y}\sqrt{y}}{x^2+y}$  dla  $(x, y) \in A$ . Wyznaczyć  $\sup_A f$ ,  $\inf_A f$ .

**2.37.** Znaleźć kresu funkcji  $f(x, y, z) = 6xy - 3xz - 2yz$  na zbiorze  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ .

**2.38.** Niech  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x \geq 4y \geq 0\}$ ,  $f(x, y) = \frac{x^2ye^{-xy}}{x+1}$  dla  $(x, y) \in A$ . Wyznaczyć  $\sup_A f$ ,  $\inf_A f$ .

**2.39.** Niech  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 4 + x^2 + y^2\}$ . Znaleźć w zbiorze  $A$  punkt, którego odległość od punktu  $(2, 4, 0)$  jest najmniejsza.

**2.40.** Spośród basenów prostopadłościennych o ustalonej objętości  $V > 0$  znaleźć basen o najmniejszym polu powierzchni (podstawa plus cztery ściany boczne).

**2.41.** Dana jest macierz nieosobliwa  $A$  rozmiaru  $k \times k$  o współczynnikach rzeczywistych i wektor  $b \in \mathbb{R}^k$ . Niech  $f(x) = \|Ax\|^2 - 2\langle Ax, b \rangle$  dla  $x \in \mathbb{R}^k$ . Wykazać, że  $f$  osiąga swoje minimum globalne w dokładnie jednym punkcie.

*Drobna wskazówka.* Jeśli będą kłopoty rachunkowe, to warto najpierw zrobić zadanie 2.29.

**2.42** (fajne). Ustalmy dwa punkty  $a, b \in \mathbb{R}^3$ ,  $a \neq b$ , i niech

$$f(x) = \frac{1}{\|x-a\|_2} + \frac{1}{\|x-b\|_2} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{a, b\}.$$

Znaleźć punkty krytyczne funkcji  $f$ .

**2.43.** Funkcja  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna i spełnia warunek:

$$\sum_{j=1}^k x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \geq 0 \quad \text{dla każdego } x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Wykazać, że funkcja  $f$  jest ograniczona z dołu.

**2.44** (kolokwium 2010). Zbiór  $A \subset \mathbb{R}^k$  jest zwarty i wypukły. Funkcja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła na  $A$  i różniczkowalna w  $\text{int } A$ . Ponadto istnieją liczby  $a_1, \dots, a_k$ , nie wszystkie równe 0, takie że

$$\sum_{j=1}^k a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \leq 0 \quad \text{dla każdego } x = (x_1, \dots, x_k) \in \text{int } A.$$

Wykazać, że funkcja  $f$  osiąga swoją wartość największą i najmniejszą w pewnych punktach brzegu zbioru  $A$ .

## 2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność

**2.45.** Niech  $p > 0$ . Mówimy, że funkcja  $f: (0, \infty)^k \rightarrow \mathbb{R}$  jest jednorodna stopnia  $p$ , jeśli dla każdego  $x \in (0, \infty)$  i każdego  $\lambda > 0$  zachodzi  $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ .

a) Wykazać, że jeśli funkcja  $f: (0, \infty)^k \rightarrow \mathbb{R}$  jest jednorodna stopnia  $p$  i różniczkowalna, to spełnia warunek:

$$\sum_{j=1}^k x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = pf(x) \quad \text{dla każdego } x = (x_1, \dots, x_k) \in (0, \infty)^k. \quad (2.1)$$

b) Odwrotnie, pokazać że jeśli różniczkowalna funkcja  $f: (0, \infty)^k \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia warunek (2.1) [dla pewnego  $p > 0$ ], to jest jednorodna stopnia  $p$ .

*Uwaga.* W podpunkcie b) zapewne pojawi się potrzeba skorzystania z jakiejś wiedzy z RRZ – można na kredyt przyjąć, że rozwiązanie, które Państwo zgodną, jest jedyne (z dokładnością do mnożenia przez stałą) i że nie ma żadnych problemów.

**2.46.** Dana jest funkcja różniczkowalna  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Wiadomo, że:

- gradient funkcji  $f$  w punkcie  $(0, 0, 0)$  to wektor  $(1, 1, 1)$ ,
- gradient funkcji  $f$  w punkcie  $(1, 1, 1)$  to wektor  $(1, 2, 3)$ ,
- gradient funkcji  $f$  w punkcie  $(1, 2, 3)$  to wektor  $(0, 0, 0)$ ,
- gradient funkcji  $f$  w punkcie  $(e + 1, e + 1, e + 1)$  to wektor  $(-1, -1, -1)$ .

Funkcja  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest określona wzorem

$$g(x, y, z) = f(e^x + y, e^z + x, e^y + z).$$

Znaleźć gradient funkcji  $g$  w punkcie  $(0, 0, 0)$  oraz pochodną kierunkową funkcji  $g$  w punkcie  $(0, 0, 0)$  względem wektora  $(1, 1, 1)$ .

- **2.47.** Funkcja  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest zadana wzorem

$$F(x, y) = (e^x + e^{2y} + x^3 y^4 e^{xy}, \sin(3x) + 4y + x^5 + \cos^6(y)).$$

a) Uzasadnić, że funkcja  $F$  jest różniczkowalna.

b) Wiadomo, że istnieją zbiory otwarte  $U, V \subset \mathbb{R}^2$ , takie że  $(0, 0) \in U$ ,  $(2, 1) \in V$ , funkcja  $F$  jest różnowartościowa na  $U$ ,  $F(U) = V$ , zaś funkcja  $G := (F|_U)^{-1}: V \rightarrow U$  jest różniczkowalna. Wyznaczyć różniczkę funkcji  $G$  w punkcie  $(2, 1)$ .

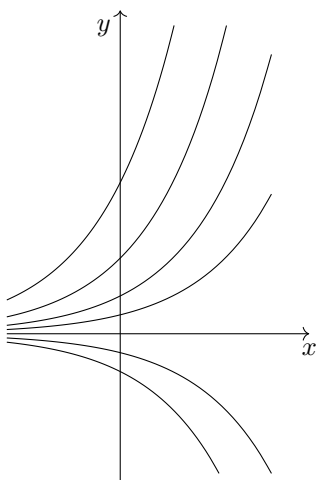
*Komentarz.* Żeby uzasadnić część „Wiadomo . . .” potrzeba twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, którego jeszcze nie znamy, ale jeśli założymy istnienie i różniczkowalność  $G$ , to do znalezienia  $DG(2, 1)$  wystarczy nam twierdzenie o różniczce funkcji odwrotnej lub o różniczce złożenia, z którego wynika wzór na różniczkę funkcji odwrotnej (nawet jeśli funkcja  $G$  nie wypisuje się jawnym wzorem).

- **2.48** (c.d. zadania 2.16). b) Funkcja  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna, a jej pochodne cząstkowe spełniają zależności

$$y \frac{\partial g}{\partial x} = x \frac{\partial g}{\partial y}, \quad z \frac{\partial g}{\partial y} = y \frac{\partial g}{\partial z}, \quad x \frac{\partial g}{\partial z} = z \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Udowodnić, że  $g(x, y) = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$  dla pewnej funkcji  $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  (ciągłej, różniczkowalnej na  $(0, \infty)$ ).

## 2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność



Rysunek 2.2.: Charakterystyki z zadania 2.50

c) Jak zmieni się teza, jeśli założymy, że

$$2y \frac{\partial g}{\partial x} = x \frac{\partial g}{\partial y}, \quad 3z \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \frac{\partial g}{\partial z}, \quad x \frac{\partial g}{\partial z} = 3z \frac{\partial g}{\partial x} ?$$

d) Jak uogólnić treść z podpunktów a), b) na przypadek  $\mathbb{R}^k$ ?

**2.49.** Funkcja  $g: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna i spełnia równanie

$$xg'_x + 2yg'_y = 0.$$

Udowodnić, że  $g(x, y) = \varphi(y^2/x)$  dla pewnej różniczkowalnej funkcji  $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**2.50** (metoda charakterystyk). Znaleźć różniczkowalną funkcję  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  spełniającą warunki

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(0, y) = \ln(1 + y^2).$$

W tym celu postąpić następująco. Dla każdego punktu  $(0, c)$  znaleźć tzw. charakterystykę, tzn. – w naszym przypadku – krzywą postaci  $x \mapsto (x, \psi(x))$ , która spełnia  $\psi'(x) = \psi(x)$  i przechodzi przez punkt  $(0, c)$ . Sprawdzić, że funkcja  $x \mapsto u(x, \psi(x))$  jest stała. Następnie dla każdego punktu  $(x, y)$  dobrać takie  $c$ , by charakterystyka wypuszczona z punktu  $(0, c)$  przechodziła przez  $(x, y)$  i wyznaczyć wzór jawny na  $u$ .

*Komentarz.* Podobne rozumowanie można też stosować w przypadku bardziej skomplikowanych równań różniczkowych [cząstkowych] (będzie na RRCz).

o **2.51** (kształcące). Funkcje  $f_{i,j}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ , są różniczkowalne. Kładziemy

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} f_{1,1}(x) & \dots & f_{1,k}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k,1}(x) & \dots & f_{k,k}(x) \end{pmatrix} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

## 2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność

Zrozumieć, że  $\frac{d}{dx} \det(\varphi(x))$  jest równe sumie  $k$  wyznaczników:  $i$ -ty z nich powstaje przez zastąpienie  $i$ -tego wiersza  $\varphi(x)$  przez  $(f'_{i,1}(x), \dots, f'_{i,k}(x))$ .

*Plan pracy.* Przypomnieć sobie, że wyznacznik jest wieloliniową funkcją wierszy macierzy. Zastosować twierdzenia o różniczce złożenia i pochodnej przekształcenia wieloliniowego.

**2.52.** Funkcja  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  jest zadana wzorem

$$f(x_1, \dots, x_k) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

a) Uzasadnić możliwie krótko (najlepiej jednym słowem – jakim?), że funkcja  $f$  jest różniczkowalna.

b) Niech  $v = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k$ . Wykazać, że  $f'_v(x) = 0$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}^k$ .

**2.53.** Podać przykład funkcji różniczkowalnej  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  i punktów  $x, y \in \mathbb{R}$ , dla których w twierdzeniu Lagrange'a o wartości średniej mamy ostrą nierówność.



### 3. Pochodne wyższych rzędów

#### Materiał do omówienia na zajęciach [3+ ćw. (?)]

*Teoria* (déjà vu?). Jeśli funkcja jest odpowiednio porządkowa, to po policzeniu pochodnej cząstkowej, możemy dalej różniczkować (po tej samej lub po innej zmiennej). Piszemy  $f'''_{xyz} := ((f'_x)'_y)'_z$  lub  $\frac{\partial^3}{\partial z \partial y \partial x} f := \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} f \right) \right)$  i  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f := \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} f$ .

- **3.1.** a) Niech  $f(x, y) = x^2 e^{3y} + \sin(4x)$ . Obliczyć  $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ .  
b) Niech

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Znaleźć  $g''_{xy}(0, 0)$  oraz  $g''_{yx}(0, 0)$ .

*Teoria.* Twierdzenie Schwarz'a<sup>1</sup> [o równości pochodnych mieszanych].<sup>2</sup>

- **3.2.** a) Czy istnieje funkcja różniczkowalna  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  spełniająca

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 1 + 2xy^3 + e^x \sin(y), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 3x^2 y^2 + 4y + e^x \cos(y)? \end{aligned}$$

- b) Czy istnieje funkcja różniczkowalna  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  spełniająca

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = e^x \cos(y), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = e^x \sin(y)?$$

- c+) Patrz zadania 3.13, 3.14.

*Teoria.* Dwukrotna różniczkowalność (patrz też: zadania 3.18, 3.19). Twierdzenia Schwarz'a [o symetrii drugiej różniczki].

*Teoria.* Różniczki jeszcze wyższych rzędów. Symetria  $n$ -tej różniczki. Funkcje klasy  $C^r$ .

- **3.3** (wcześnie nie takie straszne). a) Załóżmy, że funkcje  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l, g: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$  są dwukrotnie różniczkowalne. Dla  $x \in \mathbb{R}^k$  znaleźć  $D^2(g \circ f)(x)$ , tzn. dla dowolnych wektorów  $u, v \in \mathbb{R}^k$  wyznaczyć  $D^2(g \circ f)(x)(u, v)$ .

<sup>1</sup>W literaturze angielskiej można się też spotkać z nazwami: Clairaut's theorem, Young's theorem.

<sup>2</sup>Jeden z możliwych zestawów założeń:  $f$  klasy  $C^1$ , jedna z pochodnych mieszanych istnieje i jest ciągła.

### 3. Pochodne wyższych rzędów

*Koło ratunkowe.* Jeśli  $k = l = m = 1$ , to bez trudu można policzyć  $(g(f(x)))''$  – zrobić to (AM 1). Przez analogię można zapostulować wzór na  $D^2(g \circ f)(x)(u, v)$  – trzeba pamiętać, że drugie różniczki [w danym punkcie] to przekształcenia dwuliniowe, więc trzeba je nakarmić dwoma wektorami, i trzeba przypilnować, żeby napisy się parsowały (wymiaru i dziedziny wszystkiego muszą się zgadzać).

b) Ewentualnie, dla  $u, v, w \in \mathbb{R}^k$  wyznaczyć  $D^3(g \circ f)(x)(u, v, w)$  [przy założeniu, że  $f, g$  są trzykrotnie różniczkowalne].

\*\*\*

*Teoria* (dèjà vu?). Praktyczne wnioski ze wzoru Taylora – macierz drugiej różniczki a ekstrema lokalne (funkcja dwukrotnie różniczkowalna o wartościach rzeczywistych,  $D^2f$  jest symetryczna, więc ma rzeczywiste wartości własne). Kryterium Sylwestera.

*Uwaga.* Ważne przykłady, które trzeba mieć w pamięci:  $x^2 + y^2$ ,  $-x^2 - y^2$ ,  $x^2 - y^2$ ,  $x^4 + y^4$ ,  $-x^4 - y^4$ ,  $x^4 - y^4$  w otoczeniu  $(0, 0)$ .

- **3.4.** Znaleźć punkty krytyczne funkcji

$$f(x, y) = x^4 - y^4 - 4x^3 + 4xy^2 + 4x^2 - 4y^2$$

i rozstrzygnąć, czy są w nich lokalne ekstrema.

- **3.5.** Niech  $f(x, y, z) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) - \sin(x + y + z)$ .
  - a) Wyznaczyć punkty krytyczne funkcji  $f$ .
  - b) Czy w punktach  $(0, 0, 0)$  i  $(\pi, \pi, \pi)$  funkcja ma lokalne ekstrema?
  - c) Czy w punkcie  $(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$  funkcja ma lokalne ekstremum?
  - d) Czy w punkcie  $(1, 1, -1)$  funkcja ma lokalne ekstremum?

*Teoria.* Wzór Taylora [dokładniej]. Wielowskazażniki (multiindeksy).

- **3.6.** Niech  $f(x, y, z) = \sin(x)e^{y-z}$  dla  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
  - a) Wypisać [z definicji] wielomian Taylora drugiego stopnia,  $T_2(x, y, z)$ , dla funkcji  $f$  wokół punktu  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ .
  - b) Dla  $|x|, |y|, |z| \leq \delta$  podać konkretne szacowanie  $|f(x, y, z) - T_2(x, y, z)|$ .
  - c) Wypisać [w dowolny sposób] wielomian Taylora trzeciego stopnia,  $T_3(x, y, z)$ , dla funkcji  $f$  wokół punktu  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ .
- **3.7.** W zależności od wartości parametru  $a \in \mathbb{R}$  ustalić, czy funkcja

$$f(x, y) = \cos(x + y) + a \operatorname{tg}(xy), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

ma w punkcie  $(0, 0)$  ekstremum lokalne (i jakie) czy też go nie ma.

## Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

**3.8** (powtórka z GALu). Przypomnieć sobie z GALu materiał dotyczący form kwadratowych: macierze symetryczne, kongruencja macierzy, diagonalizacja przez kongruencje, sygnatura formy kwadratowej itp.

### 3. Pochodne wyższych rzędów

- 3.9.** a) Niech  $f(x, y) = y^3 - 3x^2y$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Sprawdzić, że  $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ .  
 b) Niech  $g(x, y) = e^x \cos(y)$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Sprawdzić, że  $g''_{xx} + g''_{yy} = 0$ .  
 c) Niech  $h(x, y) = \ln((x^2 + y^2)^{1/2})$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Sprawdzić, że  $h''_{xx} + h''_{yy} = 0$ .

**3.10.** Załóżmy, że dla funkcji  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  pochodna mieszana  $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x}f)$  istnieje wszędzie i ciągła. Czy wynika z tego istnienie  $\frac{\partial}{\partial y}f$ ?

**3.11** (siodło dla... modliszki?). *Motywacja.* Na wykładzie pojawiła się funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{jeśli } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{jeśli } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

dla której  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  (przykład Peano). Niniejsze zadanie ma być [częściową] próbą zrozumienia, jak wygląda wykres tej funkcji i dlaczego pochodne mieszane są różne.

a) Wypisać  $f(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$  i uprościć wynik.

b) Zrozumieć, jak wygląda wykres funkcji  $f$ : gdy  $r$  jest ustalone i  $\alpha$  zmienia się od 0 do  $2\pi$ , to wartości  $f(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$  zmieniają się okresowo i mamy cztery maksima („górkę”) i cztery minima („dołki”). Zatem, jeśli uwzględnimy zmianę  $r$  to zobaczymy powierzchnię, która ma cztery „grzbiety” („fałdy?”), a pomiędzy nimi cztery „doliny”. Powierzchnia ta wygląda nieco jak siodło, tylko takie dla stworzenia, które ma cztery nogi (mogłaby w nim siedzieć np. modliszka – cztery odnóża w czterech strzemionach, lejce trzymane w pierwszej parze odnóży, która jest przekształcona w narząd chwytny (być może byłoby jej niewygodnie z odwłokiem, ale trudno)).

c) Uświadomić sobie, że jeśli obrócimy wykres funkcji  $f$  [w  $\mathbb{R}^3$ ] wokół osi  $OZ$  o  $90^\circ$ , to otrzymamy tę samą powierzchnię. Przy takim obrocie oś  $OX$  przejdzie na oś  $OY$ , zaś oś  $OY$  – na *minus* oś  $OX$ .

**TODO** d) [under construction] Nasza funkcja spełnia  $f(x, y) = f(-y, x)$ . Zrozumieć, że stąd wynika, że  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ . Spróbować to zrozumieć również czysto geometrycznie, korzystając z poprzedniego podpunktu c)... (?)

e) Czy da się jakoś łatwo – z pomocą wykresu, ale bez rachunków – zrozumieć, dlaczego  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq 0$ ? (??)

**3.12** (Schwarz, 1873). Funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest dana wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctg(y/x) - y^2 \arctg(x/y) & \text{jeśli } xy \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } xy = 0. \end{cases}$$

Obliczyć  $f''_{xy}(0, 0)$  oraz  $f''_{yx}(0, 0)$ .

- o **3.13** (por. zad. 3.14). Funkcje  $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  są klasy  $C^1$  i spełniają zależność

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$$

### 3. Pochodne wyższych rzędów

[dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}^2$ ]. Wykazać, że istnieje funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  klasy  $C^2$ , taka że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y).$$

*Wskazówka.* Jeśli istniałaby taka funkcja  $f$ , to wtedy można by zapisać

$$f(x, y) = f(0, 0) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0) ds + \dots$$

(być może dobrze jest zrobić rysunek, żeby zrozumieć, co (i dlaczego) będzie w miejscu wielokropka).

- **3.14** (por. zad. 3.13). Sprawdzić, że funkcje  $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dane wzorami

$$f_1(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

spełniają [dla wszystkich  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ] zależność

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Uzasadnić, że *nie* istnieje funkcja różniczkowalna  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  taka że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y).$$

*Wskazówka.* Rozważyć  $g(t) = f(\cos t, \sin t)$ .

**3.15** (równania Cauchy'ego–Riemanna). Funkcje  $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  są dwukrotnie różniczkowalne i spełniają  $u'_x = v'_y$ ,  $u'_y = -v'_x$  [we wszystkich punktach dziedziny]. Sprawdzić, że  $u''_{xx} + u''_{yy} = 0 = v''_{xx} + v''_{yy}$ .

**3.16. Oznaczenia i terminologia.** Dany jest zbiór otwarty  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  (współrzędne oznaczamy  $x_1, x_2, x_3$ ). Pole wektorowe to funkcja określona na  $\Omega$  o wartościach w  $\mathbb{R}^3$ .

Rotacją pola wektorowego  $F = (F_1, F_2, F_3): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  [klasy  $C^1$ ] nazywamy pole wektorowe

$$\text{rot } F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

(kilka uwag pobocznych w stopce<sup>3</sup>). Jeśli  $\text{rot } F = (0, 0, 0)$  [we wszystkich punktach zbioru  $\Omega$ ], to mówimy, że pole  $F$  jest bezwirowe.

Jeśli istnieje funkcja  $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  [klasy  $C^1$ ], taka że  $F = \nabla U$ , to mówimy, że  $F$  jest polem gradientowym, a funkcję  $U$  nazywamy potencjałem tego pola.

a) Załóżmy, że pole wektorowe  $F = (F_1, F_2, F_3): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  klasy  $C^1$  jest polem gradientowym pewnego potencjału  $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  klasy  $C^2$ :  $F = \nabla U$ . Uzasadnić, że wówczas  $\text{rot } F = (0, 0, 0)$ .

<sup>3</sup>Formalnie mamy  $\text{rot } F = \nabla \times F = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \times [F_1, F_2, F_3]$  (iloczyn wektorowy). Inne oznaczenie na rotację to  $\text{curl } F$ .

### 3. Pochodne wyższych rzędów

b) Załóżmy, że zbiór  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  jest gwiaździsty, tzn. istnieje punkt  $x_0 \in \Omega$ , taki że dla każdego  $x \in \Omega$  odcinek łączący punkty  $x$  i  $x_0$  jest zawarty w  $\Omega$ . Załóżmy, że pole wektorowe  $F = (F_1, F_2, F_3): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  klasy  $C^1$  jest bezwirowe:  $\text{rot } F = (0, 0, 0)$ . Uzasadnić, że funkcja  $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zadana wzorem

$$U(x) := \int_0^1 \langle f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle dt.$$

jest potencjałem pola wektorowego  $F$ .

**3.17.** Niech  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ . Funkcja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  jest klasy  $C^2$  i spełnia równanie  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$  [dla wszystkich  $(x, y) \in A$ ]. Ponadto wiadomo, że dla wszystkich  $x > 0$  zachodzi

$$f(x, e^x) = \sin x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, e^x) = \frac{1}{2} \cos x.$$

Obliczyć macierz drugich pochodnych cząstkowych funkcji  $f$  w punkcie  $(x, e^x)$  dla  $x > 0$  (lub ewentualnie wykazać, że nie istnieje funkcja spełniająca założenia zadania).

*Sugestia.* Być może warto najpierw zerknąć na zadanie 2.21. Ponadto być może opłaca się wprowadzić funkcję jednej zmiennej  $g(x) = f(x, e^x)$  (a może lepiej  $g(t) = f(t, e^t)$ ?).

- **3.18** (wokół definicji drugiej różniczki, cz. 1). *Motywacja.* Przy okazji definicji różniczek wyższych rzędów pojawiają się przekształcenia wieloliniowe (i przekształcenia liniowe o wartościach w przestrzeni przekształceń liniowych). To zadanie ma pomóc w oswojeniu się z tymi obiektami.

*Notacja.* Przez  $L(V, W)$  oznaczamy przestrzeń przekształceń liniowych z przestrzeni liniowej  $V$  w przestrzeń liniową  $W$ . Przez  $L(V_1, \dots, V_n; W)$  oznaczamy przestrzeń przekształceń  $n$ -liniowych z przestrzeni liniowej  $V_1 \times \dots \times V_n$  w przestrzeń liniową  $W$ .

a) Przemyśleć, że przestrzenie liniowe  $L(\mathbb{R}^{k_1}, L(\mathbb{R}^{k_2}, \mathbb{R}^l))$  oraz  $L(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{k_2}; \mathbb{R}^l)$  są izomorficzne. W tym celu zrozumieć, że jest jeden rozsądny i kanoniczny sposób wypisania izomorfizmu (oraz izomorfizmu odwrotnego) między tymi przestrzeniami. [W razie potrzeby skonsultować się np. z notatkami do wykładu lub wybranym skryptem.]

ą) Przypomnieć sobie również definicję normy przekształcenia liniowego i wieloliniowego i sprawdzić, że wypisane izomorfizmy są izometriami.

b) Ewentualnie przemyśleć, że przestrzenie liniowe

$$L(\mathbb{R}^{k_1}, L(\mathbb{R}^{k_2}, L(\mathbb{R}^{k_3}, \mathbb{R}^l)))$$

oraz  $L(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{k_2}, \mathbb{R}^{k_3}; \mathbb{R}^l)$  są izomorficzne.

c) Dane są przestrzenie liniowe  $V, W$  (powiedzmy skończeniowymiarowe). Dla  $S \in L(V, W)$  oraz  $T_1, T_2 \in L(W, V)$  kładziemy  $g(T_1, T_2)(S) := T_1 S T_2$ . Zrozumieć poniższe napisy [i sprawdzić ich poprawność]:

$$g(T_1, T_2) \in L(L(V, W), L(W, V)),$$

$$g \in L\left(L(W, V), L(W, V); L(L(V, W), L(W, V))\right).$$

### 3. Pochodne wyższych rzędów

- o **3.19** (wokół definicji  $D^2f$ , cz. 2). *Motywacja.* Poniższy tekst ma pomóc w przetrzeźnieniu definicji drugiej różniczkii z wykładu; na samym końcu jest też minizadanko (podpunkt b). Pewnie warto najpierw zerknąć na zadanie 3.18.

*Różniczkowalność (powtórzenie).* Wszędzie poniżej zakładamy, że mamy funkcję  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ , różniczkowalną.<sup>4</sup> Dla każdego punktu  $p \in \mathbb{R}^k$  istnieje więc przekształcenie liniowe  $Df(p) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ . W bazach standardowych możemy utożsamiać je z macierzą rozmiaru  $l \times k$ ; bierze ono wektor  $h \in \mathbb{R}^k$  i zwraca wektor  $Df(p)h \in \mathbb{R}^l$ ,

$$\mathbb{R}^k \ni h \mapsto Df(p)h \in \mathbb{R}^l;$$

jest ono liniowym przybliżeniem naszej funkcji:  $f(p+h) \approx f(p) + Df(p)h$ .

*Plan.* Żeby zrozumieć, co to znaczy, że funkcja  $f$  jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie  $p$ , musimy na pewno mieć  $Df(x)$  określone w pewnym otoczeniu punktu  $p$  [u nas istnieje wszędzie], a dalej nadać jakiś sens przybliżonej równości

$$Df(p+h) \approx Df(p) + \dots h$$

[m.in. zrozumieć, co wpisać w miejscu kropek].

*Zależność od  $x$ .* Rozważamy więc teraz funkcję, która punktowi  $x \in \mathbb{R}^k$  przyporządkowuje przekształcenie liniowe  $Df(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ . Oznaczamy tę funkcję przez

$$Df: \mathbb{R}^k \longrightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$$

– jest ona zadana po prostu przez

$$\mathbb{R}^k \ni x \mapsto Df(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l).$$

Sama funkcja  $Df$  oczywiście [zazwyczaj] nie jest liniowa – dopiero jeśli nakarmimy ją argumentem  $x \in \mathbb{R}^k$ , to dostaniemy przekształcenie liniowe (które z kolei możemy nakarmić wektorem  $h \in \mathbb{R}^k$ , żeby dostać wektor w  $\mathbb{R}^l$ ).

*Formalna definicja.* Ponieważ przestrzeń  $L(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^l)$  możemy utożsamiać z  $\mathbb{R}^{kl}$ , to umiemy powiedzieć, co to znaczy, że funkcja  $Df$  jest różniczkowalna w jakimś punkcie swojej dziedziny. Mówimy zatem, że funkcja  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  jest dwukrotnie różniczkowalna w pewnym punkcie  $p \in \mathbb{R}^k$ , jeśli funkcja  $Df: \mathbb{R}^k \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$  jest różniczkowalna w punkcie  $p \in \mathbb{R}^k$ .

*Przejsie do przekształceń dwuliniowych.* Znalaziona w ten sposób różniczka

$$D^2f(p) := D(Df)(p)$$

to formalnie element przestrzeni  $L(\mathbb{R}^k, L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l))$ : jeśli nakarmimy ją wektorem  $h_1 \in \mathbb{R}^k$ , to dostaniemy przekształcenie liniowe (element przestrzeni  $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ ), które dalej możemy nakarmić wektorem  $h_2 \in \mathbb{R}^k$ , żeby dostać wektor w  $\mathbb{R}^l$ . Ponieważ zależność i od  $h_1$ , i od  $h_2$  jest liniowa (por. zadania 3.18 a)), to możemy – i będziemy tak robić – myśleć o  $D^2f(p)$  jako o elemencie przestrzeni  $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^l)$ , tj. jako o przekształceniu dwuliniowym

$$D^2f(p): \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$$

<sup>4</sup>Można założyć, że  $f$  jest określona na pewnym otwartym podziorze  $U = \text{int } U \subset \mathbb{R}^k$ , ale będzie nam wygodniej śledzić wszystko dla  $U = \mathbb{R}^k$ .

### 3. Pochodne wyższych rzędów

(które trzeba nakarmić dwoma wektorami  $h_1 \in \mathbb{R}^k, h_2 \in \mathbb{R}^k$ , żeby dostać wektor w  $\mathbb{R}^l$ ).

a) Spokojnie przemyśleć teorię z wykładu i krytycznie przeczytać odpowiednie fragmenty skryptu lub powyższy tekst.

- o b) [Nadal przy założeniu, że  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  jest różniczkowalna [wszędzie]]. Ustalmy  $p \in \mathbb{R}^k$ . Udowodnić lub uzasadnić lub uświadomić sobie, że następujące warunki są równoważne:

(i) Funkcja  $f$  jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie  $p \in \mathbb{R}^k$  [w wyżej opisanym sensie].

(ii) Dla każdego ustalonego  $h_1 \in \mathbb{R}^k$  funkcja  $\mathbb{R}^k \ni x \mapsto Df(x)h_1 \in \mathbb{R}^l$  jest różniczkowalna [jako przekształcenie z  $\mathbb{R}^k$  w  $\mathbb{R}^l$ ] w punkcie  $p \in \mathbb{R}^k$ .

**3.20** (w miarę kształcące i ogólnorozwojowe). Poniżej pracujemy z [dwukrotnie różniczkowalnymi] funkcjami określonymi na  $\mathbb{R}^k$ , o wartościach rzeczywistych. Laplasjan to operator różniczkowy

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

czyli, dla  $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  i  $x \in \mathbb{R}^k$ ,

$$\Delta h(x) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 h}{\partial x_k^2}(x).$$

Założmy, że macierz  $A$ , rozmiaru  $k \times k$ , jest ortogonalna:  $AA^T = I$  [oraz  $A^T A = I$ ], zaś funkcja  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna. Wykazać, że laplasjan jest niezmienniczy przy ortogonalnej zamianie zmiennych:

$$\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A,$$

tnz., jeśli oznaczymy  $g(x) := (f \circ A)(x) = f(Ax)$  dla  $x \in \mathbb{R}^k$ , to

$$\Delta g(x) = (\Delta(f \circ A))(x) = (\Delta f)(Ax).$$

*Plan pracy i sugestia.* Można – ale proszę raczej tego nie robić – rozpisać wszystko we współrzędnych  $A = (a_{ij})$ ,  $g(x) = f((\sum_j a_{ij} x_j)_i)$ , a potem dwukrotnie przyłożyć regułę łańcuchową. Chyba prościej – a na pewno bardziej przejrzyście, bardziej kształcące i bardziej uczenie – jest zrozumieć jak  $D^2 g(x)$  [tj. macierz drugich pochodnych cząstkowych funkcji  $g$  (która zadają formę dwuliniową)] wyraża się w terminach  $D^2 f(Ax)$  i  $A$  (por. zad. 3.3), a następnie zauważyć, że  $\Delta g(x) = \text{tr}(D^2 g(x))$ .

**3.21** (będzie na RRCz; nie jestem przekonany, że jest bardzo pouczające lub istotne). Wyrazić dwuwymiarowy laplasjan we współrzędnych biegunowych: założmy, że funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna, niech  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ ,  $g(r, \alpha) := f(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$  (dla  $r > 0$ ). Sprawdzić, że

$$f''_{xx} + f''_{yy} = g''_{rr} + \frac{1}{r} g'_r + \frac{1}{r^2} g''_{\alpha\alpha}.$$

*Plan pracy.* Można po prostu przyłożyć dwa razy regułę łańcuchową, żeby obliczyć prawą stronę.

### 3. Pochodne wyższych rzędów

**3.22** (z zajęć na Wydziale Chemii UW). Niech  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 25)(x^2 - y - 5)$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Zachodzą wtedy równości

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x(x^2 - y - 5) + 2x(x^2 + y^2 - 25), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y(x^2 - y - 5) - (x^2 + y^2 - 25).\end{aligned}$$

- a) Znaleźć wszystkie punkty, w których gradient funkcji  $f$  jest wektorem zerowym.
- b) Znaleźć ekstrema lokalne funkcji  $f$ .
- c) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  na zbiorze  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0\}$  [lub uzasadnić, że funkcja którejś z nich lub obu nie przyjmuje].

**3.23.** Znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji

$$f(x, y) = 3x^4 - \frac{2}{3}y^3 + 2x^2y - 2x^2 + y^2.$$

Dla każdego z tych punktów rozstrzygnąć, czy funkcja  $f$  ma w tym punkcie lokalne ekstremum [a jeśli tak, to czy jest to minimum czy maksimum].

**3.24.** Znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji

$$f(x, y) = x^3y - 3x^2y + y^2.$$

Dla każdego z tych punktów rozstrzygnąć, czy funkcja  $f$  ma w tym punkcie lokalne ekstremum [a jeśli tak, to czy jest to minimum czy maksimum].

**3.25.** Wypisać wielomian Taylora  $T_2(x, y)$  stopnia 2 dla funkcji  $f(x, y) = e^x \sin(y)$  wokół punktu  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Wykazać, że dla  $|x|, |y| \leq \delta \leq 1/4$  spełnione jest oszacowanie

$$|f(x, y) - T_2(x, y)| < \delta^3.$$

**3.26.** Funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie  $(0, 0)$  i spełnia

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - e^{x-y}}{x^2 + y^2} = 1.$$

Wyznaczyć  $Df(0, 0)$  oraz  $D^2f(0, 0)$ .

**3.27.** Funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie  $(0, 0)$  i spełnia

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) + \cos(2x + 3y) + 2x^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

a) Uzasadnić, że  $(0, 0)$  jest punktem krytycznym funkcji  $f$ , ale funkcja  $f$  nie ma w nim lokalnego ekstremum.

b) Uzasadnić, że funkcja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowana wzorem  $g(y) = f(0, y)$  ma w punkcie  $y = 0$  lokalne minimum właściwe.

c) Niech  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie dana wzorem  $h(x) = f(x, 0)$ . Podać przykłady funkcji  $f$  [spełniających założenia zadania], świadczące o tym, że w punkcie  $x = 0$  funkcja  $h$  może mieć zarówno lokalne minimum właściwe, lokalne maksimum właściwe, jak i punkt przegięcia.



### 3. Pochodne wyższych rzędów

**3.28.** Funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest dana wzorem

$$f(x, y) = \|(x, y) - (1, 1)\|_2 + \|(x, y) - (-1, 1)\|_2 + \|(x, y) - (1, -1)\|_2 + \|(x, y) - (-1, -1)\|_2.$$

Znaleźć – najlepiej w możliwie prosty sposób i wykonując możliwie najmniej rachunków – wielomian Taylora stopnia 3 funkcji  $f$  wokół punktu  $(0, 0)$ ; odpowiedź oczywiście uzasadnić. (Może – przy pewnej dozie zawziętości i skupienia – da się przeprowadzić wszystkie konieczne obliczenia w pamięci, bez kartki?).

**3.29.** W zależności od wartości parametru  $a \in \mathbb{R}$  ustalić, czy funkcja

$$f(x, y) = ay(e^x - 1) + x \sin x + 1 - \cos y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

ma w punkcie  $(0, 0)$  ekstremum lokalne (i jakie) czy też go nie ma.

**3.30.** Zbiór  $A \subset \mathbb{R}^k$  jest wypukły i otwarty. Funkcja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna w zbiorze  $A$  i  $D^2 f(x) \geq 0$  dla  $x \in A$  [różniczka rzędu II, tj.  $D^2 f(x)$ , wyznacza w każdym punkcie  $x \in A$  formę kwadratową półokreśloną nieujemnie]. Udowodnić, że funkcja  $f$  jest wypukła.

**3.31.** Funkcja  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna, zaś  $p \in \mathbb{R}^k$  jest punktem krytycznym:  $\nabla f(p) = 0$ . Udowodnić, że jeśli istnieje otoczenie  $U = \text{int } U \subset \mathbb{R}^k$  punktu  $p$ , takie że  $D^2 f(x) \leq 0$  dla  $x \in U$  [różniczka rzędu II, tj.  $D^2 f(x)$ , wyznacza w każdym punkcie  $x \in U$  formę kwadratową półokreśloną niedodatnio], to  $f$  ma w punkcie  $p$  maksimum lokalne [niekoniecznie właściwe/ściśle].

## 4. Teoria lokalna odwzorowań klasy $C^1$

### Materiał do omówienia na zajęciach [3–4 ćw. (?)]

*Teoria.* Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym.

- 4.1. Zbadać lokalną bijektywność odwzorowań  $f, g, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  zadanych wzorami

$$\begin{aligned}f(x, y) &= (x^2 - y^2, 2xy), \\g(x, y) &= (x^5 + x^3, y + \arctan(y)), \\h(x, y) &= (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).\end{aligned}$$

*Teoria.* Dyfeomorfizm. Przekształcenie odwrotne do dyfeomorfizmu jest dyfeomorfizmem. Złożenie dyfeomorfizmów jest dyfeomorfizmem

- 4.2. Rozstrzygnąć, które z poniższych [otwartych] podzbiorów płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$  są dyfeomorficzne: kwadrat, cała płaszczyzna, pierwsza ćwiartka, górna półpłaszczyzna, płaszczyzna z wyjątą półprostą, płaszczyzna z wyjątą prostą, nakłuta płaszczyzna.  
Podać przykłady dyfeomorfizmów (jeśli istnieją) – wypisać je wprost wzorem lub jako złożenie kilku dyfeomorfizmów wyrażonych wzorem.
- 4.3. Skonstruować dyfeomorfizm kwadratu na trójkąt.
- 4.4. Powiemy, że zbiór  $A \subset \mathbb{R}^k$  jest łukiem regularnym, jeśli istnieje przedział  $J \subset \mathbb{R}$  oraz różnowartościowa funkcja  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^k$  klasy  $C^1$ , taka że  $\varphi'(t) \neq 0$  dla każdego  $t \in J$  oraz  $\varphi(J) = A$ .
  - a) Zbiory  $U, V \subset \mathbb{R}^k$  są otwarte,  $F$  jest dyfeomorfizmem  $U$  na  $V$ ,  $A \subset U$  jest łukiem regularnym. Wykazać, że  $F(A)$  jest łukiem regularnym.
  - b) Wskazać dyfeomorfizm zbioru  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \sqrt{3}|x|\}$  na otwartą górną półpłaszczyznę  $H$ . Czy istnieje dyfeomorfizm  $F: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^2$ , taki że  $F(B) = H$ ?
  - c) Niech  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ . Czy istnieje dyfeomorfizm  $F: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^2$ , taki że  $F(C) = H$ ?
- 4.5. a) Wypisać wzorem dyfeomorfizm  $\mathbb{R}^k$  na kulę jednostkową (i odwrotny).
  - a) Wypisać wzorem dyfeomorfizm  $\mathbb{R}^k$  na kulę jednostkową w normie  $\ell_p$  (i odwrotny).
  - b) Podać przykład dyfeomorfizmu  $\mathbb{R}^2$  na półkole.
- 4.6. a) Wykazać, że równanie

$$xe^y + ye^x = 2$$

#### 4. Teoria lokalna odwzorowań klasy $C^1$

wyznacza w otoczeniu punktu  $x = 0$  zmienną  $y$  jako funkcję klasy  $C^1$  zmiennej  $x$ . Obliczyć  $y'(0)$ .

b) Czy funkcja  $y = y(x)$  jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie  $x = 0$ ?

- **4.7.** a) Wykazać, że istnieje  $\varepsilon > 0$  i funkcje  $u, v: (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , klasy  $C^1$ , takie że dla wszystkich  $(x, y) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^2$  zachodzi

$$\begin{cases} (1+y)e^{u(x,y)} + (1+x)e^{v(x,y)} = 2, \\ 2u(x,y)e^y + v(x,y)e^x = 0. \end{cases}$$

a) Czy może się zdarzyć, że znalezione funkcje  $u, v$  są określone nie tylko w otoczeniu punktu  $(0, 0)$ , ale wręcz na całym  $\mathbb{R}^2$  [i są klasy  $C^1$ , i spełniają powyższy układ równań]?

b) Czy istnieje  $\varepsilon > 0$ , taki że funkcje  $u, v$  klasy  $C^1$  spełniający powyższy układ równań są wyznaczone jednoznacznie?

- **4.8.** Wykazać twierdzenie o funkcji odwrotnej bezpośrednio z twierdzenia o funkcji uwikłanej.

### Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

**4.9.** Odwzorowanie  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest dane wzorami  $F(x, y) = (u, v)$ ,  $u = x(x^2 - 3y^2)$ ,  $v = y(y^2 - 3x^2)$ . Wyznaczyć wszystkie takie punkty  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , że  $F$  odwzorowuje bijektywnie pewne otoczenie punktu  $(x_0, y_0)$  na otoczenie punktu  $(u_0, v_0) = F(x_0, y_0)$ .

Jednym z takich punktów jest  $(1, 2)$ , zatem w pewnym otoczeniu punktu  $(-11, 2)$  jest określone odwzorowanie odwrotne  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ , przekształcające otoczenie punktu  $(-11, 2)$  na otoczenie punktu  $(1, 2)$ . Uzasadnić, że jest ono klasy  $C^1$  i obliczyć  $\frac{\partial y}{\partial u}(-11, 2)$ .

**4.10.** Odwzorowanie  $F: (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest dane wzorem

$$F(s, t) = (F_1(s, t), F_2(s, t)) = (s + t \sin s, \ln(\cos s) + t \cos s).$$

a) Sprawdzić, że jeśli  $s_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$  oraz  $t_0 \in \mathbb{R}$  spełniają  $t_0 \cos s_0 \neq -1$ , to  $DF(s_0, t_0)$  jest izomorfizmem liniowym.

b) Uzasadnić, że w pewnym otoczeniu  $V$  punktu  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  jest określone odwzorowanie  $G = (G_1, G_2)$ , klasy  $C^1$ , będące lokalnym odwrotnym do  $F$ . Uzasadnić również – najlepiej w możliwie prosty sposób, bez wypisywania *explicite*  $DG(x, y)$  – że dla każdego punktu  $(x, y) \in V$  wektory  $\nabla G_1(x, y)$  oraz  $\nabla G_2(x, y)$  są prostopadłe.

c) Rozstrzygnąć, czy w pewnym otoczeniu punktu  $(0, -1)$  funkcja  $F$  jest różnowartościowa.

**4.11.** Zbiór  $U \subset \mathbb{R}^k$  jest otwarty, funkcja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest różniczkowalna w sposób ciągły. Załóżmy, że istnieje stała  $\lambda > 0$ , taka że dla każdych  $x, y \in U$  zachodzi

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \geq \lambda \|x - y\|_2.$$

Wykazać, że dla każdego  $x \in U$  różniczka  $Df(x)$  jest izomorfizmem liniowym. Wynioskować, że  $f$  jest dyfeomorfizmem  $U$  na  $f(U)$ .

#### 4. Teoria lokalna odwzorowań klasy $C^1$

- **4.12** (kształcące). Funkcja  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest klasy  $C^1$ . Dla każdego  $x \in \mathbb{R}^k$  zachodzi  $\|Df(x)\|_{2 \rightarrow 2} \leq 1/2$  (tzn. różniczka  $Df(x)$  jest przekształceniem liniowym o normie [operatorowej]  $\leq 1/2$ ). Wykazać, że funkcja dana wzorem  $g(x) = x + f(x)$  jest dyfeomorfizmem  $\mathbb{R}^k$  na  $\mathbb{R}^k$ .

*Wskazówka.* Postępować podobnie jak w dowodzie ważnego twierdzenia z wykładu (w szczególności to zadanie jest dlatego kształcące, że zmusza do prześledzenia tego dowodu).

**4.13.** Zbiór  $U \subset \mathbb{R}^k$  jest otwarty, funkcja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest różniczkowalna w sposób ciągły. Zbiór  $A \subset U$  jest zwarty, funkcja  $f$  jest różnowartościowa na  $A$  i dla każdego  $a \in A$  różniczka  $Df(a)$  jest izomorfizmem liniowym. Wykazać, że istnieje zbiór otwarty  $V$ ,  $A \subset V \subset U$ , taki że  $f$  jest różnowartościowa na  $V$ , zbiór  $f(V)$  jest otwarty, zaś funkcja odwrotna  $(f|_V)^{-1}: f(V) \rightarrow V$  jest różniczkowalna w sposób ciągły.

**4.14.** Niech  $F(x, y) = (e^{x+y} + e^{x-y}, e^{x+y} - e^{x-y})$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Znaleźć  $F(\mathbb{R}^2)$  i ustalić, czy  $F$  jest dyfeomorfizmem (na swój obraz).

- **4.15.** Rozważmy następujące [otwarte, niejednostopne] podzbiory płaszczyzny:

$$\begin{aligned} A_{0,\infty} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|x\|_2\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} && \text{(nakłuta płaszczyzna),} \\ A_{0,1} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|x\|_2 < 1\} && \text{(nakłuta kula),} \\ A_{1,\infty} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|x\|_2\} && \text{(zewnątrze dysku),} \\ A_{1,3} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|x\|_2 < 3\} && \text{(pierścień),} \\ B &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\} \setminus ([-1/2, 1/2] \times \{0\}) && \text{(kula bez odcinka),} \\ C &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\} \setminus ([0, 1/2] \times \{0\}) && \text{(kula bez innego odcinka).} \end{aligned}$$

Podać przykłady dyfeomorfizmów tych zbiorów (wypisać wprost wzorem lub jako złożenie kilku dyfeomorfizmów, z których każdym jest wyrażony wzorem).

*Sugestia.* W przypadku zbiorów  $B, C$  nie brnąć w straszne rachunki (poskładać różne proste dyfeomorfizmy). Być może (?) pomocne będzie wypisanie dla każdej pary zbiorów  $A_{0,\infty}, A_{0,1}, A_{1,\infty}, A_{1,3}$  bezpośredniego dyfeomorfizmu (bez przechodzenia przez inne zbiory).

**4.16.** Podać przykład dyfeomorfizmu odwzorowującego płaszczyznę  $\mathbb{R}^2$  na zbiór

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v > 0\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u < 0, v > -1\}.$$

(Wypisać wprost wzorem lub jako złożenie kilku dyfeomorfizmów, z których każdy jest wyrażony wzorem).

**4.17.** Podać przykład dyfeomorfizmu odwzorowującego płaszczyznę  $\mathbb{R}^2$  na zbiór

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > v > 0, uv < 1\}.$$

(Wypisać wprost wzorem lub jako złożenie kilku dyfeomorfizmów, z których każdy jest wyrażony wzorem).

#### 4. Teoria lokalna odwzorowań klasy $C^1$

**4.18.** Podać przykład dyfeomorfizmu odwzorowującego płaszczyznę  $\mathbb{R}^2$  na zbiór

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > v^2 > 0, u + v < 6\}.$$

(Wypisać wprost wzorem lub jako złożenie kilku dyfeomorfizmów, z których każdy jest wyrażony wzorem).

**4.19.** W  $\mathbb{R}^4$  rozważamy zbiory otwarte

$$U = \{(u, v, s, t) \in \mathbb{R}^4 : u^2 + v^2 > 0, t > 0\},$$

$$X = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 > 0, w > 0\}$$

(różne nazwy współrzędnych dla wygody) oraz odwzorowanie  $F: U \rightarrow X$  zadane przez

$$F(u, v, s, t) = (x, y, z, w), \quad \begin{cases} x = tu, \\ y = tv, \\ z = s, \\ w = u^2 + v^2. \end{cases}$$

Wykazać, że  $F$  jest dyfeomorfizmem  $U$  na  $X$  (sugestia: wyznaczyć wzorem  $F^{-1}$ ). Niech

$$T = \{(x, y, z, w) \in X : x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 4\sqrt{x^2 + y^2}, w = 1\}.$$

Wyznaczyć  $F^{-1}(T)$  (opisać za pomocą prostych równań w zmiennych  $u, v, s, t$ ).

- o **4.20** (TFU – łagodny przykładzik). Rozważamy równanie

$$F(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

a) Z pomocą komputera sprawdzić, jak wygląda zbiór opisany tym równaniem (można np. wpisać w Wolframie `plot x^3 + y^3 - 3xy = 0`).

b) Uzasadnić – formalnie, za pomocą jakichś rachunków – że w otoczeniu punktu  $(0, 0)$  nasze równanie nie wyznacza jednoznacznie zmiennej  $y$  jako funkcji zmiennej  $x$ .

c) Czy w otoczeniu punktu  $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$  nasze równanie wyznacza jednoznacznie zmienną  $y$  jako funkcję zmiennej  $x$ ? Plan pracy: sprawdzić, co daje TFU, porównać z obrazkiem z pierwszego podpunktu (może warto coś dorysować) i zrozumieć, co się nam nim dzieje, a na koniec uzasadnić ściśle ostateczną odpowiedź.

d) Załóżmy, że mamy punkt  $(x_0, y_0)$  spełniający  $F(x_0, y_0) = 0$ , w którego pewnym otoczeniu nasze równanie wyznacza jednoznacznie  $y$  jako funkcję zmiennej  $x$ :

$$x^3 + y(x)^3 - 3xy(x) = 0 \quad (\text{lokalnie, w pewnym otoczeniu } (x_0, y_0)).$$

Znaleźć punkty krytyczne funkcji  $y = y(x)$ . Plan pracy: można zacząć od zrozumienia, co się dzieje na rysunku, albo można najpierw zróżniczkować powyższą równość po  $x$ , rozwiązać otrzymane równanie (pamiętając, że mamy także równanie  $F(x, y(x)) = 0$ ), a następnie otrzymany wynik skonfrontować z rysunkiem (znowu, może warto coś dorysować) i wtedy zrozumieć, co się na nim dzieje.

#### 4. Teoria lokalna odwzorowań klasy $C^1$

e) Czy w znalezionym punkcie krytycznym funkcja  $y = y(x)$  ma ekstremum lokalne? Odczytać odpowiedź z rysunku oraz uzasadnić ją formalnie, za pomocą jakichś rachunków.

f) Co by się zmieniło, gdybyśmy rozpatrywali równanie

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0 \text{ to ustalona liczba})?$$

o **4.21** (dydaktyczne). Niech  $P(x, y) = x^3y^2 + 3x^2y^3 - xy - 2x - y^2 + 1$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

a) Wykazać, że istnieją funkcje rzeczywiste  $g, h$  klasy  $C^1$ , określone na pewnym przedziale otwartym  $J \subset \mathbb{R}$  zawierającym 0, takie że  $P(x, g(x)) = 0 = P(x, h(x))$  oraz  $g(x) < h(x)$  dla każdego  $x \in J$ . Znaleźć  $g'(0), h'(0)$ .

b) Wykazać, że istnieje pewien przedział otwarty  $I \subset \mathbb{R}$  zawierający 0, taki że istnieje dokładnie jedna funkcja  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  klasy  $C^1$ , taka że  $P(f(y), y) = 0$ .

*Uwagowskazówka do obu podpunktów.* Zadanie jest proste, jak się zrozumie, co trzeba mieć, żeby zacząć odpalać TFU.

**4.22.** Wykazać, że w otoczeniu punktu  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, -1)$  równanie  $xy = 2 + z \ln(y)$  wyznacza  $y$  jako funkcję klasy  $C^1$  pozostałych zmiennych:  $y = y(x, z)$ . Obliczyć pochodne cząstkowe tej funkcji w punkcie  $(x_0, z_0) = (2, -1)$ . Obliczyć także  $\varphi'(0)$ , gdzie  $\varphi(t) = y(2e^{3t}, -e^t)$  (dla  $t$  w pewnym otoczeniu zera).

**4.23.** Wykazać, że układ równań

$$\begin{cases} 3x^2y + t^2x - ty^2 = 3 \\ tx^2 + xy^2 - 2t^2y = 0 \end{cases}$$

wyznacza w otoczeniu punktu  $(t_0, x_0, y_0) = (1, 1, 1)$  zmienne  $x, y$  jednoznacznie jako funkcje klasy  $C^1$  zmiennej  $t: x = x(t), y = y(t)$ . Obliczyć  $x'(1), y'(1)$ .

*W ramach autosprawdzenia.* Pochodne cząstkowe spełniają  $|x'(1)| + |y'(1)| \leq 9$ .

**4.24.** Wykazać, że układ równań

$$\begin{cases} e^u + v - xy = 0 \\ 2u + e^v + x - 2y = 0 \end{cases}$$

wraz z warunkami  $u(1, 1) = 0, v(1, 1) = 0$  wyznacza w otoczeniu punktu  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  zmienne  $u, v$  jako funkcje klasy  $C^1$  zmiennych  $x, y$ . Znaleźć pochodne cząstkowe  $u'_x(1, 1), u'_y(1, 1), v'_x(1, 1), v'_y(1, 1)$ .

*W ramach autosprawdzenia.* Pochodne cząstkowe spełniają  $|u'_x(1, 1)| + |u'_y(1, 1)| + |v'_x(1, 1)| + |v'_y(1, 1)| \leq 6$ .

**4.25.** Rozważamy wielomian  $x \mapsto x^5 + e^s x + \ln(s)$ , gdzie  $s > 0$  jest parametrem. Wykazać, że [dla każdego  $s > 0$ ] wielomian ten ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty  $x_0 = x_0(s)$ . Wykazać, że  $x_0$  jest funkcją klasy  $C^1$  parametru  $s \in (0, \infty)$  i obliczyć  $x'_0(1)$ .

**4.26.** Załóżmy, że  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją klasy  $C^2$ , zaś punkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  spełnia:

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

#### 4. Teoria lokalna odwzorowań klasy $C^1$

Wtedy w pewnym otoczeniu punktu  $(x_0, y_0)$  równanie  $F(x, y) = 0$  wyznacza funkcję uwikłaną  $y = y(x)$ . Wykazać, że [przy powyższych założeniach]  $x = x_0$  jest punktem krytycznym funkcji uwikłanej. Wykazać również, że jeśli

$$-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \neq 0,$$

to funkcja uwikłana  $y = y(x)$  ma w punkcie w  $x = x_0$  ekstremum lokalne [właściwe]. Jak odczytać, czy jest to minimum lokalne czy maksimum lokalne?

# A. Teoria miary

*Komentarz.* Wchodzimy w XX wiek. Na wykładzie wystąpią (m.in., w kolejności alfabetycznej): Émile Borel (1871–1956), Constantin Carathéodory (1873–1950), Pierre Fatou (1878–1929), Maurice Fréchet (1878–1973), Guido Fubini (1879–1943), Henri Lebesgue (1875–1941), Nikołaj Łuzin (1883–1950), Giuseppe Vitali (1875–1932).<sup>1</sup>

## Materiał do omówienia na zajęciach [4+ ćw. (?)]

*Teoria.* Zbiór Vitaliego (!).

*Teoria.* Definicja  $\sigma$ -ciała (zbiór pusty, dopełnienia, przeliczalne sumy). Definicja  $\sigma$ -ciała generowanego przez rodzinę zbiorów.

- **A.1.** a) Znaleźć  $\sigma(\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\})$  (w przestrzeni  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ).  
b) Uzasadnić, że jeśli  $\sigma$ -ciało jest skończone, to liczba jego elementów wynosi  $2^n$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ .  
c) Wykazać, że nie istnieje  $\sigma$ -ciało nieskończone przeliczalne.
- **A.2.** Poniżej  $X, Y$  to dowolne zbiory,  $\mathcal{F}$  to  $\sigma$ -ciało w  $X$ ,  $f: X \rightarrow Y$  to pewne przekształcenie.  
a) Czy  $\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$  musi być  $\sigma$ -ciałem [w  $Y$ ]?  
b) Załóżmy, że  $f$  jest „na”. Czy  $\{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$  musi być  $\sigma$ -ciałem [w  $Y$ ]?  
c+d) Patrz zadanie A.14.

*Teoria.* Definicja  $\sigma$ -ciała zbiorów borelowskich (siłą rzeczy w przestrzeni topologicznej). Zbiory typu  $G_\delta$ , zbiory typu  $F_\sigma$ .<sup>2</sup>

- **A.3.** Dane są funkcje ciągłe  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Niech

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \text{ciąg } (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ jest zbieżny i granica jest liczbą wymierną}\},$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \text{ciąg } (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ jest zbieżny i granica jest liczbą niewymierną}\},$$

<sup>1</sup>Dla porównania (wybór subiektywny, kolejność z grubsza chronologiczna): Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Isaac Newton (1642–1726/27), Brook Taylor (1685–1731), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), Karl Weierstrass (1815–1897), Bernhard Riemann (1826–1866), usu Jean-Gaston Darboux (1842–1917).

<sup>2</sup>Notacja pochodzi od Hausdorffa:  $G$  od niem. *Gebiet* ‘obszar’,  $\delta$  od D jak *Durchschnitt* ‘przecięcie’;  $F$  od fr. *fermé* ‘zbiór domknięty’,  $\sigma$  od S jak *somme* ‘suma’.



## A. Teoria miary

$E = \{x \in \mathbb{R} : \text{ciąg } (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ jest zbieżny (do granicy właściwej)}\}$ .

Rozstrzygnąć, które z tych zbiorów są borelowskie.

- **A.4.** a) Uświadomić sobie, że  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  jest zbiorem typu  $F_\sigma$ , zaś  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  jest zbiorem typu  $G_\delta$ .
  - b) Wykazać, że  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  nie jest zbiorem typu  $G_\delta$ , zaś  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  nie jest zbiorem typu  $F_\sigma$ . *Wskazówka.* Twierdzenie Baire'a z wykładu topologii.
  - c) Podać przykład zbioru borelowskiego, który nie jest ani typu  $G_\delta$ , ani typu  $F_\sigma$ .

\*\*\*

*Teoria.* Miara zewnętrzna (określona na *wszystkich* podzbiorach, zero na  $\emptyset$ , monotoniczna, przeliczalnie podaddytywna), miara (określona na  *pewnym*  $\sigma$ -ciele, zero na  $\emptyset$ , przeliczalnie addytywna [na zbiorach rozłącznych]).

*Teoria* (ogólna). Warunek Carathéodory'ego.<sup>3</sup> Dowodzi się, że:

- zbiór  $\mathcal{F}(\mu^*)$  złożony ze zbiorów spełniających warunek Carathéodory'ego jest  $\sigma$ -ciałem (!),
- po obcięciu  $\mu^*$  do  $\mathcal{F}(\mu^*)$  dostaniemy miarę (!),
- zbiory o mierze zewnętrznej 0 należą do  $\mathcal{F}(\mu^*)$  (!),
- jeśli nasza miara zewnętrzna jest metryczna,<sup>4</sup> to zbiory borelowskie należą do  $\mathcal{F}(\mu^*)$  (!).

*Teoria* (konkretna). Miara zewnętrzna Lebesgue'a w  $\mathbb{R}^k$  (ozn.  $\lambda_k^*$ ; infimum sum objętości przedziałów [ $k$ -wymiarowych] stanowiących pokrycie zbioru). Sprawdza się, że jest to miara zewnętrzna metryczna na  $\mathbb{R}^k$ , więc z ogólnej teorii wynika istnienie  $\sigma$ -ciała (zawierającego zbiory borelowskie i zbiory miary [zewnętrznej] zero), po obcięciu do którego dostajemy miarę (ozn.  $\lambda_k$ ).

*Uwaga.* Popularne oznaczenia na miarę Lebesgue'a to m.in.:  $\lambda_k(\cdot)$ ,  $\ell_k(\cdot)$ ,  $\mathcal{L}_k(\cdot)$ ,  $\text{vol}_k(\cdot)$  (lub po prostu  $\text{vol}(\cdot)$  z  $k$  w domyśle),  $|\cdot|$  (nawet gdy jednocześnie oznacza też normę euklidesową).

*Uwaga.* Poniżej w przypadku podzbiorów  $\mathbb{R}^k$  domyślną miarę jest [odpowiedniowymiarowa] miara Lebesgue'a (i domyślnym  $\sigma$ -ciałem jest  $\sigma$ -ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a).

- **A.5** (por. zad. A.22). a) Zbiór  $A \subset \mathbb{R}^2$  jest mierzalny,  $P_1$  jest rzutem ortogonalnym  $\mathbb{R}^2$  na oś  $OX$ . Czy zbiór  $P(A)$  [traktowany jako podzbiór  $\mathbb{R}$ ] musi być mierzalny?
  - b) Zbiór  $B \subset \mathbb{R}^2$  jest spójny. Czy musi być mierzalny?
- **A.6** (patrz też zadanie A.28). Znaleźć miary zbiorów:

$A = \{x \in [0, 1] : \text{w rozwinięciu dziesiętnym } x \text{ nie występuje cyfra } 3\}$ ,

$C = \text{standardowy [trójkowy] zbiór Cantora,}$

$E = \{x \in [0, 1] : \text{w rozwinięciu dziesiętnym } x \text{ nie występuje blok } 5050\}$ .

<sup>3</sup>Niech  $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  będzie miarą zewnętrzną. Zbiór  $A \subset X$  spełnia warunek Carathéodory'ego wtedy i tylko wtedy, gdy dla *każdego* zbioru  $Z \subset X$  zachodzi  $\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$ .

<sup>4</sup>Tzn. jesteśmy w przestrzeni metrycznej oraz  $\text{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0 \implies \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ .

## A. Teoria miary

*Uwaga.* Zbiór Cantora jest zwarty, brzegowy (ma puste wnętrze, tzn. nie zawiera żadnego przedziału otwartego (szczególności jest też nigdziegęsty (jego domknięcie też ma puste wnętrze))) i ma moc  $\mathfrak{c}$ . W szczególności zawiera coś więcej, niż tylko przeliczalnie wiele końców odcinków otwartych wyrzucanych w kolejnych krokach konstrukcji. Każdy jego punkt jest jego punktem skupieniem. Patrz też zadanie A.31 o „tłustych” zbiorach Cantora.

- **A.7** (funkcja Cantora, diabelskie schody). a) Skonstruować funkcję  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , która jest ciągła, niemalejąca, „na” i prawie wszędzie  $f'(x) = 0$  (pochodna istnieje poza zbiorem miary zero i tam, gdzie istnieje, jest równa zero).  
b) Znaleźć przykład zbioru mierzalnego  $A \subset [0, 1]$ , takiego że  $f(A)$  jest niemierzalny.

*Teoria.* Tw. charakteryzujące zbiory mierzalne w sensie Lebesgue’a.

*Uwaga.* Można udowodnić, że zbiorów borelowskich w  $\mathbb{R}^k$  jest  $\mathfrak{c}$ . Zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue’a jest  $2^{\mathfrak{c}}$  (podzbiory zbioru Cantora mają miarę zero). Z drugiej strony, zbiory mierzalne w sensie Lebesgue’a to zasadniczo – z dokładnością do zbioru miary zero – zbiory typu  $F_\sigma$  (patrz charakteryzacja z wykładu).

- **A.8.** Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest lipschitzowska, zbiór  $A \subset \mathbb{R}$  jest mierzalny [w sensie Lebesgue’a]. Wykazać, że zbiór  $f(A)$  jest mierzalny [w sensie Lebesgue’a].
- **A.9.** Dany jest [mierzalny] zbiór  $A \subset [0, 1]$ , taki że  $\lambda_1(A) > 0$ . Wykazać, że dla każdego  $b \in [0, \lambda_1(A)]$  istnieje [mierzalny] zbiór  $B \subset A$ , taki że  $\lambda_1(B) = b$ .

*Teoria.* Liniowy obraz zbioru mierzalnego. Iloczyn kartezjański zbiorów mierzalnych.

\*\*\*

*Teoria.* Definicja funkcji mierzalnej.<sup>5</sup> Własności (przeciwobrazy innych zbiorów; własności arytmetyczne, supremum/infimum przeliczalnej rodziny f. mierzalnych, granica punktowa f. mierzalnych).

*Umowa.* W przypadku funkcji określonych na  $X = \mathbb{R}^k$  [w dziedzinie] domyślnie rozważamy  $\sigma$ -ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue’a.

*Komentarz.* Przygotowujemy się do wprowadzenia całki [Lebesgue’a], ale poniższe zadania tematycznie pasują do tego rozdziału (bo na razie żadnych całek jeszcze nie ma, a jest dużo  $\sigma$ -ciał).

- **A.10.** a) Podać przykład mierzalnej funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , która nie ma żadnego punktu ciągłości.  
b) Podać przykład funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , która nie jest mierzalna.  
c) Podać przykład świadczący o tym, że jeśli funkcje  $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  są mierzalne ( $i \in I$ ), to funkcja  $\sup_{i \in I} f_i$  nie musi być funkcją mierzalną, jeśli zbiór indeksów  $I$  nie jest przeliczalny.

---

<sup>5</sup>Mamy  $(X, \mathcal{F})$  oraz  $f: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ; zbiory  $\{x \in X : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty])$  mają być mierzalne (należą do  $\mathcal{F}$ ).

## A. Teoria miary

d) Podać przykład funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , która jest mierzalna [jeśli w dziedzinie rozważamy  $\sigma$ -ciała zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a], ale nie jest mierzalna, jeśli w dziedzinie rozważamy  $\sigma$ -ciała zbiorów borelowskich.

e) Wykazać, że jeśli funkcja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  jest mierzalna [w szczególności w zbiorze  $X$  mamy jakieś  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{F}$ ], to dla dowolnego zbioru borelowskiego  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  zbiór  $f^{-1}(A)$  jest mierzalny [należy do  $\mathcal{F}$ ].

- **A.11.** a) Dane są funkcje mierzalne  $f, g: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  oraz zbiór [mierzalny]  $A \in \mathcal{F}$ . Sprawdzić, że funkcja  $h: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  zdefiniowana wzorem

$$h(x) := f(x)\mathbf{1}_{\{x \in A\}} + g(x)\mathbf{1}_{\{x \in X \setminus A\}} = \begin{cases} f(x) & \text{jeśli } x \in A, \\ g(x) & \text{jeśli } x \in X \setminus A, \end{cases}$$

jest mierzalna.

b) Uświadomić sobie, że gdybyśmy mieli nieco dłuższą klamerkę (przeliczalnie wiele funkcji [mierzalnych], przeliczalnie wiele [mierzalnych] kawałków), to nic się nie zmienia.

c) Uświadomić sobie, że w szczególności jest sens mówić o mierzalności, jeśli funkcja jest określona „tylko” *prawie wszędzie*.

- **A.12.** a) Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna. Uzasadnić, że funkcja  $f'$  jest mierzalna.  
b) Czy jeśli założymy tylko, że  $f$  jest różniczkowalna prawie wszędzie, to można coś powiedzieć o  $f'$ ?

*Teoria.* Funkcje proste. Przybliżanie nieujemnych funkcji mierzalnych.

*Teoria.* Twierdzenia Łuzina (obcięcie ciągle [na dużym zbiorze domkniętym]), Fréchet’a (granica punktowa funkcji ciągłych), Jegorowa (zbieżność jednostajna); miara regularna.

## Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

**A.13.** Niech  $\mathcal{F}$  będzie rodziną wszystkich takich zbiorów  $A \subset X$ , że co najmniej jeden ze zbiorów  $A, X \setminus A$  jest [co najwyżej] przeliczalny. Sprawdzić, że  $\mathcal{F}$  jest  $\sigma$ -ciałem [w  $X$ ].

- **A.14** (c.d. zadania A.2). Poniżej  $X, Y$  to dowolne zbiory,  $\mathcal{G}$  to  $\sigma$ -ciało w  $Y$ ,  $f: X \rightarrow Y$  to pewne przekształcenie.  
c) Czy  $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{G}\}$  musi być  $\sigma$ -ciałem [w  $X$ ]?  
d) Załóżmy, że  $f$  jest „na”. Czy  $\{A \subset X : f(A) \in \mathcal{G}\}$  musi być  $\sigma$ -ciałem [w  $X$ ]?

**A.15** (FYI, będzie na RP, na razie nie jest kluczowe). Rodzinę zbiorów  $\mathcal{P}$  nazywamy  $\pi$ -układem, jeśli

$$A, B \in \mathcal{P} \implies A \cap B \in \mathcal{P}.$$

Rodzinę zbiorów  $\mathcal{L}$  nazywamy  $\lambda$ -układem, jeśli spełnia następujące warunki: (i)  $X \in \mathcal{L}$ , (ii) jeśli  $A, B \in \mathcal{L}$  oraz  $B \subset A$ , to  $A \setminus B \in \mathcal{L}$ , (iii) jeśli  $A_n \in \mathcal{L}$  dla  $n \in \mathbb{N}$  oraz  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ , to  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}$

## A. Teoria miary

a) Uzasadnić, że rodzina zbiorów, która jest jednocześnie  $\pi$ - i  $\lambda$ -układem, jest  $\sigma$ -ciałem.

b) Podać przykład  $\pi$ -układu, który nie jest  $\lambda$ -układem, oraz  $\lambda$ -układu, który nie jest  $\pi$ -układem.

c) Wykazać, że jeśli  $\lambda$ -układ  $\mathcal{L}$  zawiera  $\pi$ -układ  $\mathcal{P}$ , to  $\mathcal{L}$  zawiera  $\sigma(\mathcal{P})$ .

**A.16.** Dana jest funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (dowolna). Wykazać, że zbiór

$$\{x \in \mathbb{R} : \text{funkcja } f \text{ jest ciągła w } x\}$$

jest zbiorem borelowskim (a wręcz zbiorem typu  $G_\delta$ ).

**A.17.** Uświadomić sobie, że [w przestrzeni topologicznej  $X$ ] zbiór  $A \subset X$  jest zbiorem typu  $G_\delta$  [względem  $X$ ] wtedy i tylko wtedy, gdy  $X \setminus A$  jest zbiorem typu  $F_\sigma$  [względem  $X$ ].

- **A.18** (pushforward; oczywiste, ale ważne). Dana jest przestrzeń z miarą  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  oraz pewne przekształcenie  $f: X \rightarrow Y$ . Niech

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &:= \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}, \\ \nu(B) &:= \mu(f^{-1}(B)) \quad \text{dla } B \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Sprawdzić, że  $\mathcal{G}$  jest  $\sigma$ -ciałem [w  $Y$ ], zaś  $\nu: \mathcal{G} \rightarrow [0, +\infty]$  jest miarą.

**A.19.** Na przestrzeni  $X = \{1, 2, 3\}$  definiujemy  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,  $\mu^*(X) = 2$ ,  $\mu^*(A) = 1$  jeśli  $A \subset X$ ,  $A \neq \emptyset \neq X \setminus A$ . Sprawdzić, że  $\mu^*$  jest miarą zewnętrzną na  $X$  i że jedynymi zbiorami spełniającymi warunek Carathéodory'ego są  $\emptyset$  oraz  $X$ .

**A.20** (zgrabne). Dany jest zbiór  $X$  i miara zewnętrzna  $\mu^*$  określona na jego podzbiorach, taka że  $\mu^*(X) < \infty$ . Dla  $A \subset X$  definiujemy

$$\nu^*(A) = \frac{\mu^*(A)}{1 + \mu^*(A)}.$$

Wykazać, że  $\nu^*$  jest miarą zewnętrzną na  $X$ .

- **A.21.** *Komentarz/motywacja.* Załóżmy, że określiliśmy sobie jakąś miarę zewnętrzną  $\mu^*$  (np. miarę zewnętrzną Lebesgue'a w  $\mathbb{R}^k$ ) i zastanawiamy się, czy da się znaleźć jakieś nietrywialne  $\sigma$ -ciało, na którym ta miara zewnętrzna jest prawdziwą miarą (przeliczalnie addytywną, a nie tylko podaddytywną), ale konstrukcja przez warunek Carathéodory'ego wydaje nam się zbyt mistyczna i dziwaczna. Na pewno powinno być tak, że jeśli zbiór  $A$  jest mierzalny, to zbiór  $X \setminus A$  też i ponadto

$$\mu^*(X) = \mu(X) \stackrel{\text{chcemy}}{=} \mu(A) + \mu(X \setminus A) = \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A).$$

Niniejsze zadanie pokazuje, że – przy pewnym drobnych założeniach technicznych (z którymi często nie ma problemów, por. zadanie A.36) – taki naturalny warunek implikuje już sformułowany na wykładzie warunek Carathéodory'ego.

## A. Teoria miary

- *Właściwa treść zadania.* Załóżmy, że  $\mu^*$  jest miarą zewnętrzną na  $X$ , taką że  $\mu^*(X) < \infty$ . Załóżmy ponadto, że dla każdego zbioru  $Z \subset X$  istnieje zbiór  $Z \subset B \subset X$ , który jest mierzalny (tj. spełnia warunek Carathéodory'ego) i  $\mu^*(Z) = \mu^*(B)$ . Przypuśćmy, że  $A \subset X$  jest zbiorem, takim że

$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A).$$

Wykazać, że zbiór  $A$  jest mierzalny.

*Ogólny plan pracy i pierwszy krok.* Oczywiście trzeba sprawdzić, że  $A$  spełnia warunek Carathéodory'ego. W tym celu bierzemy dowolny zbiór  $Z \subset X$ , można do niego dobrać mierzalny zbiór  $B$  jak wyżej. Wykazać najpierw, że

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

*Wskazówka do pierwszego kroku.* Zbiór  $B$  spełnia warunek Carathéodory'ego – trzeba wypisać ten warunek dla zbiorów testowych  $A$  i  $X \setminus A$  (żadnych innych [rozsądnych] kandydatów na zbiory testowe nie mamy) i trochę pożonglować podaddytywnością i prawami de Morgana.

*Drugi krok.* Wywnioskować, że także

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

**A.22** (o pewnym słynnym błędzie). *Motywacja.* Niech  $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie rzutem na pierwszą współrzędną:  $P(x, y) = x$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Okazuje się, że jeśli zbiór  $A \subset \mathbb{R}^2$  jest borelowski, to zbiór  $P(A)$  *nie* musi być borelowski [w  $\mathbb{R}$ ]. Przy odrobinie nieuwagi łatwo jednak uwierzyć w następujący [błędny!] szkic dowodu [nieprawdziwego (!) twierdzenia]: „Jeśli zbiór  $U \subset \mathbb{R}^2$  jest otwarty, to zbiór  $P(U)$  jest otwarty [w  $\mathbb{R}$ ]. Ponieważ zbiory otwarte generują  $\sigma$ -ciało zbiorów borelowskich, to jeśli  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ , to  $P(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ”.

Poniższe proste podpunkty mają pokazać, nad jakimi [m.in.] szczegółami zupełnie prześlizgnięto się w powyższym „dowodzie”.

- a) Uzasadnić, że jeśli zbiór  $U \subset \mathbb{R}^2$  jest otwarty, to zbiór  $P(U)$  jest otwarty [w  $\mathbb{R}$ ].
- b) Podać przykład zbioru domkniętego  $F \subset \mathbb{R}^2$ , takiego że zbiór  $P(F)$  nie jest domknięty [w  $\mathbb{R}$ ].
- c) Podać przykład [dowolnych] zbiorów  $A, B, C \subset \mathbb{R}^2$  takich, że  $P(A \cap B) \neq P(A) \cap P(B)$  oraz  $P(\mathbb{R}^2 \setminus C) \neq \mathbb{R} \setminus P(C)$ .
- d) Uświadomić sobie, że jeśli  $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$ , to  $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ .
- e) Podać przykład zstępującej przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych  $U_1 \supset U_2 \supset \dots$  [w  $\mathbb{R}^2$ ], takiej że  $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} P(U_n)$ . Uświadomić sobie w szczególności, że jest pewien kłopot z kontrolowaniem rzutów zbiorów typu  $G_\delta$ .
- f) Uzasadnić, że jeśli  $F \subset \mathbb{R}^2$  jest zbiorem domkniętym, to  $P(F)$  jest zbiorem borelowskim [w  $\mathbb{R}$ ]. Wywnioskować, że jeśli  $F' \subset \mathbb{R}^2$  jest zbiorem typu  $F_\sigma$ , to  $P(F')$  jest zbiorem borelowskim [w  $\mathbb{R}$ ].

*Informacja (bez dowodu).* Nawet rzut zbioru typu  $G_\delta$  nie musi być zbiorem borelowskim. Korzystając z teorii zbiorów analitycznych Suslina można jednak wykazać, że obraz zbioru borelowskiego [przy rzucie ortogonalnym] jest zbiorem mierzalnym.

## A. Teoria miary

**A.23.** Zbiór  $A \subset \mathbb{R}^2$  jest spójny (ale być może niemierzalny), funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła. Czy można coś powiedzieć o mierzalności [w sensie Lebesgue'a] zbioru  $f(A)$ ?

**A.24.** Niech  $B(0,1)$  będzie kulą jednostkową w  $\mathbb{R}^3$ . Banach i Tarski wykazali, że istnieją parami rozłączne zbiory  $A_1, \dots, A_5 \subset B(0,1)$  oraz izometrie  $f_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , takie że

$$B(0,1) = f_1(A_1) \cup f_2(A_2) \cup f_3(A_3) = f_4(A_4) \cup f_5(A_5),$$

gdzie obie powyższe sumy są sumami zbiorów parami rozłącznych. Uzasadnić – elementarnie, bez odwoływania się do szczegółów konstrukcji – że co najmniej cztery ze zbiorów  $A_1, \dots, A_5$  muszą być niemierzalne.

**A.25.** Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie zbiorem [mierzalnym] o dodatniej mierze Lebesgue'a. Wykazać, że istnieją liczby  $x, y \in A$  takie, że  $x - y \in \mathbb{Q}$ .

*Wskazówka.* Przypomnieć sobie przykład Vitaliego.

**A.26.** Czy liczby  $1/5, 1/4, 1/\pi$  należą do [standardowego trójkowego] zbioru Cantora?

**A.27.** a) Niech  $C$  to [standardowy trójkowy] zbiór Cantora. Wykazać, że  $C + C = [0, 2]$  (tu  $C + C = \{x + y : x \in C, y \in C\}$  to suma Minkowskiego zbiorów).

b) Czy jest  $C - C = \{x - y : x \in C, y \in C\}$ ?

- o **A.28.** Znaleźć miary Lebesgue'a niżej opisanych zbiorów [w szczególności uzasadnić ich mierzalność]. *Wskazówka.* Nie warto brnąć w straszne rachunki (a warto zerknąć na rozwiązania zadania A.6).

a) Zbiór tych liczb z przedziału  $[0, 1]$ , których rozwinięcie dziesiętne zawiera bloki cyfr 123, 456 oraz 789.

b) Zbiór tych liczb z przedziału  $[0, 1]$ , w których rozwinięciu dziesiętnym cyfra 3 występuje nieskończenie wiele razy.

c) Zbiór tych liczb z przedziału  $[0, 1]$ , w których rozwinięciu dziesiętnym występuje każdy z [przeliczalnie wielu] bloków

$$3, \quad 31, \quad 314, \quad 3141, \quad 31415, \quad 314159, \quad 3141592, \quad 31415926, \quad \dots$$

d) Zbiór tych liczb z przedziału  $[0, 1]$ , w których rozwinięciu dziesiętnym występuje każdy z [przeliczalnie wielu] bloków

$$11, \quad 101, \quad 1001, \quad 10001, \quad 100001, \quad 1000001, \quad 10000001, \quad \dots$$

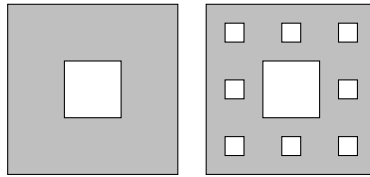
e) Zbiór tych liczb z przedziału  $[0, 1]$ , w których rozwinięciu dziesiętnym każdy z [przeliczalnie wielu] bloków wymienionych w podpunkcie d) występuje nieskończenie wiele razy.

**A.29.** Poniżej rozważamy rozwinięcia czwórkowe  $0, c_1c_2c_3 \dots$  (z cyframi  $c_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ).

Niech  $A$  będzie zbiorem tych liczb z przedziału  $[0, 1]$ , których rozwinięcie czwórkowe  $0, c_1c_2c_3 \dots$  spełnia warunek  $c_n c_{n+1} = 0$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ .

Niech  $B$  będzie zbiorem tych liczb z przedziału  $[0, 1]$ , których rozwinięcie czwórkowe  $0, c_1c_2c_3 \dots$  spełnia warunek  $c_{2n-1}c_{2n+1}c_{2n+3} = 0$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ .

A. Teoria miary



Rysunek A.1.: Zadanie A.30 – dwa pierwsze kroki konstrukcji.

Wykazać, że oba te zbiory są miary zero.

*Wskazówka.* Nie warto brnąć w straszne rachunki (a warto zerknąć na rozwiązania zadania A.6 (i A.28 (?))).

**A.30** (dywan Sierpińskiego). Kwadrat  $[0, 1]^2$  dzielimy na 9 przystających kwadratów i wyrzucamy środkowy. Następnie w każdym z pozostałych ośmiu mniejszych kwadratów powtarzamy tę procedurę (patrz Rysunek A.1) – i tak dalej. Doprecyzować opis konstrukcji i obliczyć dwuwymiarową miarę Lebesgue'a powstałej figury.

*Pytanko dodatkowe z topologii.* Czy otrzymany zbiór jest spójny? (A łukowo spójny?)

**A.31** („tłusty” zbiór Cantora). a) Uświadomić sobie, że modyfikując konstrukcję zbioru Cantora (zmieniając długości odcinków wyrzucanych w kolejnych krokach) można uzyskać zbiór o dodatniej mierze Lebesgue'a.

b) Uzasadnić, że otrzymany zbiór jest homeomorficzny ze standardowym zbiorem Cantora. W szczególności uświadomić sobie, że zbiór miary dodatniej nie musi zawierać żadnego odcinka otwartego.

- **A.32.** Podać przykład zstępującego ciągu zbiorów mierzalnych  $\mathbb{R} \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ , takiego że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(A_n) \neq \lambda_1\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

- **A.33** (miłe). a) Funkcja  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jest niemalejąca. Wykazać, że jej wykres jest podzbiorem miary [Lebesgue'a] zero w  $\mathbb{R}^2$ .

b) Czy teza pozostaje w mocy, jeśli dziedziną funkcji będzie inny przedział (niekoniecznie jest domknięty, niekoniecznie skończony)?

- **A.34** (standardowe). Znaleźć miary zbiorów:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Q}\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{istnieją } a, b \in \mathbb{Q} \text{ takie, że } (x - a)^2 + (y - b)^2 \in \mathbb{Q}\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy - x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

- **A.35.** a) Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła. Wykazać, że jej wykres  $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$  jest podzbiorem miary zero płaszczyzny.

*Sugestia.* Nie machać rękami – dla każdego  $\varepsilon > 0$  wskazać odpowiednie pokrycie wykresu prostokątami.

## A. Teoria miary

b) Przemyśleć, czy coś się zmienia, jeśli rozważamy przypadek wielowymiarowy ( $(k + l)$ -wymiarowa miara Lebesgue'a wykresu funkcji ciągłej  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ ).

c) Czy wykres funkcji  $(0, \infty) \ni x \mapsto \sin(1/x)$  jest podzbiorem płaszczyzny miary zero?

d) Czy wykres funkcji  $(0, \infty) \ni x \mapsto \frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x})$  jest podzbiorem płaszczyzny miary zero?

**A.36.** Niech  $A \subset \mathbb{R}^k$  będzie zbiorem, takim że  $\lambda_k^*(A) < \infty$  (nie zakładamy, że  $A$  jest mierzalny w sensie Lebesgue'a). Wykazać, że istnieje zbiór borelowski  $B \subset \mathbb{R}^k$ , taki że  $A \subset B$  oraz  $\lambda_k^*(A) = \lambda_k(B)$ .

**A.37.** a) Załóżmy, że  $P \subset \mathbb{R}^k$  jest  $[k$ -wymiarowym] przedziałem,  $A \subset P$ , zbiór  $A$  jest domknięty oraz  $\lambda_k(A) = \lambda_k(P)$ . Wykazać, że  $A = P$ .

b) Załóżmy, że  $Q \subset \mathbb{R}^k$  jest  $[k$ -wymiarowym] przedziałem otwartym, zbiór  $B \subset Q$  jest otwarty oraz  $\lambda_k(B) = \lambda_k(Q)$ . Czy musi być  $B = Q$ ?

**A.38.** Dany jest zbiór [mierzalny]  $A \subset \mathbb{R}^k$ , taki że  $\lambda_k(A) > 0$ . Wykazać, że dla każdego  $c \in (0, 1)$  istnieje pewien  $k$ -wymiarowy przedział  $P$ , taki że  $\lambda_k(A \cap P) > c\lambda_k(P)$ .

- **A.39** (nieco trudniejsze, ale robialne). Załóżmy, że zbiór [mierzalny]  $A \subset \mathbb{R}$  ma miarę dodatnią. Wykazać, że istnieje  $\delta > 0$ , taka że  $[-\delta, \delta] \subset A - A$ .

*Uwaga.* To zadanie nie jest trywialne. W szczególności nie jest prawdą, że jeśli  $A$  jest miary dodatniej, to musi zawierać pewien przedział (przykład?). Proszę też zwrócić uwagę, że  $A - A$  może zawierać pewien przedział nawet, jeśli  $A$  ma miarę zero (przykład?).

**A.40.** Załóżmy, że zbiór [mierzalny]  $A \subset \mathbb{R}$  ma miarę dodatnią. Wykazać, że istnieje zbiór niemierzalny  $E \subset A$ .

*Wskazówka (?)*. Być może warto najpierw zrobić zadanie A.39.

**A.41.** Rozstrzygnąć, czy brzeg obszaru (tj. zbioru otwartego i spójnego) w  $\mathbb{R}^k$  musi mieć miarę Lebesgue'a zero.

- **A.42** (szczególny przypadek tw. Sarda). Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest klasy  $C^1$ . Niech  $Z = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$ . Wykazać, że  $f(Z)$  jest zbiorem miary [Lebesgue'a] zero.

*Wskazówka (?)*. Być może warto zerknąć na rozwiązanie zadania A.8.

**A.43** ((bardzo?) trudne, por. zad. A.7). Skonstruować funkcję  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , która jest ciągła, ściśle rosnąca, „na” i prawie wszędzie  $f'(x) = 0$  (pochodna istnieje poza zbiorem miary zero i tam, gdzie istnieje, jest równa zero).

**A.44** (kolokwium 2024). Niech  $\mu$  będzie miarą określoną na borelowskich podzbiórach  $\mathbb{R}$ . Załóżmy, że  $\mu(A) = 1$  dla dowolnego zbioru borelowskiego  $A \subset \mathbb{R}$  takiego, że  $\lambda_1(A) = 1$ .

- a) Wykazać, że  $\mu(Z) = 0$  dla dowolnego zbioru borelowskiego  $Z$  takiego, że  $\lambda_1(Z) = 0$ ,
- b) Wykazać, że  $\mu([a, a + \frac{1}{2}]) = \frac{1}{2}$  dla dowolnego  $a \in \mathbb{R}$ .
- c) Wykazać, że  $\mu([a, b]) = b - a$  dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .



A. Teoria miary

**A.45** (łagodny wstęp do miary Hausdorffa). Dla  $\alpha \geq 0$ ,  $\delta > 0$  i zbioru  $A \subset \mathbb{R}$  kładziemy

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(E_i))^\alpha : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \text{diam}(E_i) \leq \delta \right\},$$

gdzie  $\text{diam}(E) = \sup\{|x - y| : x, y \in E\}$  dla  $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$  (i  $\text{diam}(\emptyset) = 0$ ).

a) Uświadomić sobie, że jeśli  $0 < \delta_2 < \delta_1$ , to  $\mathcal{H}_{\delta_2}^\alpha(A) \geq \mathcal{H}_{\delta_1}^\alpha(A)$ , więc w szczególności można zdefiniować

$$\mathcal{H}^\alpha(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A).$$

b) Uświadomić sobie, że  $\mathcal{H}^\alpha$  jest miarą zewnętrzną.

c) Niech  $C \subset [0, 1]$  będzie standardowym trójkowym zbiorem Cantora. Przyjrzyć się konstrukcji i uświadomić sobie, jakie [coraz drobniejsze] pokrycia jest naturalnie rozważać w definicji  $\mathcal{H}_\delta^\alpha(C)$ . Następnie zapostulować, jakie  $\alpha \in (0, 1)$  należałoby dobrać, żeby [przy  $\delta \rightarrow 0^+$ ] otrzymać  $0 < \mathcal{H}^\alpha(C) < \infty$ .

e) Wykazać (lub co najmniej zaagitować), że

- jeśli  $\mathcal{H}^\alpha(A) = 0$ , to  $\mathcal{H}^\beta(A) = 0$  dla  $\beta > \alpha$ ,
- jeśli  $\mathcal{H}^\alpha(A) > 0$ , to  $\mathcal{H}^\beta(A) = \infty$  dla  $\beta < \alpha$ .

(W szczególności, dla każdego dla każdego zbioru  $A \subset \mathbb{R}$  istnieje co najwyżej jedna liczba  $\alpha$  taka, że  $\mathcal{H}^\alpha(A) \in (0, \infty)$ ). Liczbę

$$\dim_H(A) := \inf\{\alpha \geq 0 : \mathcal{H}^\alpha(A) = 0\}$$

nazywamy wymiarem Hausdorffa zbioru  $A$ ).

f) Uświadomić sobie, że miarę zewnętrzną  $\mathcal{H}^\alpha$  (oraz wymiar Hausdorffa) można praktycznie tak samo zdefiniować w  $\mathbb{R}^n$  (w definicji średnicy bierzemy  $\|x - y\|_2$ ), a wręcz w dowolnej przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  (w definicji średnicy bierzemy  $d(x, y)$ ).

*FYI.* Ponadto  $\mathcal{H}^\alpha$  jest miarą zewnętrzną *metryczną* (więc zbiory borelowskie spełniają warunek Carathéodory'ego, tj. są mierzalne).

*Dla chętnych.* Uściślić wszystko i uzupełnić brakujące szczegóły, w szczególności wykazać metryczność (w ogólnym przypadku).

**A.46.** Na wykładzie prawdopodobnie zostały co najmniej sformułowane jakieś fakty w stylu: jeśli funkcje  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $h: X \rightarrow (0, \infty)$  są mierzalne, to także funkcje  $|f|$ ,  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$ ,  $f/h$ ,  $h^f$  są mierzalne.

a) Udowodnić te fakty, które nie zostały udowodnione na wykładzie.

b) Uświadomić sobie, że jeśli dopuszczamy by  $f, g$  przyjmowały także wartości  $\pm\infty$ , to teza jest nadal prawdziwa (o ile nie ma problemów z określonnością (tzn. wykluczamy np. sytuację  $f + g$  dla  $f \equiv +\infty$ ,  $g \equiv -\infty$ ); uświadomić sobie w szczególności, że jeśli problemy z określonnością są tylko na zbiorze miary zero, to nie ma żadnych problemów).

**A.47.** Dana jest funkcja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  [oraz pewne  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{F}$  podzbiorów  $X$ ].

- a) Załóżmy, że funkcja  $f$  jest mierzalna. Czy funkcja  $f^2$  musi być mierzalna?
- b) Załóżmy, że funkcja  $f^2$  jest mierzalna. Czy funkcja  $f$  musi być mierzalna?
- c) Załóżmy, że funkcja  $f^3$  jest mierzalna. Czy funkcja  $f$  musi być mierzalna?

**A.48.** Sprawdzić, że funkcja niemalejąca  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest mierzalna.

A. Teoria miary

**A.49.** a) Uświadomić sobie, że funkcja ciągła  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest mierzalna.

b) Uzasadnić, że jeśli zbiór punktów nieciągłości funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ma miarę zero, to funkcja  $f$  jest mierzalna.

**A.50.** Funkcje  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  są mierzalne [w szczególności w  $X$  mamy pewne  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{F}$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ]. Uzasadnić, że zbiory

$$A = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0\},$$

$$B = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty\},$$

$$C = \{x \in X : \text{ciąg } (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ jest zbieżny i granica jest liczbą wymierną}\},$$

$$D = \{x \in X : \text{ciąg } (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ jest zbieżny i granica jest liczbą niewymierną}\},$$

$$E = \{x \in X : \text{ciąg } (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ jest zbieżny (do granicy właściwej)}\}$$

są mierzalne.

**A.51.** a) Uzasadnić starannie, że jeśli funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest mierzalna, to jej wykres  $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$  jest mierzalnym podzbiorem płaszczyzny i że jego dwuwymiarowa miara Lebesgue'a wynosi zero.

b) Załóżmy, że wykres [pewnej] funkcji  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest mierzalnym podzbiorem płaszczyzny [poza tym o  $g$  nie zakładamy nic więcej]. Wykazać, że  $\lambda_2(\{(x, g(x)) : x \in \mathbb{R}\}) = 0$ .

*Wskazówka do b).* Może warto spojrzeć na wykresy funkcji  $x \mapsto f(x) + c$ .

*Uwaga.* Jeśli funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest niemierzalna, to może się zdarzyć, że jej wykres jest niemierzalnym podzbiorem płaszczyzny i jego [dzwuwymiarowa] miara *zewnętrzn*a Lebesgue'a jest dodatnia.

## B. Całki

*Umowa.* W tym dziale przyjmujemy, że

$$0 \cdot (+\infty) = 0 = (+\infty) \cdot 0.$$

(Pozostałe działania z symbolami  $\pm\infty$  zgodnie ze zdrowym rozsądkiem, uważamy na symbole nieoznaczone).

*Komentarz.* Całka z funkcji stałej, tożsamościowo równej 0, ma być równa 0 (nawet jeśli całkujemy po dużym zbiorze o mierze nieskończonej). Różne funkcje, które będziemy całkować, będą określone tylko prawie wszędzie, tzn. wszędzie poza pewnym zbiorem miary zero, i to ma nie wpływać ani na to, czy można je całkować, ani na wartość całki. (W szczególności na zbiorze miary zero można sobie zmienić wartości funkcji, nawet na  $+\infty$ , i to nic nie będzie zmieniać (por. zadanie A.11)).

*Komentarz.* Proszę zwrócić uwagę, że jeśli w założeniach zadania/twierdzenia pojawia się jakieś odwołanie do wartości funkcji w punktach (np. nieujemność [funkcji], zbieżność punktowa [ciągu funkcji]), a w tezie jakieś stwierdzenie o całkach, to równie dobrze można zakładać, że własność z założenia zachodzi „tylko” prawie wszędzie, tj. wszędzie poza pewnym zbiorem miary zero.

Jeśli w założeniach zadania/twierdzenia pojawia się jakieś odwołanie do wartości całek (np. typu nieujemność, skończoność [całki/całek]), a w tezie jakieś stwierdzenie o punktowych wartościach funkcji, to własność z tezy zachodzi *prawie wszędzie*, tj. wszędzie poza pewnym zbiorem miary zero.

### Materiał do omówienia na zajęciach

*Teoria.* Funkcje proste. Przybliżanie nieujemnych funkcji mierzalnych. Funkcje schodkowe (na  $\mathbb{R}^k$ , przedziały). Całka z funkcji nieujemnej. Własności (m.in. monotoniczność, liniowość).

- **B.1.** Załóżmy, że  $\mu$  jest miarą na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , taką że  $\mu(\mathbb{R} \setminus [0, 1]) = 0$  oraz

$$\mu([0, 1]) = 1,$$

$$\mu([0, 1/3]) = \mu([2/3, 1]) = 1/2,$$

$$\mu([0, 1/9]) = \mu([2/9, 1/3]) = \mu([2/3, 7/9]) = \mu([8/9, 1]) = 1/4 \quad \text{itd.},$$

tzn. jeśli  $[a, b]$  jest jednym z  $2^n$  odcinków długości  $1/3^n$ , które widzimy na  $n$ -tym etapie konstrukcji zbioru Cantora, to  $\mu([a, b]) = 1/2^n$ . Obliczyć

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mu(x).$$

## B. Całki

- **B.2** (nierówność Czebyszewa itp.). Dana jest przestrzeń z miarą  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ .
  - a) Wykazać, że jeśli funkcja mierzalna  $f: X \rightarrow [0, \infty)$  jest nieujemna [lub:  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia  $\mu$ -p.w.  $f \geq 0$ , tzn.  $\mu(\{x \in X : f(x) < 0\}) = 0$ ], to

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq t\}) \leq \frac{\int_X f d\mu}{t} \quad \text{dla } t > 0.$$

- b) Wywnioskować, że dla dowolnej funkcji mierzalnej  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  zachodzi

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq t\}) \leq \frac{\int_X f^2 d\mu}{t^2} \quad \text{dla } t > 0,$$

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq t\}) \leq \frac{\int_X e^{\lambda f} d\mu}{e^{\lambda t}} \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

*Teoria.* Dla funkcji *nieujemnych*: tw. o zbieżności monotonicznej [tw. Lebesgue'a–Leviego], lemat Fatou.

*Teoria.* Całka z funkcji dowolnej. Własności (m.in. liniowość, monotoniczność, nierówność trójkąta). [Związki z całką Riemanna patrz uwaga na str. 53].

*Teoria.* Dla dowolnych funkcji: tw. Lebesgue'a o zbieżności zmaoryzowanej.

- **B.3.** Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} (1 + x^{2n})^{-1/n} dx.$$

- **B.4.** a) Zgadnąć, ile wynosi granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx,$$

a następnie uzasadnić, że zgadnięty wynik jest poprawny.

- b) Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} e^{-2x} dx.$$

- **B.5.** Obliczyć następujące granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n(e^{x/n} - 1) \frac{dx}{1 + x^4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n n(e^{x/n} - 1) \frac{dx}{1 + x^4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{2n} n^3(e^{x/n} - 1) \frac{dx}{1 + x^4}.$$

- **B.6.** a) Załóżmy, że  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna (na końcach przedziału pochodne jednostronne) oraz istnieje  $M \in [0, \infty)$ , takie że dla każdego  $x \in [a, b]$  zachodzi  $|f'(x)| \leq M$ . Wykazać, że wówczas

$$\int_{[a,b]} f'(x) d\lambda_1(x) = f(b) - f(a) \quad [\text{całka względem miary Lebesgue'a}].$$

## B. Całki

b) Podać przykład, że teza nie musi zachodzić, jeśli  $f$  nie jest różniczkowalna w choćby jednym punkcie. Jakie założenie wystarczy dodać, żeby teza była nadal prawdziwa?

c) Podać przykład pokazujący, że teza nie musi zachodzić, jeśli pochodna  $f'$  istnieje prawie wszędzie (nawet jeśli założymy dodatkowo, że  $f$  jest jednostajnie ciągła).

*Uwaga* (funkcje jednej zmiennej: całka Riemanna vs. całka Lebesgue'a). Zachodzą następujące fakty:

- wiadomo, że  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowalna w sensie Riemanna [na  $[a, b]$ ] wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczona, a zbiór jej punktów nieciągłości ma miarę [Lebesgue'a] zero;
    - w szczególności funkcje całkowalne w sensie Riemanna są mierzalne;
    - jeśli  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowalna w sensie Riemanna, to jest też całkowalna względem miary Lebesgue'a i obie całki są równe [bo odpowiednie sumy dolne/górne są zbieżne];
    - istnieją funkcje całkowalne względem miary Lebesgue'a, dla których nie istnieje całka Riemanna, np.  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ ,
  - jeśli  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna [wszędzie (!) na  $(a, b)$  i ma powiedzmy pochodne jednostronne na krańcach], to  $\int_a^b f'(x)d\lambda_1(x) = f(b) - f(a)$ ;
    - jeśli  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna prawie wszędzie, to nie musi tak być, nawet jeśli  $f$  jest ciągła;
  - na AM 1 całki niewłaściwe po przedziałach  $[a, b)$ , w tym po półprostych, np.  $[0, \infty)$ , są zdefiniowane jako granice całek [Riemanna lub Newtona–Leibniza] po przedziałach zwartych; całka względem miary Lebesgue'a po  $[a, b)$  czy  $[0, \infty)$  jest czymś innym (patrzmy od razu na całą dziedzinę); w szczególności ze zbieżności całki niewłaściwej [w sensie AM 1] nie wynika całkowalność [względem miary Lebesgue'a];
    - jeśli jednak  $f$  jest nieujemna lub wiadomo, że jest całkowalna [względem miary Lebesgue'a] i  $f$  jest na tyle porządna, by można było mówić o całce niewłaściwej [w sensie AM 1], to obie całki istnieją i są równe.
- **B.7** (całki z parametrem). Dana jest przestrzeń z miarą  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ , przedział  $J \subset \mathbb{R}$  i funkcja  $f: X \times J \rightarrow \mathbb{R}$ , taka że dla każdego  $t \in J$  funkcja  $x \mapsto f(x, t)$  jest całkowalna na  $X$ . Definiujemy

$$\varphi(t) = \int_X f(x, t)d\mu(x) \quad \text{dla } t \in J.$$

a) Załóżmy, że dla każdego  $x \in X$  funkcja  $t \mapsto f(x, t)$  jest ciągła oraz istnieje funkcja całkowana  $g: X \rightarrow [0, \infty)$ , taka że  $|f(x, t)| \leq g(x)$  dla każdego  $x \in X$ . Wykazać, że funkcja  $\varphi$  jest ciągła.

b) Załóżmy, że dla każdego  $x \in X$  funkcja  $t \mapsto f(x, t)$  ma pochodną [wszędzie] oraz istnieje funkcja całkowalna  $h: X \rightarrow [0, \infty)$ , taka że  $|\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)| \leq h(x)$  dla każdego  $x \in X$ . Wykazać, że

$$\varphi'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)d\mu(x).$$

B. Całki

- **B.8.** Obliczyć

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 + \cos^2(x)) dx.$$

*Wskazówka.* Całki z parametrem.

\*\*\*

*Teoria.* Twierdzenie Fubniego (na tym wykładzie tylko dla miary Lebesgue'a, w  $\mathbb{R}^{k+l}$ ).

*Teoria.* Twierdzenie o zamianie zmiennych (w  $\mathbb{R}^k$ ).

- **B.9.** Niech  $p, q > 1$  i niech  $A$  będzie zwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^2$  ograniczonym przez krzywe  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ . Obliczyć

$$\int_A x^{p-1} y^{q-1} d\lambda_2(x, y).$$

- **B.10.** Znaleźć wartości całek (lub uzasadnić, że podane funkcje nie są całkowne).

$$\int_{(0,1)^2} \frac{x-y}{x^2+y^2} d\lambda_2(x, y), \quad \int_{(0,1)^2} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} d\lambda_2(x, y).$$

- **B.11.** Zbiór  $A \subset [0, 1]$  jest mierzalny. Niech  $f(x) = \lambda_1(A \cap [0, x])$  dla  $x \in [0, 1]$ . Obliczyć

$$\int_A f(x) dx.$$

- **B.12.** Niech  $A \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem ograniczonym prostymi  $y = x + 1$  i  $y = x - 1$ . Obliczyć

$$\int_A e^{-|x+y|} d\lambda_2(x, y).$$

- **B.13.** Znaleźć miarę zbioru  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 < 4(x^2 - y^2)\}$ .

*Teoria.* Środki ciężkości, reguła Pappusa-Guldina, zasady Cavalieriego itp.

- **B.14.** Znaleźć środek ciężkości półkuli  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2, z > 0\}$ .

\*\*\*

*Teoria.* Przestrzeń  $L^1$ . Przestrzeń  $L^p$ .

*Teoria.* Splot.

## Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

- **B.15.** a) Dana jest przestrzeń z miarą  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ , taka że  $\mu(X) < \infty$ . Załóżmy, że funkcja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  jest mierzalna. Uzasadnić, że jeśli dla pewnego  $p \in [1, \infty)$  zachodzi

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty,$$

to

$$\int_X |f|^q d\mu < \infty \quad \text{dla dowolnego } q \in [1, p].$$

- b) Podać przykład funkcji mierzalnej  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , takiej że

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 d\lambda_1 < \infty, \quad \text{ale} \quad \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda_1 = +\infty.$$

- c) Patrz zadanie B.26.

**B.16** (ciekawsze, dla chętnych). Dana jest przestrzeń z miarą  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ , taka że  $\mu(X) = 1$ . Załóżmy, że funkcja mierzalna  $f: X \rightarrow [0, \infty)$  jest nieujemna i  $\int_X f^2 d\mu \in (0, \infty)$  [tzn. funkcja  $f^2$  jest całkowna i  $f$  nie jest równa zero p.w.]. Wykazać, że dla każdego  $\theta \in [0, 1]$ ,

$$\mu(\{x \in X : f(x) > \theta \int_X f d\mu\}) \geq \frac{(1 - \theta)^2 (\int_X f d\mu)^2}{\int_X f^2 d\mu}.$$

*Motywacja i wskazówka.* Nierówność Czebyszewa (zadanie B.2) pozwala szacować z góry miarę zbioru, gdzie funkcja  $f$  jest „duża” [jeśli umiemy kontrolować całkę z  $f$ ]. Ta nierówność pozwala [przy pewnych założeniach] szacować miarę zbioru, gdzie funkcja  $f$  jest „duża”, z dołu.

**B.17** (z cyklu: ważne przykłady). Podać przykład świadczący o tym, że w lemacie Fatou nierówność może być ostra.

**B.18** (z cyklu: ważne przykłady). Podać przykład nieujemnych funkcji mierzalnych  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , zbieżnych punktowo do funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  [wszędzie], takich że [wszędzie]

$$f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f \geq 0,$$

ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1 \neq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda_1.$$

- **B.19** (sic). Wykazać, że w twierdzeniu o zbieżności monotonicznej założenie o monotoniczności jest zbędne: Załóżmy, że nieujemne funkcje mierzalne  $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , są zbieżne punktowo do  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  i dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi  $f_n \leq f$ . Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

*Uwaga.* Nie zakładamy, że funkcja  $f$  jest całkowna.

## B. Całki

**B.20.** Obliczyć

$$\int_0^1 (x \lfloor 1/x \rfloor + x - 1) \lfloor 1/x \rfloor dx$$

[całka względem jednowymiarowej miary Lebesgue'a].

**B.21.** Dany jest ciąg  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , taki że  $a_n \in [0, 1]$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Funkcja  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jest określona wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{|x - a_n|}}$$

[dla  $x \in \{a_1, a_2, \dots\}$  kładziemy cokolwiek lub nie definiujemy  $f$  w tych punktach]. Rozstrzygnąć, czy funkcja  $f$  jest całkowana na  $[0, 1]$  [i czy zależy to od wyboru ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$ ].

- **B.22** (arcyważne, szczególnie na RP). a) Załóżmy, że  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  jest przestrzenią z miarą [niekoniecznie skończoną], zaś  $g: X \rightarrow [0, \infty]$  jest nieujemną funkcją mierzalną [niekoniecznie całkowalną]. Niech

$$\nu(A) := \int_A g d\mu \quad \text{dla } A \in \mathcal{F}.$$

Wykazać lub sprawdzić lub uświadomić sobie, że  $\nu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  jest miarą na  $(X, \mathcal{F})$ .

*Uwaga.* To prawie na pewno było w jakiejś postaci dowodzone na wykładzie, ale warto to jeszcze raz przemyśleć – w szczególności, jeśli było już twierdzenie o zbieżności monotonicznej, to dowód jest natychmiastowy (ale sam fakt można wykazać też niezależnie od niego).

b) Wykazać ponadto, że jeśli funkcja  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  jest mierzalna, to

$$\int_X f d\nu = \int f g d\mu.$$

*Uwaga i plan pracy.* To być może też było w jakiejś postaci dowodzone na wykładzie, ale warto to jeszcze raz przemyśleć – wystarczy sprawdzić dla indykatorów:  $f = \mathbf{1}_A$ ,  $X \in \mathcal{F}$  (dlaczego?).

- **B.23** (arcyważne, m.in. na RP i na AM przy mierze rozmaitościach). Dana jest przestrzeń z miarą  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  oraz pewne przekształcenie  $T: X \rightarrow Y$ . Niech

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &:= \{B \subset Y : T^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}, \\ \nu(B) &:= \mu(T^{-1}(B)) \quad \text{dla } B \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

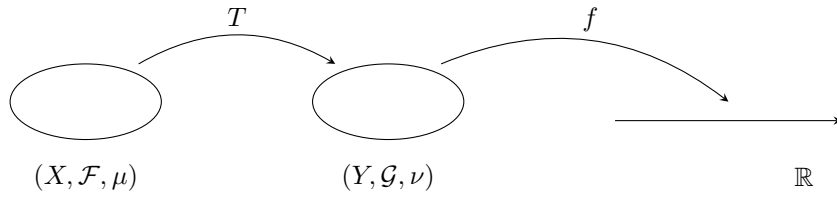
(patrz Rysunek B.1). Sprawdzić, że  $\mathcal{G}$  jest  $\sigma$ -ciałem [w  $Y$ ], zaś  $\nu: \mathcal{G} \rightarrow [0, +\infty]$  jest miarą. Wykazać ponadto, że jeśli funkcja  $f: Y \rightarrow [0, \infty]$  jest mierzalna [względem  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{G}$ ], to

$$\int_X f \circ T d\mu = \int_Y f d\nu.$$

Czy jeśli  $f$  jest całkowalna (ale niekoniecznie nieujemna), to teza nadal zachodzi?



B. Całki



Rysunek B.1.: Zadanie B.23: za pomocą przekształcenia  $T$  transportujemy miarę  $\mu$  z  $X$  do  $Y$ . Zamiast całkować funkcję  $f$  po  $Y$  [względem miary  $\nu$ ] możemy całkować funkcję  $f \circ T$  po  $X$  [względem wyjściowej miary  $\mu$ ].

**B.24.** Dana jest przestrzeń z miarą  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ . Wszędzie poniżej zakładamy, że funkcje  $f_n: X \rightarrow [0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , są *nieujemne* i mierzalne (reszta założeń w zależności od podpunktu).

a) Wykazać, że jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$  jest zbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  jest zbieżny prawie wszędzie (i w szczególności  $f_n \rightarrow 0$  p.w.).

b) Wykazać, że jeśli  $\int_X f_n d\mu \rightarrow 0$  dla  $n \rightarrow \infty$ , to ciąg  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  posiada podciąg zbieżny do zera prawie wszędzie.

c) Wykazać, że jeśli  $\int_X f_n^2 d\mu \leq 5$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ , to  $\frac{1}{n} f_n \rightarrow 0$  prawie wszędzie. Rozstrzygnąć, czy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_n$  musi być zbieżny prawie wszędzie.

- **B.25** (z cyklu: ważne przykłady). a) Podać przykład funkcji ciągłych  $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , takich że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$ , ale ciąg  $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$  nie jest zbieżny dla żadnego  $x \in [0, 1]$ .

b) Podać przykład funkcji ciągłych  $g_n: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , takich że dla każdego  $x \in [0, 1]$  zachodzi  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ , ale  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx = +\infty$ .

- **B.26** (c.d. zadania B.15). Dana jest przestrzeń z miarą  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ , taka że  $\mu(X) < \infty$ . Ustalmy funkcję mierzalną  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Niech

$$J = \left\{ p \in [1, \infty) : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\},$$

$$\|f\|_p := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{dla } p \in J.$$

Z zadania B.15 wynika, że zbiór  $J$  jest przedziałem [być może nieskończonym lub pustym]. Udowodnić, że  $\|f\|_p$  jest ciągłą funkcją zmiennej  $p \in J$ .

**B.27** (trudniejsze). Dana jest przestrzeń z miarą  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ , taka że  $\mu(X) = 1$ , liczba nieparzysta  $n$  oraz zbiory  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  spełniające  $\mu(A_i) \geq 1/2$  dla każdego  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Wykazać, że istnieją  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , takie że  $\mu(A_i \cap A_j) \geq \frac{n-1}{4n}$ .

**B.28.** Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 \ln(1 + x/n)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2 + 2^n)}{nx^2} dx.$$

B. Całki

**B.29.** Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{dx}{n + n^2 \sin(x/n^2)}.$$

*W ramach autosprawdzenia.* Odpowiedź należy oczywiście starannie uzasadnić (nie wychodzi 0).

**B.30.** a) Zgadnąć, ile wynosi granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx,$$

a następnie sprawdzić, czy odgadnięty wynik jest poprawny.

b) Rozstrzygnąć, czy istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{2n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx.$$

Jeśli tak, to obliczyć ją, a jeśli nie, to znaleźć

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_n^{2n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx.$$

[Wszystkie odpowiedzi bardzo starannie uzasadnić.]

**B.31.** Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{(\sin x + \cos x)^n}{1 + (\sin x + \cos x)^{2n}} \exp(-x - \sin x - \cos x) dx$$

**B.32.** Funkcja  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła i ograniczona. Obliczyć granicę

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \frac{\delta f(x)}{\delta^2 + x^2} dx.$$

**B.33.** Dane są liczby  $0 < a < b$ . Obliczyć

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

*Wskazówki.* Można przestawić całki (jakie?), można próbować różniczkować względem czegoś (czego?). [Oczywiście należy uzasadnić legalność wykonywanych manewrów.]

**B.34.** Stosując [m.in.] twierdzenie Fubinię i związek  $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt$  (dla  $x > 0$ ) udowodnić, że

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

[Oczywiście uzasadnić wszystkie przejścia].

## B. Całki

**TODO B.35** ( $\sigma$ -ciało produktowe). [under construction]

**TODO B.36** (ogólne twierdzenie Fubinię). [under construction]

**TODO B.37** ( $\sigma$ -ciało cylindryczne). [under construction]

**B.38.** Obliczyć całki (np. stosując twierdzenie Fubinię):

$$\int_A x e^{-y^2} d\lambda_2(x, y) \quad \text{dla } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 1, y > 0\},$$
$$\int_B \frac{x d\lambda_3(x, y, z)}{1 + (xyz)^4} \quad \text{dla } B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 1, z > 1\},$$
$$\int_C \frac{d\lambda_3(x, y, z)}{(x + y + 1)^2} \quad \text{dla } C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, 0 < x + y < 1, \\ 0 < z(x + y + 1) < 1\}.$$

*W ramach autosprawdzenia.* Wśród odpowiedzi jest: jedna liczba ujemna, jedna liczba niewymierna, jedna liczba całkowita.

**B.39.** Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowna [względem jednowymiarowej miary Lebesgue'a]. Określamy

$$\varphi(y) := \int_y^{y+1} f(x) dx \quad \text{dla } y \in \mathbb{R}.$$

Uzasadnić, że funkcja  $\varphi$  jest dobrze zdefiniowana, całkowna oraz

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

**B.40.** Obliczyć objętość bryły

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 < 1, x > 0, x^2 > z > 0\}.$$

*Wskazówka (?)*. Oczywiście warto spróbować sobie wyobrazić, jak ta bryła wygląda, ale nie jest to potrzebne do zrobienia zadania.

*W ramach autosprawdzenia.* Wychodzi mniej niż 4/5.

**B.41** (egzamin 2007). Dane są zbiory mierzalne  $A, B \subset [0, 1]$ . Niech  $f(x) = \lambda_1(A \cap [0, x])$ ,  $g(x) = \lambda_1(B \cap [0, x])$  dla  $x \in [0, 1]$ . Obliczyć

$$\int_B f d\lambda_1 + \int_A g d\lambda_1.$$

**B.42.** Fragmenty następujących powierzchni:

$$2xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = 2x, \quad x = 2y, \quad z = 0, \quad yz = 1 \quad [x, y > 0],$$

dzielą zbiór  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0\}$  na kilka obszarów. Jeden z tych obszarów jest ograniczony – obliczyć jego objętość.

## B. Całki

**B.43.** Obliczyć wartość średnią<sup>1</sup> funkcji  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  na zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < x + y + z\}.$$

*W ramach autosprawdzenia.* Trzeba policzyć dwie całki, ich wartości to – w przybliżeniu, w kolejności rosnącej – ok. 2, 72 i 3, 26.

**B.44.** Dany jest kąt dwuścienny o rozwartości  $2\gamma$ ,  $0 < \gamma < \pi/2$ , którego krawędź przechodzi przez środek kuli [w  $\mathbb{R}^3$ ] o promieniu 1. Niech  $C$  będzie częścią kuli zawartą w tym kącie dwuściennym. Obliczyć odległość środka ciężkości zbioru  $C$  od krawędzi kąta.

**B.45.** Niech  $L: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  będzie przekształceniem liniowym nieosobliwym i niech  $E \subset \mathbb{R}^k$  będzie zbiorem mierzalnym ograniczonym. Wykazać, że obrazem [w odwzorowaniu  $L$ ] środka ciężkości zbioru  $E$  jest środek ciężkości zbioru  $L(E)$  [obrazu zbioru  $E$ ].

**B.46.** Niech  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{-2x, x - 1\} < y < \min\{1 - 2x, x + 1\}\}$ . Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \left( \frac{2x + y + n}{n} \right)^n dx dy.$$

[Odpowiedź oczywiście starannie uzasadnić].

**B.47** (egzamin 2011/12). Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-2\pi n}^{2\pi n} \left( 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} \right) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \exp(-2x^2) dx.$$

**B.48.** Niech  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < z^{1/3}\}$ . Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \frac{\exp(x^2 + y^2 + z^2)}{n \sin\left(\frac{1}{n} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)} d\lambda_3(x, y, z).$$

[Oczywiście starannie uzasadnić wszystkie kroki].

*W ramach autosprawdzenia.* Wychodzi więcej niż 9/4.

**B.49** (całkiem fajne). Niech  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < x^{1/3}\}$ . W zależności od wartości parametru  $p \in \mathbb{R}$  obliczyć całkę

$$\int_A x^p d\lambda_3(x, y, z).$$

*Uwagi.* Czasem wyjdzie  $+\infty$ . Na pewno można od razu podstawiać sferycznie w  $\mathbb{R}^3$ . A może da się zrobić nieco sprytniej?

---

<sup>1</sup>Tzn.  $\frac{1}{\lambda_3(A)} \int_A f d\lambda_3$ .

B. Całki

**B.50.** Obliczyć całkę

$$\iiint_{t^2+2x^2+3y^2+4y^2 < 1} \frac{t^2 dt dx dy dz}{t^2 + 2x^2 + 3y^2 + 4y^2}.$$

W ramach autosprawdzenia. Wychodzi więcej niż 1/4.

**B.51.** Obliczyć miarę zbioru

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, xy < z, x^4 + z^4 < x^2 z\}.$$

**B.52.** Dla jakich par wykładników  $p, q > 0$  funkcja  $f(x) = \|x\|_2^{-p}(1 - \|x\|_2)^{-q}$ ,  $x \in \mathbb{R}^k$ , jest całkowna po kuli  $B = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\|_2 < 1\}$ ?

**B.53.** W przestrzeni  $\mathbb{R}^k$  rozważamy podprzestrzeń „równikową”

$$H = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_k = 0\}$$

[która jest izomorficzna i izometryczna z  $\mathbb{R}^{k-1}$ ]. Niech  $C$  będzie stożkiem, którego podstawą jest zbiór  $B \subset H$  (ograniczony i mierzalny względem  $k-1$ -wymiarowej miary Lebesgue’a), a wierzchołkiem punkt leżący w odległości  $h$  od  $H$ . W jakiej odległości od  $H$  leży środek ciężkości zbioru  $C$ ?

**B.54.** Niech  $A \subset \mathbb{R}^3$  będzie zbiorem mierzalnym, ograniczonym, leżącym w półprzestrzeni  $z > 0$ . Niech  $m := \lambda_3(A)$  i niech  $(a, b, c)$  będzie środkiem ciężkości zbioru  $A$ . Dane są liczby  $0 < \alpha < \beta$ . Dla  $t > 0$  niech  $f(t)$  oznacza miarę części zbioru  $A$  zawartej pomiędzy płaszczyznami o równaniach  $z = \alpha t$  i  $z = \beta t$ . Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty f(t) dt,$$

tj. wyrazić ją przez wielkości dane.

**B.55.** Jeśli funkcja  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowna, to definiujemy funkcję  $\mathcal{L}(f): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem

$$\mathcal{L}(f)(x) := \int_0^\infty f(t) e^{-tx} dt \quad \text{dla } x \in [0, \infty).$$

- a) Uzasadnić, że to poprawna definicja.
- b) Udowodnić, że jeśli funkcja  $f$  jest całkowna, to funkcja  $\mathcal{L}(f)$  jest klasy  $C^\infty$ .
- c) Udowodnić, że jeśli funkcje  $f, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  są całkowne, to wówczas funkcja  $f * g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowana wzorem

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt \quad \text{dla } x \in [0, \infty)$$

też jest całkowna i dla każdego  $x \in [0, \infty)$  zachodzi równość

$$\mathcal{L}(f * g)(x) = \mathcal{L}(f)(x) \cdot \mathcal{L}(g)(x).$$

*Uwaga.* W pewnym momencie na zajęciach pojawią się sploty i wtedy podpunkt c) stanie się pewnie łatwiejszy (ale można go robić wcześniej).