AM II.1, semestr zimowy 2024/25

Michał Strzelecki · michalst@mimuw.edu.pl · 15 listopada 2024

O tym pliku. Plik jest w budowie i będzie się powiększał w trakcie semestru. Będę się starał udostępniać w miarę kompletne rozdziały, ale numeracja zadań i ich treści mogą się zmienić. Mogą się trafiać rozmaite błędy – *będę wdzięczny za informacje o wszystkich.*

Każdy z rozdziałów jest podzielony na dwie części. Pierwsza część zawiera zadania, które planuję omawiać podczas zajęć, a także hasłowy skrót najważniejszych treści teoretycznych. Można to przejrzeć przed zajęciami (np. żeby zorientować się, jaką tematykę będziemy poruszać i co należy powtórzyć z wykładu), ale raczej nie warto rozwiązywać zadań z części pierwszej w domu przed zajęciami. Zadania oznaczone pełną kropką (•) omówimy prawie na pewno na ćwiczeniach.

Druga część rozdziału to zadania, z których większości – z różnych powodów – nie będziemy omawiać na zajęciach (np. bo omówimy inne podobne, bo są za łatwe, bo są za trudne, bo są za mało na temat, bo będą zadane w pracy domowej, bo są pomyślane jako zadania do pracy własnej). Te zadania można wykorzystać jako zadania treningowe lub uzupełniające (ale nie twierdzę, że warto lub należy zrobić wszystkie).

O przedmiocie. AM 2 będzie trochę innym przedmiotem niż AM 1. Będziemy pracować z funkcjami $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$. W wielu wymiarach będzie trudniej korzystać z geometrycznych intuicji (bo będzie trudniej wyobrazić sobie lub narysować na komputerze wykres funkcji). Niektóre fakty, które były praktycznie oczywiste dla funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tu będą wymagały bardziej uważnych, skomplikowanych lub technicznych dowodów. Niektóre pojęcia będą dość abstrakcyjne. Ze względu na charakter materiału same ćwiczenia też pewnie będą wyglądały trochę inaczej niż na pierwszym roku.

Wiele osób zniechęca się przez „znaczkologię" – faktycznie, czasami będzie trochę indeksów, bo funkcja będzie brała wektor o k współrzędnych i zwracała wektor o l współrzędnych, a zamiast pochodnej funkcji w punkcie (czyli liczby) będziemy mieli przekształcenie liniowe (macierz). (A jeśli byśmy mieli ciąg funkcji i/lub ich pochodnych wzięty w jakimś ciągu punktów i zaczęli wybierać podciągi zbieżne, to ...). Wielka prośba: proszę nie dać się zniechęcić, zmylić i zgubić! Za większością pojęć, twierdzeń i rozumowań nadal będą stały konkretne geometryczne lub analityczne pomysły. Poznamy różne *bardzo ważne* fakty, *bardzo piękne* twierdzenia i *bardzo mocne* teorie.

Wymagania wstępne Oczywiście będzie potrzebne rozsądne ogarnięcie w tematyce AM 1 (funkcje jednej zmiennej), ale zakładam, że z tym nie powinno być problemów.

Po drugie, jeśli ktoś przez wakacje zupełnie zapomniał o GALu, to dobrze byłoby przypomnieć sobie, że macierze zadają przekształcenia liniowe, jak się mnoży macierze (i kiedy można to robić) i jak się mnoży macierz przez wektor, a w dalszej kolejności, że były takie rzeczy jak iloczyn skalarny, macierze symetryczne, formy kwadratowe, oraz że wyznacznik ma coś wspólnego ze zmianą objętości.

Wreszcie, będzie praktycznie od razu potrzebne trochę topologii (zbiory otwarte i domknięte [w przestrzeni $\mathbb{R}^k$], ich własności), więc proszę skupić się na szybkim ogarnięciu podstawowych definicji, które pojawią się na wykładzie z AM 2, oraz uważać zajęciach z topologii.

Spis treści

1. Normy, granice, ciągłość

Materiał do omówienia na zajęciach [3–4 ćw.]

Teoria (déjà vu). Przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^k$. Wiemy, że:

- $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ to punkty/wektory,
- $x \cdot y = \langle x, y\rangle = xy^T = \sum_{j=1}^k x_j y_j$ to iloczyn skalarny,
- $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = (\sum_{j=1}^k x_j^2)^{1/2}$ to norma euklidesowa (odległość od zera),
- $\|x - y\|_2$ to odległość punktów x, y (spełnia aksjomaty przestrzeni metrycznej),
- zachodzi nierówność Cauchy'ego–Schwarza: $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|_2\|y\|_2$.

Teoria (déjà vu). Definicja normy [na przestrzeni liniowej].

• **1.1** (norma w ℓ_p^k). Dla $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ oraz $p \in [1, \infty)$ kładziemy

$$\|x\|_p \coloneqq \Big(\sum_{j=1}^k |x_j|^p\Big)^{1/p}.$$

a) Co kładziemy dla $p = \infty$?
b) Uświadomić sobie, że $\|\cdot\|_p$ jest normą na $\mathbb{R}^k$ dla $p \in \{1, 2, \infty\}$.
c) Dla $k = 2$, $p \in \{1, 2, \infty\}$ naszkicować domknięte kule jednostkowe

$$\{x \in \mathbb{R}^k : \|x\|_p \leqslant 1\}.$$

Naszkicować lub słownie opisać te kule również dla $k = 3$, $p \in \{1, 2, \infty\}$.
d) Uzasadnić, że $\|x\|_p \geqslant \|x\|_q$ dla $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $x \in \mathbb{R}^k$. Zrozumieć, co znaczy ta nierówność w terminach kul jednostkowych.
e) Wykazać, że $\|\cdot\|_p$ jest normą na $\mathbb{R}^k$ dla każdego $p \in [1, \infty]$.

○ **1.2** (uzupełnienie wiedzy podwórkowej). a) Załóżmy, że $p, q \in (1, \infty)$ spełniają $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wykazać, że dla $x, y \in \mathbb{R}^k$ zachodzi nierówność Höldera:

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|_p\|y\|_q.$$

Wskazówki. Dowodów jest wiele. Można udowodnić najpierw nierówność Younga: $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ $(a, b \geqslant 0)$ korzystając z wypukłości odpowiedniej funkcji. Alternatywnie można najpierw udowodnić nierówność Höldera dla $p, q \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{p} = \frac{n}{n+m}$, $\frac{1}{q} = \frac{m}{n+m}$.
b) Uzasadnić, że tak naprawdę zachodzi też $\|x\|_p = \sup\{\langle x, y\rangle : \|y\|_q \leqslant 1, y \in \mathbb{R}^k\}$.
c) Uświadomić sobie, że wszystko działa też dla $p, q \in [1, \infty]$.

• **1.3.** Dana jest pewna norma $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^k$. Sprawdzić, że domknięta kula jednostkowa $B = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leqslant 1\}$ jest zbiorem wypukłym i symetrycznym (względem 0, tzn. $B = -B$). Uzasadnić, że dla każdej prostej $L \subset \mathbb{R}^k$ przechodzącej przez $0 \in \mathbb{R}^k$ zbiór $B \cap L$ jest odcinkiem skończonej [euklidesowej] długości.

• **1.4.** Dany jest zbiór $K \subset \mathbb{R}^k$, który jest wypukły, zwarty (tzn. – w przypadku $\mathbb{R}^k$ – domknięty i ograniczony), ma niepuste wnętrze, i jest symetryczny ($K = -K$). Dla $x \in \mathbb{R}^k$ definiujemy

$$\|x\|_K = \inf\Big\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in K\Big\}.$$

a) Wykonać rysunek poglądowy.
b) Wykazać, że $\|\cdot\|_K$ jest normą, zaś K domkniętą kulą jednostkową w tej normie.

***

Teoria (łatwe i naturalne). Definicja zbieżności ciągu punktów w $\mathbb{R}^k$ (w normie [euklidesowej]); zbieżność współrzędnych.

Komentarz. Odtąd będziemy na ogół pracować ze standardową normą euklidesową $\|\cdot\|_2$ w $\mathbb{R}^k$, ale gdybyśmy wybrali inną normę, to we wprowadzanych pojęciach zbieżności, ciągłości, otwartości itp. niewiele by się zmieniło, bo okazuje się, że na przestrzeni $\mathbb{R}^k$ wszystkie normy są równoważne (patrz zadanie 1.10 poniżej).

Teoria (déjà vu). Definicja granicy funkcji w punkcie (mamy $A \subset \mathbb{R}^k$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, oraz punkt $p \in \mathbb{R}^k$, który jest punktem skupienia zbioru A).

• **1.5.** Obliczyć poniższe granice lub wykazać, że nie istnieją:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+xy+y^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^4)}{\exp(x^2+y^4)-1}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{7/5}y^3}{x^2+4y^6}.$$

• **1.6.** Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma tę własność, że dla każdej prostej $L \subset \mathbb{R}^2$ przechodzącej przez $(0,0)$ zachodzi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\in L} f(x,y) = 0$$

(po obcięciu f do prostej L granica w punkcie $(0,0)$ istnieje i jest równa 0). Rozstrzygnąć, czy wynika z tego, że istnieje granica $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

• **1.7.** a) Podać przykład możliwie najprostszej funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, która spełnia wszyskie poniższe warunki:
- dla każdego $y \in \mathbb{R}$ istnieje skończona granica $\lim_{x\to 0} f(x,y)$,
- dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje skończona granica $\lim_{y\to 0} f(x,y)$,
- istnieją skończone granice iterowane

$$\lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big), \qquad \lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big)$$

(i są równe),

- granica $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *nie* istnieje.

b) Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest zadana wzorem

$$f(x,y) = (x^2+y^2) \cdot \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x, y \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Uświadomić sobie, że $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, ale nie istnieje granica iterowana $\lim_{y\to 0}\bigl(\lim_{x\to 0} f(x,y)\bigr)$.

c) Załóżmy, że dla funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zachodzi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, a ponadto dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje skończona granica $g(x) := \lim_{y\to 0} f(x,y)$. Czy jest prawdą, że $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$?

Teoria (déjà vu). Mamy $A \subset \mathbb{R}^k$ (dowolny), $f\colon A \to \mathbb{R}^l$. Definicja ciągłości funkcji (ciągowa i epsilonowo-deltowa (w punkcie $p \in A$, na całym A)).

Uwaga (istotna). Mamy $A \subset \mathbb{R}^k$, $f\colon A \to \mathbb{R}^l$. Twierdzeniem z wykładu jest, że wtedy powyższa definicja funkcji ciągłej $f\colon A \to \mathbb{R}^l$ jest zgodna z ogólną definicją z wykładu topologii[1] – w zbiorze A rozpatrujemy naturalną topologię indukowaną z całej przestrzeni $\mathbb{R}^k$, tj. zbiory otwarte w naszej mniejszej przestrzeni topologicznej A to dokładnie zbiory postaci $A \cap U$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^k$ jest otwarty (w $\mathbb{R}^k$).

• **1.8.** Zbadać ciągłość funkcji $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanych wzorami:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2} e^{-|y|/x^2} & \text{jeśli } x \neq 0, \\ 1 & \text{jeśli } x = 0, \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^3-y} & \text{dla } y \neq x^3, \\ 1 & \text{dla } y = x^3. \end{cases}$$

Teoria (elementy topologii). Zbiór otwarty, domknięty. Ciągowa charakteryzacja domkniętości. W $\mathbb{R}^k$ (!) zbiór zwarty to zbiór domknięty i ograniczony. Wnętrze, domknięcie, brzeg. Spójność.

Teoria (déjà vu). Większość faktów o ciągłość przenosi się na przypadek funkcji wielu zmiennych funkcji, m.in. te dotyczące operacji arytmetycznych, składania, osiągania kresów na zbiorach zwartych, jednostajnej ciągłości na zbiorach zwartych, ale trzeba trochę uważać, patrz np. zadania 1.27, 1.28, 2.12, 2.13.

• **1.9** (klasyczne; por. zadanie 1.35). a) Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Sprawdzić, że f jest ciągła na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$, ale jest ciągła po obcięciu do dowolnej prostej przechodzącej przez $(0,0)$.

b) Podać przykład funkcji $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mającej dokładnie dwa [zadane z góry] punkty nieciągłości (a,b), (c,d) i takiej, że g jest ciągła po obcięciu do dowolnej prostej $L \subset \mathbb{R}^2$.

c) Podać przykład funkcji $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nieciągłej dokładnie w [zadanych z góry] punktach $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ ($n \in \mathbb{N}$), i ciągłej po obcięciu do dowolnej prostej $L \subset \mathbb{R}^2$.

[1] Przekształcenie $f\colon X \to Y$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$w przestrzeń topologiczną $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $U \in \mathcal{T}_Y$ mamy $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ (przeciwobrazy zbiorów otwartych [w Y] są otwarte [w X]).

○ **1.10** (ważne)**.** Dane jest $k \in \mathbb{N}$ i pewna norma $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^k$. Wykazać, że istnieją pewne stałe $A, B \in (0, \infty)$, zależne tylko od k i $\|\cdot\|$, takie że dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$ zachodzi

$$A\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant B\|x\|_2.$$

W szczególności, ciąg punktów jest zbieżny w normie $\|\cdot\|$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny w standardowej normie euklidesowej.

• **1.11.** Ustalmy niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$. Dla $x \in \mathbb{R}^k$ definiujemy

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{\|x - y\|_2 : y \in A\}.$$

a) Wykazać, że $\operatorname{dist}(\cdot, A) \colon \mathbb{R}^k \to [0, \infty)$ jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^k$, a nawet spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1.

b) Wykazać, że jeśli zbiór A jest domknięty, to powyższe infimum jest osiągane.

c) Wykazać, że jeśli zbiór A jest domknięty i wypukły, to powyższe infimum jest osiągane w dokładnie jednym punkcie.

d) Wykazać, że jeśli $A, B \subset \mathbb{R}^k$ są niepuste, domknięte i rozłączne, to istnieje funkcja ciągła $f \colon \mathbb{R}^k \to [0, 1]$, taka że

$$f(x) = 0 \iff x \in A, \qquad f(x) = 1 \iff x \in B.$$

• **1.12.** Załóżmy, że funkcja $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:
1) dla każdego $y \in \mathbb{R}$ funkcja $x \mapsto f(x, y)$ jest ciągła, rosnąca,
2) dla każdego $x \in \mathbb{R}$ funkcja $y \mapsto f(x, y)$ jest ciągła.

Wykazać, że funkcja $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest ciągła.

Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

1.13 (powtórka z GALu)**.** Przypomnieć sobie z GALu hasła: forma dwuliniowa, iloczyn skalarny, norma/długość wektora, tożsamość równoległoboku.

1.14. Dana jest pewna norma $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^k$. Uzasadnić, że wzór

$$\|x\|_* := \sup\{\langle x, y\rangle : y \in \mathbb{R}^k, \|y\| \leqslant 1\}, \quad x \in \mathbb{R}^k,$$

również zadaje normę na $\mathbb{R}^k$. [W szczególności uzasadnić, że $\|x\|_* < \infty$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$.]

1.15 (niekluczowe dla nauki AM 2, ale naturalne, choć być może dość abstrakcyjne)**.** Dla niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}^k$ definiujemy zbiór

$$A^\circ = \{y \in \mathbb{R}^k : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \text{ dla każdego } x \in A\}.$$

Zbiór ten nazywa się zbiorem polarnym albo polarem zbioru A.

a) Uzasadnić, że A° jest domkniętym, wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^k$ zawierającym 0.

b) Uzasadnić, że jeśli $A \subset B$, to $A^\circ \supset B^\circ$.

c) Wykazać, że jeśli zbiór $K \subset \mathbb{R}^k$ jest wypukły, zwarty, ma niepuste wnętrze, i jest symetryczny ($K = -K$), to zbiór K° też jest wypukły, zwarty, ma niepuste wnętrze, i jest symetryczny, a ponadto $(K^\circ)^\circ = K$.

d) Wykazać, że $\|\cdot\|_{K^\circ}$ jest normą dualną do $\|\cdot\|_K$, tzn. dla $x \in \mathbb{R}^k$ zachodzi

$$\|x\|_K = \sup\{\langle x, y\rangle : \|y\|_{K^\circ} \leqslant 1, y \in \mathbb{R}^k\}.$$

e) Zorientować się, że $\|\cdot\|_K$ jest normą dualną do $\|\cdot\|_{K^\circ}$.

1.16 (norma operatorowa)**.** Dla przekształcenia liniowego $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ (które można utożsamiać z zadającą je macierzą $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant l, 1\leqslant j\leqslant k}$ rozmiaru $l \times k$) kładziemy

$$\|A\|_{2\to 2} \coloneqq \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 \leqslant 1,\ x \in \mathbb{R}^k\}.$$

a) Wykazać, że

$$\|A\|_{2\to 2} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2\Big)^{1/2}.$$

Podać przykład macierzy 2×2, dla której powyższa nierówność jest ostra.

b) Uświadomić sobie, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$ zachodzi $\|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_{2\to 2}\|x\|_2$, że $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ spełnia warunek Lipschitza (i że $\|A\|_{2\to 2}$ jest najmniejszą stałą z jaką on zachodzi).

c) Sprawdzić, że $\|\cdot\|_{2\to 2}$ jest normą [na przestrzeni przekształceń liniowych $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$, którą można utożsamiać z $\mathbb{R}^{lk}$].

d) Uzasadnić, że jeśli $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, $B\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ to przekształcenia liniowe, to

$$\|BA\|_{2\to 2} \leqslant \|B\|_{2\to 2}\|A\|_{2\to 2}.$$

e) Uzasadnić, że jeśli $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ jest izomorfizmem liniowym, to

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_{2\to 2}}\|x\|_2 \leqslant \|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_{2\to 2}\|x\|_2 \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}^k.$$

1.17. Dla przekształcenia liniowego $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ (które można utożsamiać z zadającą je macierzą $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant l, 1\leqslant j\leqslant k}$ rozmiaru $l \times k$) kładziemy

$$\|A\|_{1\to 2} \coloneqq \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_1 \leqslant 1,\ x \in \mathbb{R}^k\},$$
$$\|A\|_{2\to \infty} \coloneqq \sup\{\|Ax\|_\infty : \|x\|_2 \leqslant 1,\ x \in \mathbb{R}^k\}.$$

Wykazać, że

$$\|A\|_{1\to 2} = \max\{\|(a_{ij})_{i=1}^l\|_2 : 1 \leqslant j \leqslant k\}$$
$$\|A\|_{2\to \infty} = \max\{\|(a_{ij})_{j=1}^k\|_2 : 1 \leqslant i \leqslant l\}.$$

(maksimum [euklidesowych] długości kolumn i wierszy macierzy A, odpowiednio).

1.18. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, $f(x,y) = y^x$ dla $(x,y) \in A$. Zbadać istnienie granicy

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)$$

w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$.

1.19. Obliczyć granice:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln(x^2+3x^4), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}.$$

○ **1.20.** Obliczyć poniższe granice lub wykazać, że nie istnieją:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x+y)}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos^2(|x|+|y|)}{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^4}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+x^4+y^4}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^4},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^4}{x^2+y^4}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^4}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4},$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^{10}y^{10}z^{10}}{x^4+y^2z} \quad \text{na zbiorze } \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4+y^2z \neq 0\},$$

1.21. Obliczyć poniższe granice lub wykazać, że nie istnieją:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)y}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x)yz}{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x)y}{x^2+|z|y^2}, \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x)y}{zx^2+y^2}.$$

(ostatni przykład na „naturalnej" dziedzienie, na której $zx^2+y^2 \neq 0$).

1.22. Dla każdego punktu $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, którego współrzędne spełniają równanie $a+b=1$, obliczyć granicę

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{y\sin(\pi x)}{x+y-1}$$

lub wykazać jej nieistnienie. (Zakładamy „naturalną" dziedzinę funkcji, odpowiadającą niezerującemu się mianownikowi).

1.23 (kolokwium 2010)**.** Obliczyć granicę lub wykazać, że nie istnieje:

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \sqrt{\frac{1}{x^4+y^4}+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^4+y^4}+\frac{1}{y}}.$$

1.24. a) Wskazać przykład rodziny zbiorów domkniętych w $\mathbb{R}^2$, której suma jest zbiorem otwartym (ale nie całą przestrzenią).

b) Wskazać przykład rodziny zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^2$, której przecięcie jest niepustym zbiorem domkniętym.

1.25. a) Uświadomić sobie, że każdy zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^k$ jest sumą pewnej rodziny kul otwartych.

b) Uzasadnić, że każdy zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^k$ jest sumą pewnej *przeliczalnej* rodziny kul otwartych.

c) Uzasadnić, że każdy zbiór otwarty $V \subset \mathbb{R}$ jest sumą pewnej rodziny parami rozłącznych odcinków otwartych [być może nieskończonej długości].

∘ **1.26.** a) W zbiorze $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ zadajemy naturalną topologię indukowaną z $\mathbb{R}^2$ (zbiory otwarte w A to zbiory postaci $A \cap U$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty). Dla każdego z następujących zbiorów określić, czy jest on otwartym, domkniętym, zwartym podzbiorem A:

$$\begin{aligned}
&\{(x, y) \in A : 0 < y < 1\},\\
&\{(x, y) \in A : 0 < y \leqslant 1\},\\
&\{(x, y) \in A : x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1\}.
\end{aligned}$$

b) W zbiorze $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$ zadajemy naturalną topologię indukowaną z $\mathbb{R}^2$ (zbiory otwarte w B to zbiory postaci $B \cap U$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty). Dla każdego z następujących zbiorów określić, czy jest on otwartym, domkniętym, zwartym podzbiorem B:

$$\begin{aligned}
&\{(x, y) \in B : 0 < y < 1\},\\
&\{(x, y) \in B : 0 \leqslant y < 1\},\\
&\{(x, y) \in B : 0 < y \leqslant 1\},\\
&\{(x, y) \in B : 0 \leqslant y \leqslant 1\},\\
&\{(x, y) \in B : x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1\}.
\end{aligned}$$

∘ **1.27.** a) Przypomnieć sobie, że jeśli P jest wielomianem jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych, to obrazem prostej jest półprosta domknięta, cała prosta lub punkt.

b) Podać przykład wielomianu dwóch zmiennych o współczynnikach rzeczywistych $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, którego obrazem jest półprosta otwarta $(0, \infty)$.

1.28. a) Przypomnieć sobie, że jeśli $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, to $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy gdy jest ściśle monotoniczna. Ponadto, jeśli f jest różnowartościowa i ciągła, to jest bijekcją na swój obraz, a funkcja odwrotna $f^{-1}\colon f(I) \to \mathbb{R}$ też jest ciągła.

b) Podać przykład przedziału $I \subset \mathbb{R}$ i funkcji $g\colon I \to \mathbb{R}^2$, która jest ciągła i różnowartościowa, ale funkcja odwrotna $g^{-1}\colon g(I) \to I$ nie jest ciągła.

1.29. Zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y-x}{y-\sin(x)} & \text{jeśli } y \neq \sin(x),\\ 1 & \text{jeśli } y = \sin(x). \end{cases}$$

1.30. Zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadanej wzorem:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \left(\frac{x+\sin(y)}{1+z^2}, \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, \frac{1-\cos(xyz)}{x^2+y^4+z^6}\right) & \text{dla } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ (0,0,0) & \text{dla } (x,y,z) \neq (0,0,0). \end{cases}$$

1.31. Niech $k \geqslant 2$. Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest ciągła i istnieją $a, b \in \mathbb{R}^k$ takie, że $f(a) < 0 < f(b)$. Uzasadnić, że funkcja f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

1.32. Dla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ niech

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \ln(1+x^2+y^2+z^2)\cos(x^2+y^2+z^2)\exp(-(x^2+y^2+z^2)), \\ g(x,y,z) &= \ln(1+x^2+y^2+z^2)\cos(xyz)\exp(-(x^2+y^4+z^6)). \end{aligned}$$

Uzasadnić, że każda z tych funkcji osiąga swoje kresy.

1.33. a) Funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ jest ciągła. Uzasadnić, że jej wykres, tj. zbiór

$$\big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l : x \in \mathbb{R}^k\big\},$$

jest domknięty [w przestrzeni $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^{k+l}$].

b) Podać przykład funkcji $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest ciągła w punkcie 0, ale której wykres$\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ jest domkniętym podzbiorem $\mathbb{R}^2$.

1.34. a) Funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest ciągła, punkt $x_0 \in \mathbb{R}^k$ jest ustalony. Wykazać, że poziomica funkcji f przechodząca przez punkt x_0, tj. zbiór

$$\big\{x \in \mathbb{R}^k : f(x) = f(x_0)\big\},$$

jest domknięty.

b) Podać przykład zbioru $A \subset \mathbb{R}^k$, funkcji ciągłej $g\colon A \to \mathbb{R}$ i punktu $x_0 \in A$, takich że $\{x \in A : g(x) = g(x_0)\}$ *nie* jest domkniętym podzbiorem $\mathbb{R}^k$.

$\circ$ **1.35** (por. zadanie 1.9)**.** Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\exp(-1/x^2)y}{\exp(-2/x^2)+y^2} & \text{jeśli } x \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } x = 0. \end{cases}$$

a) Sprawdzić, że f jest ciągła po obcięciu do dowolnej krzywej postaci $y = cx^{m/n}$ ($c \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$ – względnie pierwsze, $x \geqslant 0$ w przypadku gdy n jest parzyste).

b) Rozstrzygnąć, czy f jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

1.36. Załóżmy, że funkcja $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Niech

$$g(x) \coloneqq \sup\{f(x,y) : y \in [0,1]\} \quad \text{dla } x \in [0,1].$$

Wykazać, że funkcja $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła.

1.37. Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:

1) dla każdego $y \in \mathbb{R}$ funkcja $x \mapsto f(x, y)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą 7,
2) dla każdego $x \in \mathbb{R}$ funkcja $y \mapsto f(x, y)$ jest ciągła.

Wykazać, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest ciągła.

1.38. Załóżmy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ jest spójny. Wiadomo z wykładu topologii, że wówczas domknięcie zbioru A też jest zbiorem spójnym.[2]

a) Czy wnętrze zbioru A może być zbiorem niespójnym?
b) Czy brzeg zbioru A może być zbiorem niespójnym?

1.39 (informacyjnie)**.** Rozważmy [nieskończeniewymiarową] przestrzeń liniową

$$\ell_2(\mathbb{N}) \coloneqq \Big\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\Big\}$$

z normą $\|x\|_2 \coloneqq (\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2)^{1/2}$ dla $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$.

a) Wskazać ciąg różnych punktów w [domkniętej] kuli jednostkowej $\{x \in \ell_2(\mathbb{N}) : \|x\|_2 \leqslant 1\}$, z których każde dwa są w odległości $\sqrt{2}$.

b) Wywnioskować, że [domknięta] kula jednostkowa nie jest zwarta.

Uwaga. Okazuje się, że prawdziwe jest następujące twierdzenie: przestrzeń unormowana jest skończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy jej domknięta kula jednostkowa jest zwarta.

c) Połóżmy $\|x\|_\infty \coloneqq \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$ dla $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$. Uświadomić sobie, że to też jest norma [na przestrzeni $\ell_2(\mathbb{N})$]. Uzasadnić, że normy $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_\infty$ nie są równoważne (np. wskazując dla każdego $n \in \mathbb{N}$ punkt $x \in \ell_2(\mathbb{N})$, taki że $\|x\|_2 = 1$, ale $\|x\|_\infty = 1/n$).

[2] Wręcz: dowolny zbiór spełniający $A \subset B \subset \overline{A}$ jest spójny (i jest to prawda w ogólnej przestrzeni topologicznej).

2. Pochodne cząstkowe, różniczkowalność

Materiał do omówienia na zajęciach [4+ ćw. (??)]

Teoria. Pochodne cząstkowe (ozn. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f = f'_{x_i} = f_{x_i} = f'_i = f_i = D_i f = D_{e_i} f$), pochodna kierunkowa.

• **2.1.** a) Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y) = \sin(x) + y^2 e^{xy}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
b) Obliczyć pochodne cząstkowe i kierunkowe (jeśli istnieją) funkcji

$$g(x, y) = \mathbf{1}_{\{y=x^2, x>0\}} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } y = x^2 \text{ oraz } x > 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

c) Obliczyć pochodne cząstkowe (jeśli istnieją) funkcji $h(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Znaleźć pochodne kierunkowe w punkcie $(0, 0)$.

• **2.2.** a) Zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty i wypukły. Pochodne cząstkowe funkcji $f\colon A \to \mathbb{R}$ istnieją w zbiorze A i są funkcjami ograniczonymi: $|f'_x(x, y)| \leqslant C$. Wykazać, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza.
b) Podać przykład zbioru otwartego, spójnego $B \subset \mathbb{R}^2$ i funkcji $g\colon B \to \mathbb{R}$, która jest ciągła, ma [wszędzie w zbiorze B] pochodne cząstkowe, pochodne cząstkowe są ciągłe i ograniczone na B, ale funkcja g nie jest jednostajnie ciągła.

Teoria. Mamy $U = \operatorname{int} U \subset \mathbb{R}^k$, $f\colon U \to \mathbb{R}^l$, $p \in U$. Definicja różniczkowalności.[1]
Własności:
- różniczkowalność $\Longrightarrow$ ciągłość (déjà vu);
- różniczkowalność $\Longrightarrow$ istnienie pochodnych cząstkowych (kierunkowych);
- jeśli pochodne cząstkowe istnieją [wszędzie] w otoczeniu p i są *ciągłe* w p, to f jest różniczkowalna w p.

• **2.3.** Niech $f(x, y) = x\sqrt{4 + |x| - |y|}$ (na „naturalnej” dziedzinie: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, takie że $4 + |x| - |y| \geqslant 0$). Zbadać różniczkowalność w wewnętrznych punktach dziedziny.

[1] Istnieje przekształcenie liniowe $Df(p)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, takie że:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p) - Df(p)h}{\|h\|_2} = 0$$

(po lewej stronie $\mathbb{R}^k \ni h \to 0 \in \mathbb{R}^k$, po prawej stronie $0 \in \mathbb{R}^l$).

• **2.4.** Niech $f(x,y) = y^x$ dla $y > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Policzyć (w możliwie najprostszy sposób) $f'_{(4,5)}(2,3)$, tj. pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $(2,3)$ w kierunku wektora $(4,5)$.

○ **2.5.** Czy funkcja $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$?

○ **2.6.** Rozważamy przestrzeń $M_{k\times k}(\mathbb{R})$ (macierze wymiaru $k \times k$ o wyrazach rzeczywistych), którą utożsamiamy z $\mathbb{R}^{k^2}$. Funkcja $F(A) = A^2$ oczywiście musi być różniczkowalna – rozpisać definicję i sprawdzić, czy $DF(A) = 2A$. [Jeśli nie, to zrozumieć, jakim przekształceniem liniowym jest $DF(A)$.]

• **2.7.** Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x,y) = |x^2 - y| \ln(1+y)$ (na „naturalnej" dziedzinie: $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, takie że $y > -1$).

Teoria (déjà vu?). Różniczka złożenia. Różniczka funkcji odwrotnej ($k = l$, f^{-1} istnieje i ciągła w $f(p)$, $f(U)$ otwarty, $Df(p)$ to izomorfizm). Przekształcenia wieloliniowe.

***

Teoria (déjà vu). Punkty krytyczne, szukanie kresów funkcji różniczkowalnych.

• **2.8.** Znaleźć kresy funkcji $f(x,y) = x^2+xy+2y^2$ na zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Co by się zmieniło, gdybyśmy rozważali $\widetilde{f}(x,y) = x^2+xy-2y^2$?

• **2.9.** Znaleźć kresy funkcji $f(x,y) = (3x+2y)\exp(-4x^2-y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

• **2.10.** Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant x \geqslant 0\}$, $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2+1}$ dla $(x,y) \in A$. Wiadomo, że funkcja f nie ma punktów krytycznych we wnętrzu A. Znaleźć $\sup_A f$.

○ **2.11.** Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0,\ y \geqslant x-1,\ x^2 \geqslant 4y,\ 0 < x < 2\}$ oraz

$$f(x,y) = \frac{(1-y)^2(x^2-y-2xy+2y^2)}{(x-2y)^2}$$

dla $(x,y) \in A$. Znaleźć $\sup_A f$, $\inf_A f$.

Sugestia. Naszkicować zbiór A, zbadać znak $f'_x(x,y)$.

• **2.12** (klasyczne, por. zadanie 2.32)**.** Niech $f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2)$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sprawdzić, że funkcja f obcięta do dowolnej prostej $L \subset \mathbb{R}^2$ przechodzącej przez punkt $(0,0)$ ma w punkcie $(0,0)$ minimum lokalne, ale punkt $(0,0)$ nie jest minimum lokalnym funkcji f.

○ **2.13** (patrz też zadanie 2.31)**.** Niech $f(x,y) = x^2(1+y)^3+y^2$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sprawdzić, że jedynym punktem krytycznym funkcji f jest $(0,0)$, że f ma w $(0,0)$ minimum lokalne, ale f nie jest ograniczona ani z góry, a ani z dołu.

Komentarz. W szczególności punkcie swojego jedynego ekstremum lokalnego funkcja f nie osiąga ani kresu dolnego, ani kresu górnego – czy taka sytuacja może się zdarzyć dla funkcji jednej zmiennej?

***

Teoria. Gradient, „kierunek najszybszego wzrostu”, prostopadłość do poziomicy.

Teoria. Wektor styczny do zbioru; stożek styczny.

◦ **2.14.** a) Jakie wektory są styczne do wykresu funkcji $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt{|x|}$ w punkcie $(0,0)$?

b) Jakie wektory są styczne do zbioru $(\mathbb{Q} \cap [0,\infty))^2$ w punkcie $(0,0)$?

c) Narysować poziomicę $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ funkcji $f(x,y) = x^2+y^2$, obliczyć $\nabla f(x,y)$ i zaznaczyć ten wektor na rysunku dla wybranego punktu z poziomicy – jakie wektory są styczne do poziomicy w tym punkcie?

d) Rozważmy paraboloidę obrotową w $\mathbb{R}^3$ opisaną równaniem $z = x^2 + y^2$, tj. wykres $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$ funkcji z poprzedniego podpunktu. Opisać [geometrycznie/słownie], jak wyglądają [afiniczne] płaszczyzny styczne [do paraboloidy/do wykresu] w punktach $(0,0,0)$ i $(1,0,1)$. Niech $\varphi(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$ będzie parametryzacją paraboloidy. Wypisać $D\varphi(0,0)$ oraz $D\varphi(1,0)$ i sprawdzić, że wektory $D\varphi(0,0)e_1$, $D\varphi(0,0)e_2$ oraz $D\varphi(1,0)e_1$, $D\varphi(1,0)e_2$ tworzą bazę odpowiednich [liniowych] przestrzeni stycznych.

***

Teoria. Różniczka złożenia, *chain rule.*

• **2.15.** a) Funkcja $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, a jej pochodne cząstkowe spełniają zależność

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Udowodnić, że $g(x,y,z) = \varphi(x+y+z)$ dla pewnej różniczkowalnej funkcji $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Jak zmieni się teza, jeśli założymy, że $\frac{\partial g}{\partial x} = 2\frac{\partial g}{\partial y} = 3\frac{\partial g}{\partial z}$?

• **2.16.** a) Funkcja $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, a jej pochodne cząstkowe spełniają zależność

$$y\frac{\partial g}{\partial x} = x\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Udowodnić, że $g(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$ dla pewnej funkcji $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ (ciągłej, różniczkowalnej na $(0,\infty)$).

b+c+d) Patrz zadanie 2.46.

• **2.17.** Funkcja $f\colon \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełnia zależność

$$xf'_x + yf'_y = f.$$

Udowodnić, że $f(x,y) = x\varphi(y/x)$ dla pewnej różniczkowalnej funkcji $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

***

Teoria. Tw. Lagrange'a o wartości średniej.

Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

2.18. a) Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym, takim że dla każdego $c \in \mathbb{R}$ część wspólna prostej $\{(c, y) : y \in \mathbb{R}\}$ i zbioru U jest odcinkiem lub zbiorem pustym. Załóżmy, że funkcja $f \colon U \to \mathbb{R}$ spełnia $f'_y(x, y) = 0$ dla $(x, y) \in U$ (pochodna cząstkowa istnieje w każdym punkcie dziedziny i jest równa 0). Uświadomić sobie, że, że wówczas funkcja f nie zależy od zmiennej y, tzn. jeśli $(x, y_1), (x, y_2) \in U$, to $f(x, y_1) = f(x, y_2)$.

b) Niech $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0 \text{ oraz } y = 0\}$. Podać przykład [możliwie prostej] funkcji $g \colon \mathbb{R}^2 \setminus L \to \mathbb{R}$, która ma ciągłe pochodne cząstkowe oraz $g'_y(x, y) = 0$ dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus L$, ale mimo to nie jest prawdą, że funkcja g nie zależy od zmiennej y (tzn. nie jest prawdą, że dla każdych $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ mamy $g(x, y_1) = g(x, y_2)$).

2.19. Niech $U = \{(x, p, a, b, c) \in \mathbb{R}^5 : x > 0\}$ i niech $f(x, p, a, b, c) = x^p + b^2 - 4ac$ dla $(x, p, a, b, c) \in U$. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji f.

○ **2.20.** a) Obliczyć macierz Jacobiego i jakobian[2] przekształcenia

$$(r, \alpha) \mapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

b) Obliczyć macierz Jacobiego przekształcenia

$$(r, \alpha, \beta) \mapsto (r \cos \alpha \cos \beta, r \cos \alpha \sin \beta, r \sin \alpha).$$

W ramach autosprawdzenia sprawdzić, że kolumny macierzy Jacobiego są wektorami prostopadłymi. Następnie obliczyć jakobian (można do tego wykorzystać prostopadłość kolumn (jak zorientowana jest taka baza?)).

c) Zrozumieć interpretację geometryczną poprzedniego podpunktu: punkt $(x, y, z) = (r \cos \alpha \cos \beta, r \cos \alpha \sin \beta, r \sin \alpha)$ spełnia $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, tzn. leży na sferze o promieniu r. Trzecia współrzędna, $z = r \sin(\alpha)$, może się zmieniać od $-r$ do r, więc $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ jest szerokością geograficzną. Z kolei $\beta \in [-\pi, \pi]$ jest długością geograficzną. Prostopadłość kolumn macierzy Jacobiego jest związana z tym, że promień sfery jest do niej prostopadły, więc jest prostopadły do południków i równoleżników, które też są wzajemnie prostopadłe.

d) Ewentualnie obliczyć macierz Jacobiego przekształcenia

$$(r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

gdzie

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \ldots \cos \alpha_{k-2} \cos \alpha_{k-1}, \\
x_2 &= r \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \ldots \cos \alpha_{k-2} \sin \alpha_{k-1}, \\
x_3 &= r \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \ldots \sin \alpha_{k-2}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

[2] Przypomnienie: macierz Jacobiego to macierz pochodnych cząstkowych (w i-tej kolumnie są pochodne cząstkowe po i-tej zmiennej), jakobian to jej wyznacznik.

$$x_{k-1} = r\cos\alpha_1 \sin\alpha_2,$$
$$x_k = r\sin\alpha_1.$$

W ramach autosprawdzenia, sprawdzić, że kolumny macierzy Jacobiego są wektorami prostopadłymi. Następnie obliczyć jakobian.

2.21. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $(1,1)$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$. Ponadto $f(x,x^2) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Znaleźć $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$. Znaleźć również pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $(1,1)$ w kierunku wektora $(-1,1)$.

2.22. Dane są funkcje $F\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ oraz $G\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. Uzasadnić, że funkcja $(F,G)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{l+m}$ jest różniczkowalna w punkcie $p \in \mathbb{R}^k$ wtedy i tylko wtedy gdy, $F\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ oraz $G\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ są różniczkowalne w punkcie $p \in \mathbb{R}^k$. Jak różniczka funkcji (F,G) wyraża się w terminach różniczek F oraz G?

Uwaga. To prawie na pewno było w jakiejś postaci dowodzone na wykładzie, ale warto to jeszcze raz przemyśleć.

2.23. Zbadać, w których punktach płaszczyzny różniczkowalne są funkcje:

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+|x-y|},$$
$$g(x,y) = \ln(1+|xy|^p) \quad (p>0 \text{ jest parametrem}),$$
$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y}(e^{xy}-1) & \text{jeśli } y \neq 0, \\ x & \text{jeśli } y = 0. \end{cases}$$

Plan pracy. Jest jasne, że w niektórych punktach trzeba sprawdzać istnieje pochodnych cząstkowych i różniczkowalność z definicji. Punkt $(0,0)$ może wymagać dodatkowej czujności – rachunki mogą być nieco inne (niekoniecznie trudniejsze).

W ramach autosprawdzenia. W przypadku fukcji g parametr p wpływa na odpowiedź (przynajmniej w niektórych punktach).

2.24. Czy funkcja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^4} - \sqrt{x^2+y^6}$ jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$?

○ **2.25.** Podać przykłady pokazujące, że w poniższym ciągu warunków żaden warunek nie jest równoważny poprzedniemu.

(i) pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ istnieją w pewnym otoczeniu p i są ciągłe w p,
(ii) funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p,
(iii) dla każdego $v \in \mathbb{R}^k$ pochodna kierunkowa $f'_v(p)$ istnieje oraz $f'_v(p)$ zależy liniowo od v oraz funkcja f jest ciągła w punkcie p,
(iv) dla każdego $v \in \mathbb{R}^k$ pochodna kierunkowa $f'_v(p)$ istnieje oraz $f'_v(p)$ zależy liniowo od v,
(v) dla każdego $v \in \mathbb{R}^k$ pochodna kierunkowa $f'_v(p)$ istnieje,
(vi) pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ istnieją w punkcie p.

(Wszędzie zakładamy, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu $p \in \mathbb{R}^k$; wymiary przestrzeni można w każdym z przykładów wybrać dowolnie).

Wskazówka. Większość przykładów można pewnie odnaleźć w materiałach z zajęć (wykład, zadania z ćwiczeń, zadania z pracy domowej, inne zadania z tego pliku).

2.26 (déjà vu?)**.** Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) + y^2\sin(1/y) & \text{jeśli } xy \neq 0,\\ x^2\sin(1/x) & \text{jeśli } y = 0 \text{ oraz } x \neq 0,\\ y^2\sin(1/y) & \text{jeśli } x = 0 \text{ oraz } y \neq 0,\\ 0 & \text{jeśli } x = y = 0. \end{cases}$$

Uświadomić sobie, że funkcja f ma pochodne cząstkowe [wszędzie], ale nie są one ciągłe w punkcie $(0,0)$. Uzasadnić, że f jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

2.27. Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Sprawdzić, że pochodne cząstkowe funkcji f istnieją [w każdym punkcie płaszczyzny].

ą) Sprawdzić, że pochodne cząstkowe funkcji f są ograniczone na $\mathbb{R}^2$. Przypomnieć sobie, że z tego wynika, że funkcja f jest lipschitzowska.

b) Sprawdzić, że dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\|_2 = 1$, istnieje pochodna kierunkowa $f'_v(0,0)$ oraz $|f'_v(0,0)| \leqslant 1$.

c) Załóżmy, że $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ jest funkcją różniczkowalną, taką że $\gamma(0) = (0,0)$ oraz $D\gamma(0) \neq (0\ 0)$.[3] Sprawdzić [z definicji], że funkcja $t \mapsto f(\gamma(t))$ jest różniczkowalna w $t = 0$.

d) Uzasadnić, że funkcja f *nie* jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

2.28. Wyznaczyć wszystkie punkty, w których funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x_1,\ldots,x_k) = |x_1 \ldots x_k|$ nie jest różniczkowalna.

○ **2.29.** Rozważamy przestrzeń $M_{k\times k}(\mathbb{R})$ (macierze wymiaru $k \times k$ o wyrazach rzeczywistych), którą utożsamiamy z $\mathbb{R}^{k^2}$; $I \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ to macierz jednostkowa.

a) Wykazać, że dla $A \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$,

$$D\det(I)A = \operatorname{tr}(A)$$

(funkcja $\det\colon \mathbb{R}^{k^2} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie I, a jej różniczka w tym punkcie (tj. $D\det(I)$) jest przekształceniem liniowym z $\mathbb{R}^{k^2}$ w $\mathbb{R}$ zadanym przez $A \mapsto \operatorname{tr}(A)$).

Koło ratunkowe. Może być łatwiej zacząć od przypadku $k = 2$ lub 3.

b) Wykazać, że jeśli macierz $B \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ jest odwracalna, to

$$D\det(B)A = \det(B)\operatorname{tr}(B^{-1}A)$$

dla $A \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$.

[3] Krzywa γ jest postaci $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ dla pewnych funkcji $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Różniczkowalność γ [jako przekształcenia z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^2$] oznacza dokładnie, że funkcje u, v są różniczkowalne. Warunek niezerowania się różniczki γ w punkcie $t = 0$ oznacza dokładnie, że $(u'(0), v'(0)) \neq (0,0)$.

2.30. Rozważamy przestrzeń $M_{k\times k}(\mathbb{R})$ (macierze wymiaru $k \times k$ o wyrazach rzeczywistych); $I \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ to macierz jednostkowa. Niech

$$U = \{A \in M_{k\times k}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\},$$

i niech $\Phi\colon U \to U$ będzie dane wzorem $\Phi(A) = A^{-1}$ dla $A \in U$. Poniżej $\|\cdot\|_{2\to 2}$ to norma operatorowa (patrz zadanie 1.16), ale proszę pamiętać, że przestrzeń $M_{k\times k}(\mathbb{R})$ można utożsamić z $\mathbb{R}^{k^2}$, więc wszystkie normy są równoważne.

a) Wykazać, że jeśli macierz $B \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ spełnia $\|B\|_{2\to 2} < 1$, to macierz $I - B$ jest odwracalna oraz

$$(I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n.$$

Uświadomić sobie, że to w szczególności oznacza, że I należy do wnętrza zbioru U.

b) Sprawdzić, że przekształcenie Φ jest różniczkowalne w I oraz

$$D\Phi(I)B = -B$$

(różniczka Φ w punkcie I to przekształcenie liniowe z $M_{k\times k}(\mathbb{R})$ w $M_{k\times k}(\mathbb{R})$ zadane przez $B \mapsto -B$).

b) Uświadomić sobie, że U jest otwartym podzbiorem $M_{k\times k}(\mathbb{R})$. Sprawdzić, że przekształcenie Φ jest różniczkowalne oraz dla $A \in U$ zachodzi

$$D\Phi(A)B = -A^{-1}BA.$$

○ **2.31** (por. zadanie 2.13)**.** a) Niech $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sprawdzić, że funkcja g ma dokładnie dwa punkty krytyczne i że w jednym z nich jest minimum lokalne, a drugi jest punktem siodłowym. Sprawdzić też, że funkcja g nie jest ograniczona ani z góry, a ani z dołu.

b) Niech $f(x, y) \coloneqq g(x, e^y) = x^3 + e^{3y} - 3xe^y$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sprawdzić, że funkcja f ma dokładnie jeden punkt krytyczny i uzasadnić, że ma w nim minimum lokalne. Sprawdzić też, że funkcja f nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu.

Komentarz. Dobrze by było spróbować wyobrazić sobie, co się stało i jak wygląda wykres funkcji f. Funkcja f ma jedno minimum lokalne i nie jest ograniczona z góry – to nie jest dziwne. Dziwniejsze jest to, że z tego minimum lokalnego funkcja f jest w stanie wykręcić tak, by zejść z wartościami do $-\infty$, i odbywa się bez przechodzenia przez punkty krytyczne (siodła lub maksima lokalne). Punkt siodłowy funkcji g został wysłany do „[minus?] nieskończoności”, na „brzeg” płaszczyzny ($\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$). Siodła już nie mamy, ale w pewnym sensie można do niego podejść i to wystarcza. [Lepsze intuicje chętnie przyjmę].

2.32 (por. zadanie 2.12)**.** Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \big(y - \exp(-1/x^2)\big)\big(y - 3\exp(-1/x^2)\big) & \text{dla } x \neq 0,\ y \in \mathbb{R}, \\ y^2 & \text{dla } x = 0,\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sprawdzić, że funkcja f ma po obcięciu do dowolnej krzywej postaci $y = cx^{m/n}$ ($c \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$ – względnie pierwsze, $x \geqslant 0$ w przypadku gdy n jest parzyste) minimum lokalne w punkcie $(0, 0)$, ale punkt $(0, 0)$ nie jest minimum lokalnym funkcji f.

2.33. Wykazać, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x,y) = (1+e^y)\cos(x) - ye^y$$

ma nieskończenie wiele maksimów, ale nie ma żadnego minimum lokalnego.

2.34. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$, $f(x,y) = \frac{x-2y}{8+x^2+4y^2}$ dla $(x,y) \in A$. Wyznaczyć $\sup_A f$, $\inf_A f$.

2.35. Niech $A = [0,\infty)^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \frac{xe^{-y}\sqrt{y}}{x^2+y}$ dla $(x,y) \in A$. Wyznaczyć $\sup_A f$, $\inf_A f$.

2.36. Znaleźć kresu funkcji $f(x,y,z) = 6xy - 3xz - 2yz$ na zbiorze $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

2.37. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x \geqslant 4y \geqslant 0\}$, $f(x,y) = \frac{x^2ye^{-xy}}{x+1}$ dla $(x,y) \in A$. Wyznaczyć $\sup_A f$, $\inf_A f$.

2.38. Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 4 + x^2 + y^2\}$. Znaleźć w zbiorze A punkt, którego odległość od punktu $(2,4,0)$ jest najmniejsza.

2.39. Spośród basenów prostopadłościennych o ustalonej objętości $V > 0$ znaleźć basen o najmniejszym polu powierzchni (podstawa plus cztery ściany boczne).

2.40 (fajne)**.** Ustalmy dwa punkty $a, b \in \mathbb{R}^3$, $a \neq b$, i niech

$$f(x) = \frac{1}{\|x-a\|_2} + \frac{1}{\|x-b\|_2} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{a,b\}.$$

Znaleźć punkty krytyczne funkcji f.

2.41. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełnia warunek:

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \geqslant 0 \qquad \text{dla każdego } x = (x_1, \ldots x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Wykazać, że funkcja f jest ograniczona z dołu.

2.42 (kolokwium 2010)**.** Zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ jest zwarty i wypukły. Funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$ jest ciągła na A i różniczkowalna w $\operatorname{int} A$. Ponadto istnieją liczby $a_1, \ldots, a_k$, nie wszystkie równe 0, takie że

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \leqslant 0 \qquad \text{dla każdego } x = (x_1, \ldots x_k) \in \operatorname{int} A.$$

Wykazać, że funkcja f osiąga swoją wartość największą i najmniejszą w pewnych punktach brzegu zbioru A.

2.43. Niech $p > 0$. Mówimy, że funkcja funkcja $f\colon (0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ jest jednorodna stopnia p, jeśli dla każdego $x \in (0,\infty)$ i każdego $\lambda > 0$ zachodzi $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$.

a) Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon (0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ jest jednorodna stopnia p i różniczkowalna, to spełnia warunek:

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = pf(x) \qquad \text{dla każdego } x = (x_1, \ldots x_k) \in (0,\infty)^k. \tag{2.1}$$

b) Odwrotnie, pokazać że jeśli różniczkowalna funkcja $f\colon (0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ spełnia warunek (2.1) [dla pewnego $p > 0$], to jest jednorodna stopnia p.

Uwaga. W podpunkcie b) zapewne pojawi się potrzeba skorzystania z jakiejś wiedzy z RRZ – można na kredyt przyjąć, że rozwiązanie, które Państwo zgadną, jest jedyne (z dokładnością do mnożenia przez stałą) i że nie ma żadnych problemów.

2.44. Dana jest funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wiadomo, że:
- gradient funkcji f w punkcie $(0,0,0)$ to wektor $(1,1,1)$,
- gradient funkcji f w punkcie $(1,1,1)$ to wektor $(1,2,3)$,
- gradient funkcji f w punkcie $(1,2,3)$ to wektor $(0,0,0)$,
- gradient funkcji f w punkcie $(e+1, e+1, e+1)$ to wektor $(-1,-1,-1)$.

Funkcja $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$g(x,y,z) = f(e^x + y, e^z + x, e^y + z).$$

Znaleźć gradient funkcji g w punkcie $(0,0,0)$ oraz pochodną kierunkową funkcji g w punkcie $(0,0,0)$ względem wektora $(1,1,1)$.

◦ **2.45.** Funkcja $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest zadana wzorem

$$F(x,y) = (e^x + e^{2y} + x^3y^4e^{xy}, \sin(3x) + 4y + x^5 + \cos^6(y)).$$

a) Uzasadnić, że funkcja F jest różniczkowalna.

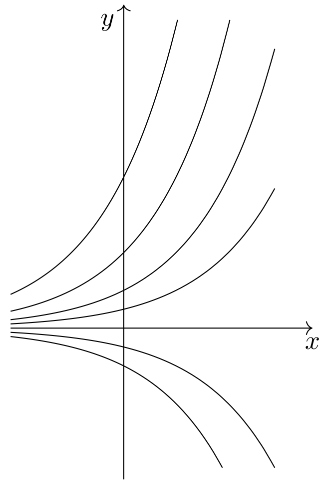
b) Wiadomo, że istnieją zbiory otwarte $U, V \subset \mathbb{R}^2$, takie że $(0,0) \in U$, $(2,1) \in V$, funkcja F jest różnowartościowa na U, $F(U) = V$, zaś funkcja $G := (F_{|U})^{-1}\colon V \to U$ jest różniczkowalna. Wyznaczyć różniczkę funkcji G w punkcie $(2,1)$.

Komentarz. Żeby uzasadnić część „Wiadomo ...” potrzeba twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, którego jeszcze nie znamy, ale jeśli założymy istnienie i różniczkowalność G, to do znalezienia $DG(2,1)$ wystarczy nam twierdzenie o różniczce funkcji odwrotnej lub o różniczce złożenia, z którego wynika wzór na różniczkę funkcji odwrotnej (nawet jeśli funkcja G nie wypisuje się jawnym wzorem).

◦ **2.46** (c.d. zadania 2.16)**.** b) Funkcja $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, a jej pochodne cząstkowe spełniają zależności

$$y\frac{\partial g}{\partial x} = x\frac{\partial g}{\partial y}, \qquad z\frac{\partial g}{\partial y} = y\frac{\partial g}{\partial z}, \qquad x\frac{\partial g}{\partial z} = z\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Udowodnić, że $g(x,y) = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$ dla pewnej funkcji $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ (ciągłej, różniczkowalnej na $(0,\infty)$).



Rysunek 2.1.: Charakterystyki z zadania 2.48

c) Jak zmieni się teza, jeśli założymy, że

$$2y\frac{\partial g}{\partial x} = x\frac{\partial g}{\partial y}, \qquad 3z\frac{\partial g}{\partial y} = 2y\frac{\partial g}{\partial z}, \qquad x\frac{\partial g}{\partial z} = 3z\frac{\partial g}{\partial x} \ ?$$

d) Jak uogólnić treść z podpunktów a), b) na przypadek $\mathbb{R}^k$?

2.47. Funkcja $g\colon \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełnia równanie

$$xg'_x + 2yg'_y = 0.$$

Udowodnić, że $g(x,y) = \varphi(y^2/x)$ dla pewnej różniczkowalnej funkcji $\varphi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

2.48 (metoda charakterystyk)**.** Znaleźć różniczkowalną funkcję $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u(0,y) = \ln(1+y^2).$$

W tym celu postąpić następująco. Dla każdego punktu $(0,c)$ znaleźć tzw. charakterystykę, tzn. – w naszym przypadku – krzywą postaci $x \mapsto (x, \psi(x))$, która spełnia $\psi'(x) = \psi(x)$ i przechodzi przez punkt $(0,c)$. Sprawdzić, że funkcja $x \mapsto u(x,\psi(x))$ jest stała. Następnie dla każdego punktu (x,y) dobrać takie c, by charakterystyka wypuszczona z punktu $(0,c)$ przechodziła przez (x,y) i wyznaczyć wzór jawny na u.

Komentarz. Podobne rozumowanie można też stosować w przypadku bardziej skomplikowanych równań różniczkowych [cząstkowych] (będzie na RRCz) .

○ **2.49** (kształcące)**.** Funkcje $f_{i,j}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i,j \in \{1,\ldots,k\}$, sa różniczkowalne. Kładziemy

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} f_{1,1}(x) & \ldots & f_{1,k}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k,1}(x) & \ldots & f_{k,k}(x) \end{pmatrix} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Zrozumieć, że $\frac{d}{dx}\det(\varphi(x))$ jest równe sumie k wyznaczników: i-ty z nich powstaje przez zastąpienie i-tego wiersza $\varphi(x)$ przez $(f'_{i,1}(x),\ldots,f'_{i,k}(x))$.

Plan pracy. Przypomnieć sobie, że wyznacznik jest wieloliniową funkcją wierszy macierzy. Zastosować twierdzenia o różniczce złożenia i pochodnej przekształcenia wieloliniowego.

2.50. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest zadana wzorem

$$f(x_1,\ldots,x_k) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \ldots & x_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

a) Uzasadnić możliwie krótko (najlepiej jednym słowem – jakim?), że funkcja f jest różniczkowalna.

b) Niech $v = (1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^k$. Wykazać, że $f'_v(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$.

2.51. Podać przykład funkcji różniczkowalnej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ i punktów $x, y \in \mathbb{R}$, dla których w twierdzeniu Lagrange'a o wartości średniej mamy ostrą nierówność.

A. Teoria miary

Komentarz. Wchodzimy w XX wiek. Na wykładzie wystąpią (m.in., w kolejności alfabetycznej): Émile Borel (1871–1956), Constantin Carathéodory (1873–1950), Pierre Fatou (1878–1929), Maurice Fréchet (1878–1973), Guido Fubini (1879–1943), Henri Lebesgue (1875–1941), Nikołaj Łuzin (1883–1950), Giuseppe Vitali (1875–1932).[1]

Materiał do omówienia na zajęciach [3+ ćw. (??)]

Teoria. Zbiór Vitaliego (!).

Teoria. Definicja σ-ciała (zbiór pusty, dopełnienia, przeliczalne sumy). Definicja σ-ciała generowanego przez rodzinę zbiorów.

• **A.1.** a) Znaleźć $\sigma\big(\{1,2,3,4\},\{3,4,5\}\big)$ (w przestrzeni $\{1,2,3,4,5\}$).
b) Uzasadnić, że jeśli σ-ciało jest skończone, to liczba jego elementów wynosi 2^n dla pewngo $n \in \mathbb{N}$.
c) Wykazać, że nie istnieje σ-ciało nieskończone przeliczalne.

• **A.2.** Poniżej X, Y to dowolne zbiory, $\mathcal{F}$ to σ-ciało w X, $f\colon X \to Y$ to pewne przekształcenie.
a) Czy $\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ musi być σ-ciałem [w Y]?
b) Załóżmy, że f jest „na". Czy $\{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$ musi być σ-ciałem [w Y]?
c+d) Patrz zadanie A.14.

Teoria. Definicja σ-ciała zbiorów borelowskich (siłą rzeczy w przestrzeni topologicznej). Zbiory typu G_δ, zbiory typu F_σ.[2]

• **A.3.** Dane są funkcje ciągłe $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Niech

$$\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\},\\
B &= \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\},\\
C &= \{x \in \mathbb{R} : \text{ ciąg } (f_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ jest zbieżny i granica jest liczbą wymierną}\},\\
D &= \{x \in \mathbb{R} : \text{ ciąg } (f_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ jest zbieżny i granica jest liczbą niewymierną}\},
\end{aligned}$$

[1] Dla porównania (wybór subiektywny, kolejność z grubsza chronologiczna): Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Isaac Newton (1642–1726/27), Brook Taylor (1685–1731), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), Karl Weierstrass (1815–1897), Bernhard Riemann (1826–1863), Jean-Gaston Darboux (1842–1917).

[2] Notacja pochodzi od Hausdorffa: G od niem. *Gebiet* 'obszar', δ od D jak *Durchschnitt* 'przecięcie'; F od fr. *fermé* 'zbiór domknięty', σ od S jak *somme* 'suma'.

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \text{ ciąg } (f_n(x))_{n \geqslant 1} \text{ jest zbieżny (do granicy właściwej)}\}.$$

Rozstrzygnąć, które z tych zbiorów są borelowskie.

○ **A.4.** a) Uświadomić sobie, że $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem typu F_σ, zaś $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem typu G_δ.

b) Wykazać, że $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ jest nie jest zbiorem typu G_δ, zaś $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nie jest zbiorem typu F_σ. *Wskazówka.* Twierdzenie Baire'a z wykładu topologii.

c) Podać przykład zbioru borelowskiego, który nie jest ani typu G_δ, ani typu F_σ.

***

Teoria. Miara zewnętrzna (określona na *wszystkich* podzbiorach, zero na $\emptyset$, monotoniczna, przeliczalnie podaddytywna), miara (określona na *pewnym* σ-ciele, zero na $\emptyset$, przeliczalnie addytywna [na zbiorach rozłącznych]).

Teoria (ogólna). Warunek Carathéodory'ego.[3] Dowodzi się, że:

- zbiór $\mathcal{F}(\mu^*)$ złożony ze zbiorów spełniających warunek Carathéodory'ego jest σ-ciałem (!),
- po obcięciu μ^* do $\mathcal{F}(\mu^*)$ dostaniemy miarę (!),
- zbiory o mierze zewnętrznej 0 należą do $\mathcal{F}(\mu^*)$ (!),
- jeśli nasza miara zewnętrzna jest metryczna,[4] to zbiory borelowskie należą do $\mathcal{F}(\mu^*)$ (!).

Teoria (konkretna). Miara zewnętrzna Lebesgue'a w $\mathbb{R}^k$ (ozn. λ_k^*; infimum sum objętości przedziałów [k-wymiarowych] stanowiących pokrycie zbioru). Sprawdza się, że jest to miara zewnętrzna metryczna na $\mathbb{R}^k$, więc z ogólnej teorii wynika istnienie σ-ciała (zawierającego zbiory borelowskie i zbiory miary [zewnętrznej] zero), po obcięciu do którego dostajemy miarę (ozn. λ_k).

Uwaga. Popularne oznaczenia na miarę Lebesgue'a to m.in.: $\lambda_k(\cdot)$, $\ell_k(\cdot)$, $\mathcal{L}_k(\cdot)$, $\mathrm{vol}_k(\cdot)$ (lub po prostu $\mathrm{vol}(\cdot)$ z k w domyśle), $|\cdot|$ (nawet gdy jednocześnie oznacza też normę euklidesową).

Umowa. Poniżej w przypadku podzbiorów $\mathbb{R}^k$ domyślną miarę jest [odpowiedniowymiarowa] miara Lebesgue'a (i domyślnym σ-ciałem jest σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a).

• **A.5** (por. zad. A.21)**.** a) Zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ jest mierzalny, P_1 jest rzutem ortogonalnym $\mathbb{R}^2$ na oś OX. Czy zbiór $P(A)$ [traktowany jako podzbiór $\mathbb{R}$] musi być mierzalny?

b) Zbiór $B \subset \mathbb{R}^2$ jest spójny. Czy musi być mierzalny?

• **A.6** (patrz też zadanie A.27)**.** Znaleźć miary zbiorów:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in [0,1] : \text{ w rozwinięciu dziesiętnym } x \text{ nie występuje cyfra } 3\}, \\ C &= \text{ standardowy [trójkowy] zbiór Cantora}, \\ E &= \{x \in [0,1] : \text{ w rozwinięciu dziesiętnym } x \text{ nie występuje blok } 5050\}. \end{aligned}$$

[3]Niech $\mu^* : 2^X \to [0, +\infty]$ będzie miarą zewnętrzną. Zbiór $A \subset X$ spełnia warunek Carathéodory'ego wtedy i tylko wtedy, gdy dla *każdego* zbioru $Z \subset X$ zachodzi $\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$.

[4]Tzn. jesteśmy w przestrzeni metrycznej oraz $\mathrm{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0 \implies \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Uwaga. Zbiór Cantora jest zwarty, brzegowy (ma puste wnętrze, tzn. nie zaweiera żadnego przedziału otwartego (szczególności jest też nigdziegęsty (jego domknięcie też ma puste wnętrze))) i ma moc $\mathfrak{c}$. W szczególności zawiera coś więcej, niż tylko przeliczalnie wiele końców odcinków otwartych wyrzucanych w kolejnych krokach konstrukcji. Każdy jego punkt jest jego punktem skupieniem. Patrz też zadanie A.30 o „tłustych" zbiorach Cantora.

• **A.7** (funkcja Cantora, diabelskie schody)**.** a) Skonstruować funkcję $f\colon [0,1] \to [0,1]$, która jest ciągła, niemalejąca, „na" i prawie wszędzie $f'(x) = 0$ (pochodna istnieje poza zbiorem miary zero i tam, gdzie istnieje, jest równa zero).

b) Znaleźć przykład zbioru mierzalnego $A \subset [0,1]$, takiego że $f(A)$ jest niemierzalny.

Teoria. Tw. charakteryzujące zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a.

Uwaga. Można udowodnić, że zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}^k$ jest $\mathfrak{c}$. Zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a jest $2^{\mathfrak{c}}$ (podzbiory zbioru Cantora mają miarę zero). Z drugiej strony, zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a to zasadniczo – z dokładnością do zbioru miary zero – zbiory typu F_σ (patrz charakteryzacja z wykładu).

• **A.8.** Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest lipschitzowska, zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest mierzalny [w sensie Lebesgue'a]. Wykazać, że zbiór $f(A)$ jest mierzalny [w sensie Lebesgue'a].

◦ **A.9.** Dany jest [mierzalny] zbiór $A \subset [0,1]$, taki że $\lambda_1(A) > 0$. Wykazać, że dla każdego $b \in [0, \lambda_1(A)]$ istnieje [mierzalny] zbiór $B \subset A$, taki że $\lambda_1(B) = b$.

Teoria. Liniowy obraz zbioru mierzalnego. Iloczyn kartezjański zbiorów mierzalnych.

***

Teoria. Definicja funkcji mierzalnej (mamy $(X, \mathcal{F})$ oraz $f\colon X \to [-\infty, +\infty]$, zbiory $\{x \in X : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty])$ mają być mierzalne (należeć do $\mathcal{F}$)). Własności (przeciwobrazy innych zbiorów; własności arytmetyczne, supremum/infimum przeliczalnej rodziny f. mierzalnych, granica punktowa f. mierzalnych).

Umowa. W przypadku funkcji na $\mathbb{R}^k$ domyślnie rozważamy σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a.

Komentarz. Pojęcie funkcji mierzalnej jest ściśle związane z pojęciem całki [Lebesgue'a], ale poniższe zadania tematycznie pasują do tego rozdziału (ze względu na wykorzystywane narzędzia).

• **A.10.** a) Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest mierzalna.

b) Podać przykład świadczący o tym, że jeśli funkcje $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa mierzalne ($i \in I$), to funkcja $\sup_{i\in I} f_i$ nie musi być funkcją mierzalną, jeśli zbiór indeksów I nie jest przeliczalny.

c) Podać przykład funkcji $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest mierzalna [jeśli w dziedzinie rozważamy σ-ciała zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a], ale nie jest jest mierzalna, jeśli w dziedzinie rozważamy σ-ciało zbiorów borelowskich.

• **A.11.** a) Dane są funkcje mierzalne $f, g\colon X \to [-\infty, +\infty]$ oraz zbiór [mierzalny] $A \in \mathcal{F}$. Sprawdzić, że funkcja $h\colon X \to [-\infty, +\infty]$ zdefiniowana wzorem

$$h(x) := f(x)\mathbf{1}_{\{x\in A\}} + g(x)\mathbf{1}_{\{x\in X\setminus A\}} = \begin{cases} f(x) & \text{jeśli } x \in A, \\ g(x) & \text{jeśli } x \in X \setminus A, \end{cases}$$

jest mierzalna.

b) Uświadomić sobie, że gdybyśmy mieli nieco dłuższą klamerkę (przeliczalnie wiele funkcji [mierzalnych], przeliczalnie wiele [mierzalnych] kawałków), to nic się nie zmienia.

c) Uświadomić sobie, że w szczególności jest sens mówić o mierzalności, jeśli funkcja jest określona „tylko” *prawie wszędzie*.

• **A.12.** a) Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Uzasadnić, że funkcja f' jest mierzalna.

b) Czy jeśli założymy tylko, że f jest różniczkowalna prawie wszędzie, to można coś powiedzieć o f'?

Teoria. Funkcje proste. Przybliżanie nieujemnych funkcji mierzalnych.

Teoria. Twierdzenia Łuzina (obcięcie ciągłe [na dużym zbiorze domkniętym]), Frécheta (granica punktowa funkcji ciągłych), Jegorowa (zbieżność jednostajna); miara regularna.

Zadania treningowe, uzupełniające, dodatkowe

A.13. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich takich zbiorów $A \subset X$, że co najmniej jeden ze zbiorów A, $X \setminus A$ jest [co najwyżej] przeliczalny. Sprawdzić, że $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem [w X].

◦ **A.14** (c.d. zadania A.2)**.** Poniżej X, Y to dowolne zbiory, $\mathcal{G}$ to σ-ciało w Y, $f\colon X \to Y$ to pewne przekształcenie.

c) Czy $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{G}\}$ musi być σ-ciałem [w X]?

d) Załóżmy, że f jest „na”. Czy $\{A \subset X : f(A) \in \mathcal{G}\}$ musi być σ-ciałem [w X]?

A.15 (FYI, będzie na RP, na razie nie jest kluczowe)**.** Rodzinę zbiorów $\mathcal{P}$ nazywamy π-układem, jeśli

$$A, B \in \mathcal{P} \implies A \cap B \in \mathcal{P}.$$

Rodzinę zbiorów $\mathcal{L}$ nazywamy λ-układem, jeśli spełnia następujące warunki: (i) $X \in \mathcal{L}$, (ii) jeśli $A, B \in \mathcal{L}$ oraz $B \subset A$, to $A \setminus B \in \mathcal{L}$, (iii) jeśli $A_n \in \mathcal{L}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, to $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}$

a) Uzasadnić, że rodzina zbiorów, która jest jednocześnie π- i λ-układem, jest σ-ciałem.

b) Podać przykład π-układu, który nie jest λ-układem, oraz λ-układu, który nie jest π-układem.

c) Wykazać, że jeśli λ-układ $\mathcal{L}$ zawiera π-układ $\mathcal{P}$, to $\mathcal{L}$ zawiera $\sigma(\mathcal{P})$.

A.16. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (dowolna). Wykazać, że zbiór

$$\{x \in \mathbb{R} : \text{ funkcja } f \text{ jest ciągła w } x\}$$

jest zbiorem borelowskim (a wręcz zbiorem typu G_δ).

A.17. Uświadomić sobie, że [w przestrzeni topologicznej X] zbiór $A \subset X$ jest zbiorem typu G_δ [względem X] wtedy i tylko wtedy, gdy $X \setminus A$ jest zbiorem typu F_σ [względem X].

○ **A.18** (pushforward; oczywiste, ale ważne)**.** Dana jest przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{F}, \mu)$ oraz pewne przekształcenie $f\colon X \to Y$. Niech

$$\mathcal{G} \coloneqq \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\},$$
$$\nu(B) \coloneqq \mu(f^{-1}(B)) \quad \text{dla } B \in \mathcal{G}.$$

Sprawdzić, że $\mathcal{G}$ jest σ-ciałem [w Y], zaś $\nu\colon \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ jest miarą.

A.19. Na przestrzeni $X = \{1, 2, 3\}$ definiujemy $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(X) = 2$, $\mu^*(A) = 1$ jeśli $A \subset X$, $A \neq \emptyset \neq X \setminus A$. Sprawdzić, że μ^* jest miarą zewnętrzną na X i że jedynymi zbiorami spełniającymi warunek Carathéodory'ego są $\emptyset$ oraz X.

○ **A.20.** *Komentarz/motywacja.* Załóżmy, że określiliśmy sobie jakąś miarę zewnętrzną μ^* (np. miarę zewnętrzną Lebesgue'a w $\mathbb{R}^k$) i zastanawiamy się, czy da się znaleźć jakieś nietrywialne σ-ciało, na którym ta miara zewnętrzna jest prawdziwą miarą (przeliczalnie addytywną, a nie tylko podaddytywną), ale konstrukcja przez warunek Carathéodory'ego wydaje nam się zbyt mistyczna i dziwaczna. Na pewno powinno być tak, że jeśli zbiór A jest mierzalny, to zbiór $X \setminus A$ też i ponadto

$$\mu^*(X) = \mu(X) \overset{\text{chcemy}}{=} \mu(A) + \mu(X \setminus A) = \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A).$$

Niniejsze zadanie pokazuje, że – przy pewnym drobnych założeniach technicznych (z którymi często nie ma problemów, por. zadanie A.35) – taki naturalny warunek implikuje już sformułowany na wykładzie warunek Carathéodory'ego.

○ *Właściwa treść zadania.* Załóżmy, że μ^* jest miarą zewnętrzną na X, taką że $\mu^*(X) < \infty$. Załóżmy ponadto, że dla każdego zbioru $Z \subset X$ istnieje zbiór $Z \subset B \subset X$, który jest mierzalny (tj. spełnia warunek Carathéodory'ego) i $\mu^*(Z) = \mu^*(B)$. Przypuśćmy, że $A \subset X$ jest zbiorem, takim że

$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A).$$

Wykazać, że zbiór A jest mierzalny.

Ogólny plan pracy i pierwszy krok. Oczywiście trzeba sprawdzić, że A spełnia warunek Carathéodory'ego. W tym celu bierzemy dowolny zbiór $Z \subset X$, można do niego dobrać mierzalny zbiór B jak wyżej. Wykazać najpierw, że

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Wskazówka do pierwszego kroku. Zbiór B spełnia warunek Carathéodory'ego – trzeba wypisać ten warunek dla zbiorów testowych A i $X \setminus A$ (żadnych innych [rozsądnych] kandaydatów na zbiory testowe nie mamy) i trochę pożonglować podaddytywnością i prawami de Morgana.

Drugi krok. Wywnioskować, że także

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

A.21 (o pewnym słynnym błędzie)**.** Niech $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie rzutem na pierwszą współrzędną: $P(x, y) = x$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Okazuje się, że jeśli zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ jest borelowski, to zbiór $P(A)$ *nie* musi być borelowski [w $\mathbb{R}$]. Przy odrobinie nieuwagi łatwo jednak uwierzyć w następujący [błędny!] szkic dowodu [nieprawdziwego (!) twierdzenia]: „Jeśli zbiór $U \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty, to zbiór $P(U)$ jest otwarty [w $\mathbb{R}$]. Ponieważ zbiory otwarte generują σ-ciało zbiorów borelowskich, to jeśli $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, to $P(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$".

Poniższe proste podpunkty mają pokazać, nad jakimi [m.in.] szczegółami zupełnie prześlizgnięto się w powyższym „dowodzie".

a) Uzasadnić, że jeśli zbiór $U \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty, to zbiór $P(U)$ jest otwarty [w $\mathbb{R}$].

b) Podać przykład zbioru domkniętego $F \subset \mathbb{R}^2$, takiego że zbiór $P(F)$ nie jest domknięty [w $\mathbb{R}$].

c) Podać przykład [dowolnych] zbiorów $A, B, C \subset \mathbb{R}^2$ takich, że $P(A \cap B) \neq P(A) \cap P(B)$ oraz $P(\mathbb{R}^2 \setminus C) \neq \mathbb{R} \setminus P(C)$.

d) Uświadomić sobie, że jeśli $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$, to $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

e) Podać przykład zstępującej przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ [w $\mathbb{R}^2$], takiej że $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} P(U_n)$. Uświadomić sobie w szczególności, że jest pewien kłopot z kontrolowaniem rzutów zbiorów typu G_δ.

f) Uzasadnić, że jeśli $F \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem domkniętym, to $P(F)$ jest zbiorem borelowskim [w $\mathbb{R}$]. Wywnioskować, że jeśli $F' \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem typu F_σ, to $P(F')$ jest zbiorem borelowskim [w $\mathbb{R}$].

Informacja (bez dowodu). Nawet rzut zbioru typu G_δ nie musi być zbiorem borelowskim. Korzystając z teorii zbiorów analitycznych Suslina można jednak wykazać, że obraz zbioru borelowskiego [przy rzucie ortogonalnym] jest zbiorem mierzalnym.

A.22. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ jest spójny (ale być może niemierzalny), funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Czy można coś powiedzieć o mierzalności [w sensie Lebesgue'a] zbioru $f(A)$?

A.23. Niech $B(0, 1)$ będzie kulą jednostkową w $\mathbb{R}^3$. Banach i Tarski wykazali, że istnieją parami rozłączne zbiory $A_1, \ldots, A_5 \subset B(0, 1)$ oraz izometrie $f_i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, takie że

$$B(0, 1) = f_1(A_1) \cup f_2(A_2) \cup f_3(A_3) = f_4(A_4) \cup f_5(A_5),$$

gdzie obie powyższe sumy są sumami zbiorów parami rozłącznych. Uzasadnić – elementarnie, bez odwoływania się do szczegółów konstrukcji – że co najmniej cztery ze zbiorów $A_1, \ldots, A_5$ muszą być niemierzalne.

A.24. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem [mierzalnym] o dodatniej mierze Lebesgue'a. Wykazać, że istnieją liczby $x, y \in A$ takie, że $x - y \in \mathbb{Q}$.

Wskazówka. Przypomnieć sobie przykład Vitaliego.

A.25. Czy liczby $1/5$, $1/4$, $1/\pi$ należą do [standardowego trójkowego] zbioru Cantora?

A.26. a) Niech C to [standardowy trójkowy] zbiór Cantora. Wykazać, że $C+C=[0,2]$ (tu $C+C=\{x+y : x\in C, y\in C\}$ to suma Minkowskiego zbiorów).

b) Czym jest $C-C=\{x-y : x\in C, y\in C\}$?

○ **A.27.** Znaleźć miary Lebesgue'a niżej opisanych zbiorów [w szczególności uzasadnić ich mierzalność].

a) Zbiór tych liczb z przedziału $[0,1]$, których rozwinięcie dziesiętne zawiera bloki cyfr 123, 456 oraz 789.

b) Zbiór tych liczb z przedziału $[0,1]$, w których rozwinięciu dziesiętnym cyfra 3 występuje nieskończenie wiele razy.

c) Zbiór tych liczb z przedziału $[0,1]$, w których rozwinięciu dziesiętnym występuje każdy z [przeliczalnie wielu] bloków

$$3, \quad 31, \quad 314, \quad 3141, \quad 31415, \quad 314159, \quad 3141592, \quad 31415926, \quad \ldots$$

d) Zbiór tych liczb z przedziału $[0,1]$, w których rozwinięciu dziesiętnym występuje każdy z [przeliczalnie wielu] bloków

$$11, \quad 101, \quad 1001, \quad 10001, \quad 100001, \quad 1000001, \quad 10000001, \quad \ldots$$

e) Zbiór tych liczb z przedziału $[0,1]$, w których rozwinięciu dziesiętnym każdy z [przeliczalnie wielu] bloków wymienionych w podpunkcie d) występuje nieskończenie wiele razy.

Wskazówka. Nie warto brnąć w straszne rachunki (a warto zerknąć na rozwiązania zadania A.6).

A.28. Poniżej rozważamy rozwinięcia czwórkowe $0,c_1c_2c_3\ldots$ (z cyframi $c_i\in\{0,1,2,3\}$).

Niech A będzie zbiorem tych liczb z przedziału $[0,1]$, których rozwinięcie czwórkowe $0,c_1c_2c_3\ldots$ spełnia warunek $c_nc_{n+1}=0$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$.

Niech B będzie zbiorem tych liczb z przedziału $[0,1]$, których rozwinięcie czwórkowe $0,c_1c_2c_3\ldots$ spełnia warunek $c_{2n-1}c_{2n+1}c_{2n+3}=0$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$.

Wykazać, że oba te zbiory są miary zero.

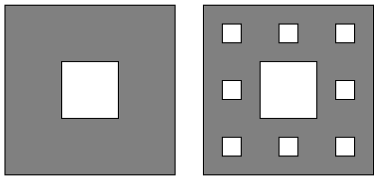
Wskazówka. Nie warto brnąć w straszne rachunki (a warto zerknąć na rozwiązania zadania A.6 (i A.27 (?))).

A.29 (dywan Sierpińskiego)**.** Kwadrat $[0,1]^2$ dzielimy na 9 przystających kwadratów i wyrzucamy środkowy. Następnie w każdym z pozostałych ośmiu mniejszych kwadratów powtarzamy tę procedurę (patrz Rysunek A.1) – i tak dalej. Doprecyzować opis konstrukcji i obliczyć dwuwymiarową miarę Lebesgue'a powstałej figury.

Pytanko dodatkowe z topologii. Czy otrzymany zbiór jest spójny? (A łukowo spójny?)

A.30 („tłusty" zbiór Cantora)**.** a) Uświadomić sobie, że modyfikując konstrukcję zbioru Cantora (zmieniając długości odcinków wyrzucanych w kolejnych krokach) można uzyskać zbiór o dodatniej mierze Lebesgue'a.

b) Uzasadnić, że otrzymany zbiór jest homeomorficzny ze standardowym zbiorem Cantora. W szczególności uświadomić sobie, że zbiór miary dodatniej nie musi zawierać żadnego odcinka otwartego.



Rysunek A.1.: Zadanie A.29 – dwa pierwsze kroki konstrukcji.

○ **A.31.** Podać przykład zstępującego ciągu zbiorów mierzalnych $\mathbb{R} \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$, takiego że

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1(A_n) \neq \lambda_1\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\big).$$

○ **A.32** (miłe)**.** a) Funkcja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest niemalejąca. Wykazać, że jej wykres jest podzbiorem miary [Lebesgue'a] zero w $\mathbb{R}^2$.

b) Czy teza pozostaje w mocy, jeśli dziedziną funkcji będzie inny przedział (niekoniecznie jest domknięty, niekoniecznie skończony)?

A.33. Znaleźć miary zbiorów:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Q}\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{ istnieją } a, b \in \mathbb{Q} \text{ takie, że } (x-a)^2 + (y-b)^2 \in \mathbb{Q}\},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy - x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

A.34. a) Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Wykazać, że jej wykres $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ jest podzbiorem miary zero płaszczyzny.

Sugestia. Nie machać rękami – dla każdego $\varepsilon > 0$ wskazać odpowiednie pokrycie wykresu prostokątami.

b) Przemyśleć, czy coś się zmienia, jeśli rozważamy przypadek wielowymiarowy ($(k+l)$-wymiarowa miara Lebesgue'a wykresu funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$).

c) Czy wykres funkcji $(0,\infty) \ni x \mapsto \sin(1/x)$ jest podzbiorem płaszczyzny miary zero?

d) Czy wykres funkcji $(0,\infty) \ni x \mapsto \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$ jest podzbiorem płaszczyzny miary zero?

A.35. Niech $A \subset \mathbb{R}^k$ będzie zbiorem, takim że $\lambda_k^*(A) < \infty$ (nie zakładamy, że A jest mierzalny w sensie Lebesgue'a). Wykazać, że istnieje zbiór borelowski $B \subset \mathbb{R}^k$, taki że $A \subset B$ oraz $\lambda_k^*(A) = \lambda_k(B)$.

A.36. a) Załóżmy, że $P \subset \mathbb{R}^k$ jest [k-wymiarowym] przedziałem, $A \subset P$, zbiór A jest domknięty oraz $\lambda_k(A) = \lambda_k(P)$. Wykazać, że $A = P$.

b) Załóżmy, że $Q \subset \mathbb{R}^k$ jest [k-wymiarowym] przedziałem otwartym, zbiór $B \subset Q$ jest otwarty oraz $\lambda_k(B) = \lambda_k(Q)$. Czy musi być $B = Q$?

A.37. Dany jest zbiór [mierzalny] $A \subset \mathbb{R}^k$, taki że $\lambda_k(A) > 0$. Wykazać, że dla każdego $c \in (0,1)$ istnieje pewien k-wymiarowy przedział P, taki że $\lambda_k(A \cap P) > c\lambda_k(P)$.

○ **A.38** (nieco trudniejsze, ale robialne)**.** Załóżmy, że zbiór [mierzalny] $A \subset \mathbb{R}$ ma miarę dodatnią. Wykazać, że istnieje $\delta > 0$, taka że $[-\delta, \delta] \subset A - A$.

Uwaga. To zadanie nie jest trywialne. W szczególności nie jest prawdą, że jeśli A jest miary dodatniej, to musi zawierać pewien przedział (przykład?). Proszę też zwrócić uwagę, że $A - A$ może zawierać pewien przedział, nawet jeśli A ma miarę zero (przykład?).

A.39. Załóżmy, że zbiór [mierzalny] $A \subset \mathbb{R}$ ma miarę dodatnią. Wykazać, że istnieje zbiór niemierzalny $E \subset A$.

Wskazówka (?). Być może warto najpierw zrobić zadanie A.38.

A.40. Rozstrzygnąć, czy brzeg obszaru (tj. zbioru otwartego i spójnego) w $\mathbb{R}^k$ musi mieć miarę Lebesgue'a zero.

○ **A.41** (szczególny przypadek tw. Sarda)**.** Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1. Niech $Z = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$. Wykazać, że $f(Z)$ jest zbiorem miary [Lebesgue'a] zero.

Wskazówka (?). Być może warto zerknąć na rozwiązanie zadania A.8.

A.42 ((bardzo?) trudne, por. zad. A.7)**.** Skonstruować funkcję $f\colon [0,1] \to [0,1]$, która jest ciągła, ***ściśle*** rosnąca, „na" i prawie wszędzie $f'(x) = 0$ (pochodna istnieje poza zbiorem miary zero i tam, gdzie istnieje, jest równa zero).

A.43 (łagodny wstęp do miary Hausdorffa)**.** Dla $\alpha \geqslant 0$, $\delta > 0$ i zbioru $A \subset \mathbb{R}$ kładziemy

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) \coloneqq \inf\Big\{\sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam}(E_i))^\alpha : \quad A \subset \bigcup_{i=1}^\infty E_i,\ \operatorname{diam}(E_i) \leqslant \delta\Big\},$$

gdzie $\operatorname{diam}(E) = \sup\{|x-y| : x, y \in E\}$ dla $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ (i $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$).

a) Uświadomić sobie, że jeśli $0 < \delta_2 < \delta_1$, to $\mathcal{H}^\alpha_{\delta_2}(A) \geqslant \mathcal{H}^\alpha_{\delta_1}(A)$, więc w szczególności można zdefiniować

$$\mathcal{H}^\alpha(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^\alpha_\delta(A).$$

b) Uświadomić sobie, że $\mathcal{H}^\alpha$ jest miarą zewnętrzną.

c) Niech $C \subset [0,1]$ będzie standardowym trójkowym zbiorem Cantora. Przyjrzeć się konstrukcji i uświadomić sobie, jakie [coraz drobniejsze] pokrycia jest naturalnie rozważać w definicji $\mathcal{H}^\alpha_\delta(C)$. Następnie zapostulować, jakie $\alpha \in (0,1)$ należałoby dobrać, żeby [przy $\delta \to 0^+$] otrzymać $0 < \mathcal{H}^\alpha(C) < \infty$.

e) Wykazać (lub co najmniej zaagitować), że

- jeśli $\mathcal{H}^\alpha(A) = 0$, to $\mathcal{H}^\beta(A) = 0$ dla $\beta > \alpha$,
- jeśli $\mathcal{H}^\alpha(A) > 0$, to $\mathcal{H}^\beta(A) = \infty$ dla $\beta < \alpha$.

(W szczególności, dla każdego dla każdego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ istnieje co najwyżej jedna liczba α taka, ze $\mathcal{H}^\alpha(A) \in (0, \infty)$). Liczbę

$$\dim_H(A) \coloneqq \inf\{\alpha \geqslant 0 : \mathcal{H}^\alpha(A) = 0\}$$

nazywamy wymiarem Hausdorffa zbioru A).

f) Uświadomić sobie, że miarę zewnętrzną $\mathcal{H}^\alpha$ (oraz wymiar Hausdorffa) można praktycznie tak samo zdefiniować w $\mathbb{R}^n$ (w definicji średnicy bierzmy $\|x-y\|_2$), a wręcz w dowolnej przestrzeni metrycznej (X,d) (w definicji średnicy bierzmy $d(x,y)$).

FYI. Ponadto $\mathcal{H}^\alpha$ jest miarą zewnętrzną *metryczną* (więc zbiory borelowskie spełniają warunek Carathéodory'ego, tj. są mierzalne).

Dla chętnych. Uściślić wszystko i uzupełnić brakujące szczegóły, w szczególności wykazać metryczność (w ogólnym przypadku).

A.44. Na wykładzie prawdopodobnie zostały co najmniej sformułowane jakieś fakty w stylu: jeśli funkcje $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ oraz $h\colon X\to(0,\infty)$ sa mierzalne, to także funkcje $|f|$, $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/h, h^f są mierzalne.

a) Udowodnić te fakty, które nie zostały udowodnione na wykładzie.

b) Uświadomić sobie, że jeśli dopuszczamy by f, g przyjmowały także wartości $\pm\infty$, to teza jest nadal prawdziwa (o ile nie ma problemów z określonością (tzn. wykluczamy np. sytuację $f+g$ dla $f\equiv+\infty$, $g\equiv-\infty$); uświadomić sobie w szczególności, że jeśli problemy z określonością są tylko na zbiorze miary zero, to nie ma żadnych problemów).

A.45. Funkcja $f\colon X\to\mathbb{R}$ jest mierzalna. Czy funkcja f^3 musi być mierzalna? A f^2?

A.46. Sprawdzić, że funkcja niemalejąca $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest mierzalna.

A.47. Funkcje $f_n\colon X\to\mathbb{R}$ są mierzalne ($n\in\mathbb{N}$). Uzasadnić, że zbiory

$$\begin{aligned}
A &= \{x\in X:\ \lim_{n\to\infty} f_n(x)=0\},\\
B &= \{x\in X:\ \lim_{n\to\infty} f_n(x)=+\infty\},\\
C &= \{x\in X:\ \text{ciąg } (f_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ jest zbieżny i granica jest liczbą wymierną}\},\\
D &= \{x\in X:\ \text{ciąg } (f_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ jest zbieżny i granica jest liczbą niewymierną}\},\\
E &= \{x\in X:\ \text{ciąg } (f_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ jest zbieżny (do granicy właściwej)}\}
\end{aligned}$$

są mierzalne.