Zadania przygotowawcze do kolokwium

1. *Prawa de Morgana.* Udowodnij dwa prawa de Morgana:

   a) *I prawo de Morgana.* Wykaż, że następujące zdanie jest tautologią
   $$\neg(p \land q) \Leftrightarrow (\neg p \lor \neg q).$$

   b) *II prawo de Morgana.* Wykaż, że następujące zdanie jest tautologią
   $$\neg(p \lor q) \Leftrightarrow (\neg p \land \neg q).$$

2. Udowodnij następujące prawa:

   a) *Prawo Dunsa Szkota.* Wykaż, że następujące zdanie jest tautologią
   $$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q).$$
   (*Prawo to pokazuje, że jeśli zdanie jest fałszywe, to wynika z niego dowolne inne zdanie, czy to prawdziwe, czy fałszywe. Innymi słowy z fałszu możemy wywnioskować wszystko.*)

   b) *Prawo przechodności implikacji.* Wykaż, że następujące zdanie jest tautologią
   $$\Big((p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r)\Big) \Rightarrow (p \Rightarrow r).$$

   c) *Prawo eliminacji implikacji.* Wykaż, że następujące zdanie jest tautologią
   $$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \lor q).$$

3. Sprawdź, czy następujące zdanie jest tautologią:

   a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (\neg p \lor q)$,
   b) $(\neg p \land q) \Rightarrow (q \lor p)$.

4. Korzystając z praw de Morgana napisz zaprzeczenia zdań (nie używając słowa "nie" na początku zdania):

   a) Ten samochód jest szybki i zielony.
   b) Pójdę dziś do kina lub teatru.

5. Napisz tabelę wartości logicznych dla zdania:
   $$\Big((p \Rightarrow q) \lor (r \Rightarrow q)\Big) \land (p \Rightarrow r).$$

6. Napisz tabelę wartości logicznych dla zdania:
   $$\bigg(\Big((p \Leftrightarrow q) \land (r \Leftrightarrow q)\Big) \lor (p \Leftrightarrow r)\bigg) \Rightarrow \Big((p \lor q) \lor r\Big).$$

7. Sprawdź, czy podane niżej zdania są tautologiami:

   a) $(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge q)$,

   b) $(q \vee \neg p) \wedge \Big((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)\Big)$,

   c) $(p \wedge \neg q) \Rightarrow q$.

8. Załóżmy, że zdania A i B są prawdziwe. Czy zdanie C jest prawdziwe?

   a)

      A. Większość ptaków lata.
      B. Pingwin jest ptakiem.
      C. Pingwin lata.

   b)

      A. Wszystkie psy mają ogon.
      B. Reksio jest psem.
      C. Reksio ma ogon.

   c)

      A. Wszystkie ptaki mają dziub.
      B. Maks ma dziub,
      C. Maks jest ptakiem.

   d)

      A. Wszystkie kobiety są ładne.
      B. Kierowca autobusu nie jest ładny.
      C. Kierowca autobusu nie jest kobietą.

9. Niech $A = \langle 0, 5\rangle$, $B = \langle 1, 6\rangle$. Zaznacz na osi liczbowej zbiory:

$$A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \cap B,\ A \cup B.$$

   Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory:

$$A \times B,\ B \times A,\ (A \times B) \cap (B \times A),\ (A \times B) \setminus \Big((A \cup B) \times A\Big).$$

10. Niech $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leqslant 2\}$, $B = \{(x, y) : (x + 2)^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory: A, B, $A \setminus B$, $A \cap B$.

11. Niech $A = \{(x, y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x \leqslant 6, y \leqslant \frac{1}{2}x\}$, $B = \langle -1, 4\rangle \times \langle -1, 2\rangle$, $C = \{(x, y) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1\}$. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory: $A \cap B$, $B \cup C$, $A \setminus C$, $(A \cap B) \cap C$.

12. Oblicz:

    a) $(1 + 3i)(4 - 2i)$,

    b) $\frac{2+i}{1+i}$,

c) $\frac{(2+3i)(3-i)}{(1-i)(3+2i)}$,

d) $(3+i)^2$,

e) $|i+2|+|3-i|$,

f) $|\cos 22^\circ + i\sin 22^\circ| + i^2$,

g) $|3i-4| + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$

13. Rozwiąż równania i zaznacz w układzie współrzędnych:

a) $z^2 + 3z - 10 = 0$,

b) $z^2 = -1 - z$,

c) $z^4 + 20z^2 + 20 = 7z^2 - 16$,

d) $z^8 + 16 = 17z^4$.

14. Zamień na postać trygonometryczną lub odwrotnie:

a) $1+i$,

b) $3+\sqrt{3}i$,

c) $\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ$,

d) $\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ$,

e) 3,

f) $\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

g) $7\cos(\frac{\pi}{3}) + 7i\sin(\frac{\pi}{3})$,

h) $\pi\cos(-\pi) + \pi i\sin(-\pi)$.

15. Niech $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4,6\}$. Relację $R \subset A \times B$ określamy następująco:

$$aRb \Leftrightarrow a+b > 6,\ a \in A,\ b \in B.$$

Wypisz pary należące do tej relacji.

16. Niech $A = \{10, 15, 20, 25, 6\frac{1}{2}, \frac{18}{4}\}$. Relację $R \subset A \times A$ określamy następująco:

$$xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N},\ x, y \in A.$$

Wypisz pary należące do tej relacji. Sprawdź, czy relacja jest zwrotna, symetryczna oraz przechodnia.

17. Niech $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie określona następująco:

$$aRb \Leftrightarrow a+b \text{ jest parzysta.},\ a, b \in \mathbb{N}.$$

Czy R jest relacją równoważności?

18. Udowodnij za pomocą indukcji, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$$

19. Udowodnij za pomocą indukcji, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$n^n \geqslant n!$$

20. Udowodnij za pomocą indukcji, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $10^n + 4^n - 2$ jest podzielne przez 3.

21. Napisz wzór funkcji odwrotnej do:

   a) $y = 10^{x^2} - 1$, $x \in \langle 0, \infty)$,
   b) $y = 3\sqrt{x-1} - 11$, $x \in \langle 1, \infty)$,
   c) $y = x\sqrt{x}$, $x \in \langle 0, \infty)$,
   d) $y = \frac{1}{x^2-1}$, $x \in \langle 1, \infty)$.

22. Niech $f : A \to B$ będzie określona wzorem $f(x) = 2^{|x|} - 1$. Określ, czy jest "na" oraz równowartościowa, gdy:

   a) $A = \langle 1, 5\rangle$ i $B = \langle 1, 31\rangle$,
   b) $A = (-3, -2)$ i $B = (3, 8)$,
   c) $A = \langle -1, 1)$ i $\langle 0, 1)$,
   d) $A = \{-3, -1, 2, 4\}$ i $B = \{1, 3, 7, 15\}$,
   e) $A = B = \mathbb{N} \cup \{0\}$,
   f) $A = B = \langle 0, \infty)$,
   g) $A = \{-4, -1, 0, 1, 3\}$ i $B = \{0, 1, 3, 7, 15\}$.

23. Napisz wzór funkcji $h(x) = f\Big(g(x)\Big)$, gdy

   a) $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \sqrt{x}$,
   b) $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = e^{\sin x}$,
   c) $f(x) = \ln x$ i $g(x) = \cos(3x^2)$,
   d) $f(x) = (\sin x)^2$ i $g(x) = 2^{x^2}$.

24. Na ile sposobów można połączyć w pary taneczne dziewczynę z chłopcem, jeśli mamy 5 dziewcząt i 5 chłopców?

25. Na ile sposobów możemy dobrać partnera do tańca dla 4 kobiet, jeśli możemy wybierać spośród 10 mężczyzn?

26. Ile jest różnych łańcuchów RNA długości 4? Ile jest różnych łańcuchów RNA długości 4, jeśli żadna zasada azotowa się nie powtarza?

27. Ile jest różnych łańcuchów RNA długości 4, jeśli guanina (G) występuje dokładnie dwa razy, a pozostałe co najwyżej raz?

28. Ile jest różnych łańcuchów RNA długości 4, jeśli jedna z zasad azotowych występuje dokładnie dwa razy, a pozostałe co najwyżej raz?

29. Narysuj w skali logarytmicznej (log-log) i półlogarytmicznej:

   a) $y = 3x^2$,

   b) $y = 2 \cdot 5^x$,

   c) $y = 2^x \cdot x^2$.

30. Oblicz:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4+7n^3-11n^2+5n-32}{3n^3-2n^4+75n^2+2015n-2016}$,

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot n^2+10n^2}{n\sqrt{n^3}+50}$,

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{13n^{13}+14n^{14}+15n^{15}}{2^n}$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - n$,

   e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot n$,

   f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n+2^n}{3^n+40n^{10}}$,

   g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$,

   h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$.

31. Oblicz:

   a) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-6x+9}{2x-6}$,

   b) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1}$,

   c) $\lim\limits_{x\to-5} \frac{x^2+12x+35}{10x+50}$,

   d) $\lim\limits_{x\to2} \frac{16x-32}{x^4-16}$,

   e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x^2+1}$,

   f) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}$,

   g) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x+7} - \sqrt{x^2-2x+4}$,

   h) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x-\sqrt{x+6}}{x-3}$.

32. Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja f jest ciągła?

   a) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 1 \\ ax^2, & -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ b+\ln(-x-1), & x < -2 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} a\cdot 2^x, & x < 0 \\ 7x+5, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ b+\sqrt{3x+10}, & x > 2 \end{cases}$