

NOTATKI DO WYKŁADU 2.12.2025

Twierdzenie 1 (Weierstrassa o produkcie). Dla dowolnego ciągu z_n liczb zespolonych bez punktów skupienia, istnieje funkcja całkowita $P(z)$, która ma zera wyłącznie w punktach z_n i nie ma innych zer.

Uwaga 1. Twierdzenie 1 podaje konkretny wzór na $P(z)$.

W pierwszej kolejności dowodu, kładziemy:

$$\begin{aligned} E_0(z) &= 1 - z \\ E_n(z) &= (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\right) \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Lemat 1. Dla każdego $n \geq 0$ zachodzi $|1 - E_n(z)| \leq |z|^{n+1}$ dla $|z| \leq 1$.

Dowód lematu. Dla $n = 0$ lemat mówi, że $|1 - (1 - z)| \leq |z|$, co wyczerpuje znamiona oczywistości. Przy $n > 0$, piszemy $\tilde{E}_n = \exp(z + \cdots + z^n/n)$, tak że $E_n = (1 - z)\tilde{E}_n$ i różniczkujemy

$$\begin{aligned} E'_n &= -\tilde{E}_n + (1 - z)\tilde{E}'_n = -\tilde{E}_n + (1 - z)\tilde{E}_n\left(z + \cdots + \frac{z^n}{n}\right)' = \\ &= \tilde{E}_n(-1 + (1 - z)(1 + z + \cdots + z^{n-1})) = -z^n \tilde{E}_n. \end{aligned}$$

Poczynimy kilka obserwacji:

- Funkcja $z^n \tilde{E}_n$ ma rozwinięcie w szereg w $z = 0$ wyłącznie z wyrazami nieujemnymi;
- Funkcja $z^n \tilde{E}_n$ ma zero rzędu n w $z = 0$;
- Funkcja $1 - E_n$ zeruje się w $z = 0$ i jej pochodna ma zero rzędu n , więc sama ma zero rzędu $n + 1$;
- Rozwinięcie Taylora funkcji $1 - E_n$ ma wyłącznie wyrazy nieujemne.

Z tych obserwacji wynika, że $\phi = \frac{1 - E_n}{z^{n+1}}$ ma wyłącznie wyrazy rzeczywiste nieujemne w rozwinięciu w szereg i jest holomorficzną w zerze. Czyli $\phi = \sum a_n z^n$. Ponadto $\phi(1) = 1$. Zatem gdy $|z| < 1$, $|\phi(z)| \leq \sum a_n |z|^n \leq \sum a_n = \phi(1) = 1$.

To dowodzi lematu. □

Uwaga 2. Funkcja $E_n(z)$ (a więc i $\phi(z)$) jest całkowita, więc promień zbieżności szeregu $\sum a_n z^n$ jest nieskończoność. W szczególności, $\sum a_n$ jest zbieżny.

Ogólna postać twierdzenia Weierstrassa brzmi.

Twierdzenie 2. Przypuśćmy, że z_n jest ciągiem punktów takim, że $z_n \neq 0$ i $|z_n| \rightarrow \infty$. Przypuśćmy, że p_n jest ciągiem liczb nieujemnych takim że

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{p_n} < \infty$$

dla wszystkich $r \in \mathbb{C}$. Wtedy wzór:

$$(2) \quad P(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right)$$

definiuje funkcję holomorficzną na $\mathbb{C}$ o zerach w z_n , która nie ma zer poza z_n .

Uwaga 3. Jeśli jakieś z_n się powtarzają, to P_1 ma zero równe krotności powtórzenia n .

Dowód Twierdzenia 2. Ustalmy r . Jeśli $|z| < r$, to dla wszystkich n takich, że $|z_n| > r$ zachodzi

$$\left| 1 - E_n \left(\frac{z}{z_n} \right) \right| \leq \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} \leq \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{p_n+1}.$$

Jako, że $|z_n| \rightarrow \infty$. Dla ustalonego r istnieje skończenie wiele takich n , że $|z_n| < r$. Te elementy nie wpływają na zbieżność szeregu

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - E_n \left(\frac{z}{z_n} \right) \right).$$

Czyli szereg (3) jest zbieżny.

Z twierdzenia z Analizy 1, zbieżność szeregu $\sum (1 + x_n)$ jest równoważna zbieżności iloczynu nieskończonego $\prod x_n$. To oznacza, że iloczyn (2) jest zbieżny dla $|z| < r$, i zbieżność ta jest jednostajna. Stąd granica jest holomorficzną (jako granica ciągu iloczynów częściowych).

Bezpośrednio z konstrukcji $P(z)$ wynika, że P zeruje się w z_n i nie zeruje się poza z_n . $\square$

Wyprowadzenie Twierdzenia 1 z Twierdzenia 2. Połóżmy $p_n = n - 1$. Ustalmy $r > 0$. Wtedy, dla wszystkich n poza być może skończenie wieloma zachodzi $|z_n| > 2r$. Czyli $|r/z_n| < \frac{1}{2}$. Czyli, dla wszystkich n poza skończenie wieloma zachodzi:

$$\left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{p_n+1} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Szereg 2^{1-n} jest zbieżny, a skończenie wiele wyrazów nie psuje zbieżności szeregu. $\square$

Przykład 1. Przypuśćmy, że z_n jest ciągiem $1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$. Połóżmy $p_n = 1$. Mamy $E_1(z/n)E_1(-z/n) = (1 - z^2/n^2)$, mamy:

$$P(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2} \right).$$

Znamy funkcję, która się zeruje w tych punktach. Jest to $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$. Za jakiś czas pokażemy, że jest to funkcja P z tego przykładu.

Bliźniaczym twierdzeniem do tw. Weierstrassa jest twierdzenie Mittag-Lefflera.

Twierdzenie 3 (Mittag-Leffler). Przypuśćmy, że $\Omega \subset \mathbb{C}$ otwarty, A jest podzbiorem Ω bez punktów skupienia. Załóżmy, że dla każdego $\alpha \in A$ jest zadana część główna G_α , czyli wielomian od $(z - \alpha)^{-1}$ bez wyrazu wolnego.

$$G_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{m_\alpha} c_{j,\alpha} (z - \alpha)^{-j}.$$

Wtedy, istnieje funkcja meromorficzna $Q: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, która jest holomorficzną poza A oraz dla każdego $\alpha \in A$, funkcja $Q - G_\alpha$ ma osobliwość pozorną w A .

Uwaga 4. Chciałoby się położyć Q jako $\sum G_\alpha$, ale ten szereg ma pełne prawo być rozbieżny.

Dowód tw. Mittag-Essena. Ustalmy zbiór S , który ma dokładnie jeden punkt wspólny z każdą składową spójną $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \Omega$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia Rungego, wybieramy rodzinę K_n zbiorów zwartych wypełniających Ω taką, że

- $K_n \subset \text{Int } K_{n+1}$;
- $\bigcup K_n = \Omega$;
- każda składowa spójna $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus K_n$ zawiera punkt z S .

Konstrukcja takich K_n była podana przy dowodzie twierdzenia Rungego. Kładziemy $A_1 = K_1$ i $A_n = K_n \setminus K_{n-1}$. Każdy ze zbiorów A_n jest skończony, bo przeciwnym razie miałby punkt skupienia w zbiorze zwartym K_n . Kładziemy

$$G_n(z) = \sum_{\alpha \in A_n} G_\alpha(z).$$

To jest funkcja z biegunami wyłącznie w $K_n \setminus K_{n-1}$, w szczególności jest holomorficzną w K_{n-1} . Czyli istnieje funkcja $R_n(z)$ z biegunami w S , taka, że dla każdego $z \in K_{n-1}$ zachodzi

$$(4) \quad |R_n(z) - G_n(z)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Określamy

$$Q(z) = G_1 + \sum_{j=2}^{\infty} (G_j(z) - R_j(z)).$$

Przyjmijmy $z \in K_n$ oraz $N > n$. Ogon szeregu dla Q zapisuje się jako $\sum_{j=N}^{\infty} (G_j(z) - R_j(z))$. Jeśli $N > n$, to zachodzi oszacowanie (4), więc

$$\left| \sum_{j=N}^{\infty} (G_j(z) - R_j(z)) \right| \leq \sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{1}{2^{N-2}}.$$

Czyli szereg $\sum_{j=n+1}^{\infty} (G_j(z) - R_j(z))$ jest zbieżny jednostajnie dla K_n i zadaje na nim funkcję holomorficzną. Początkowe elementy rozwinięcia Q zadają funkcję meromorficzną o biegunach w $A \cap K_n$. $\square$

Przykład 2. Szukamy funkcji meromorficznej o biegunach w $\mathbb{Z}$. Kładziemy $G_n(z) = \frac{1}{z-n}$ a $G_{-n}(z) = \frac{1}{z+n}$. Niestety, szereg G_n jest rozbieżny. Poprawiamy kładąc $H_n(z) = \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}$ oraz $H_0(z) = \frac{1}{z}$. Zachodzi

$$(5) \quad H_n(z) = \frac{z}{z(z-n)} = \frac{z}{n^2} \frac{1}{1 - z/n}.$$

Z (5) wnioskujemy, że gdy $|z| < |n|^{1/2}/2$, zachodzi $|H_n(z)| < \frac{2}{|n|^{3/2}}$. To oznacza, że szereg H_n jest zbieżny i zadaje funkcję meromorficzną na $\mathbb{C}$. Mamy też dla $n > 0$:

$$H_n(z) + H_{-n}(z) = \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Tak więc

$$Q(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Zadanie 1 (Zadanie do domu). Wykaż, że funkcja $Q(z)$ jest okresowa.

Zadanie 2 (Zadanie do domu). Wykaż, że funkcja $Q(z) - 1/z$ jest ograniczona na pasku $|\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$.

Przykład 3 (Kontynuacja Przykładu 2). Z zadań domowych wynika, że funkcja $\pi \operatorname{ctg}(\pi z) - Q(z)$ jest ograniczona w takim pasku jak wyżej. Jako, że ta różnica jest okresowa, to jest stała. Czyli $\pi \operatorname{ctg}(\pi z) - Q(z) = C$. Funkcja jest nieparzysta, więc $C = 0$. Dostajemy magiczny wzór:

$$(6) \quad \pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Możemy teraz wrócić do sinusa. Weźmy funkcję $P(z)$ z Przykładu 1. Funkcja $\frac{\sin \pi z}{z}$ i funkcja $P(z)$ mają zera w tych samych punktach. Ich iloraz jest funkcją holomorficzną nie zerową. Z tego wynika, że jest postaci $e^{F(z)}$ dla pewnego F , czyli

$$\sin \pi z = e^{F(z)} z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2} \right).$$

Pochodna logarytmiczna sinusa to cotangens, pochodna logarytmiczna iloczynu to szereg pochodnych, czyli

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = F'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - m^2}.$$

Z rozwinięcia dla cotangensa mamy $F'(z) = 0$. Czyli $F(z)$ jest stała. Zatem:

$$\frac{\sin \pi z}{z} = C \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right).$$

Biorąc granicę przy $z \rightarrow 0$ dostajemy, że $C = \pi$. Stąd otrzymujemy wzór:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right).$$