

Twierdzenie Riemanna o liczbach pierwszych.

Według książki Stein – Shakarchi

Głównym celem wykładu jest udowodnienie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. Niech $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie funkcją zliczającą liczby pierwsze. To znaczy,

$$\pi(x) = \#\{p: p \leq x \text{ } p \text{ pierwsza}\}.$$

Wtedy dla dowolnego $A < 1$ oraz $B > 1$ istnieje takie x_0 , że jeśli $x > x_0$, to:

$$A \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq B \frac{x}{\log x}.$$

Często twierdzenie formułuje się jako $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

Aby dowieść twierdzenia, wprowadzamy *funkcję Czebyszewa*:

$$\psi(x) = \sum_{p^n \leq x} \log p,$$

czyli sumujemy wielkość $\log p$ po tych liczbach, które są potęgami p mniejszymi od x . Na przykład:

$$\psi(10) = \log 2 + \log 3 + \log 2 + \log 5 + \log 7 + \log 2 + \log 3.$$

Można zapisać $\psi(x)$ za pomocą funkcji von Mangolta

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p: n = p^n \\ 0: \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Stwierdzenie 1. Funkcja $\pi(x)$ asymptotycznie zachowuje się jak $\frac{x}{\log x}$ jeśli $\psi(x) \sim x$.

Dowód. Piszemy najpierw

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \log x \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \log x.$$

W szczególności, jeśli $\psi(x) \geq Ax$ dla dostatecznie dużych x , to $\pi(x) \leq Ax / \log x$.

W drugą stronę, wybieramy $\alpha \in (0, 1)$. Wtedy

$$\psi(x) \geq \sum_{p \leq x} \log p \geq \sum_{x^\alpha \leq p \leq x} \log p \geq (\pi(x) - \pi(x^\alpha)) \log x^\alpha.$$

To zaś oznacza, że

$$\psi(x) + \alpha \pi(x^\alpha) \log x \geq \alpha \pi(x) \log x.$$

Wiemy, że $\pi(x) \leq x$ (bo π zlicza tylko część liczb). Możemy więc dobrać tak α, C , żeby $\pi(x^\alpha) \log x$ było mniejsze niż Cx dla dostatecznie dużych C . Jeśli $\psi(x) \leq Bx$, dostajemy że

$$\pi(x) \log x \leq \alpha^{-1}(B + C)x.$$

To dowodzi tezy. □

Uwaga 1. Tak naprawdę pokazujemy, że jeśli $\lim \frac{\psi(x)}{x} = 1$, to $\lim \pi(x) \frac{\log x}{x} = 1$.

Funkcja ψ nie jest idealna. Idealną funkcją będzie funkcja pierwotna ψ .

Stwierdzenie 2. Niech

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(y) dy.$$

Jeśli $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$, to $\psi(x) \sim x$.

Dowód. Przyjmijmy $0 < \alpha < 1 < \beta$. Jako, że ψ jest niemalejąca, zachodzi

$$\frac{1}{(1-\alpha)x} \int_{\alpha x}^x \psi(u) du \leq \psi(x) \leq \frac{1}{(\beta-1)x} \int_x^{\beta x} \psi(u) du.$$

Wartość w mianowniku to długość przedziału.

Z tego wynika, że

$$\psi(x) \leq \frac{1}{(\beta-1)x} (\psi_1(\beta x) - \psi_1(x)).$$

Piszemy to inaczej

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{1}{\beta-1} \left(\frac{\psi_1(\beta x)}{\beta^2 x^2} \beta^2 - \frac{\psi_1(x)}{x^2} \right).$$

Przykładamy $\limsup$ do tej nierówności. Jeśli $\lim \sum \frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, to otrzymujemy:

$$\limsup \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{1}{\beta-1} \left(\frac{1}{2} \beta^2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (\beta + 1).$$

Teraz β było dowolne większe od 1, stąd $\limsup \frac{\psi(x)}{x} \leq 1$. Dowód w drugą stronę jest analogiczny. $\square$

Do tej pory właściwie nie używaliśmy funkcji analitycznych. Teraz wykorzystamy.

Definicja 1. Funkcja $\zeta(s)$ jest zadana wzorem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Wzór definiujący funkcję ζ ma sens dla $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$. Poczyńmy obserwację.

Lemat 1. Jeśli $x \in \mathbb{R}_{>0}$ oraz $s \in \mathbb{C}$, to $|x^s| = x^{\operatorname{Re} s}$.

Rozwiązanie. Piszemy $x = e^\beta$ oraz $s = a + bi$. Wtedy $x^s = e^{a\beta + b\beta i}$, czyli $|x^s| = e^{a\beta} = x^a = x^{\operatorname{Re} s}$. $\square$

Z Lematu wnosimy, że szereg definiujący funkcję ζ jest zbieżny dla $\operatorname{Re} s > 1$ oraz jednostajnie zbieżny na $\operatorname{Re} s \geq 1 + \delta$ dla dowolnego $\delta > 0$. Stąd ζ jest funkcją holomorficzną.

Lemat 2. Dla dowolnego s takiego, że $\operatorname{Re} s > 1$ zachodzi

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

gdzie iloczyn bierzemy po wszystkich liczbach pierwszych.

Rozwiązanie. Kwestię zbieżności iloczynu zostawiamy jako ćwiczenie. Mamy

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

Stąd:

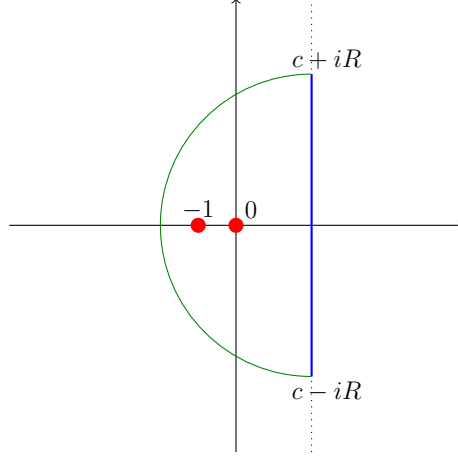
$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots$$

A zatem

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = (1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + \dots)(1 + 3^{-s} + \dots) \dots$$

Ustalmy n . Zapiszmy n jako $p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$. W iloczynie po lewej stronie, wyrażenie n^{-s} pojawi się dokładnie raz: wymnażając skończenie wiele wyrażeń różnych od 1 i k_1 -te wyrażenie przy p_1 itp. $\square$

Teraz przyda się nam jeszcze jeden lemat. Dalsze oszacowania będą podane, ale uodwodnione następnym razem.



RYSUNEK 1. Kontur w dowodzie (2).

Lemat 3. Zachodzi $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, o ile $\operatorname{Re} s > 1$.

Rozwiązanie. Mamy $\frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{d}{ds} \log \zeta(s)$. Piszemy

$$\log \zeta(s) = \log \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_p \log \frac{1}{1 - p^{-s}} = -\sum_p \log(1 - p^{-s}).$$

Teraz

$$-\log(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots,$$

czyli

$$(1) \quad \log(\zeta) = -\sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum \delta(n) n^{-s},$$

gdzie $\delta(n) = \frac{1}{m}$ jeśli $n = p^m$, i $\delta(n) = 0$ w przeciwnym przypadku. Różniczkujemy (1) wyraz po wyrazie. Przypuśćmy, że $n = p^m$

$$\frac{d}{ds} \delta(n) n^{-s} = -\log n \delta(n) n^{-s} = -m \log p \frac{1}{m} n^{-s} = -\Lambda(n) n^{-s}.$$

□

Stwierdzenie 3. Dla dowolnego $c > 1$ oraz $x > 0$ zachodzi:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds.$$

Dowód. Najpierw udowodnimy następujący wzór:

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)} ds = \begin{cases} 0: & a \in (0, 1] \\ 1 - \frac{1}{a}: & a > 1. \end{cases}$$

Aby dowieść tego wzoru wybieramy kontur Γ_R jak na rysunku. Składa się on z odcinka Γ_{1R} i półokręgu Γ_{2R} . Zapiszmy $x = e^t$ dla pewnego $t > 0$. Zapisujemy

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{ts}}{s(s+1)} ds.$$

Na całym Γ_R zachodzi $|e^{tz}| \leq |e^{tc}|$, więc mamy ograniczenie górne przez stałą. Z tego wynika, że całka po półokręgu Γ_{2R} zbiega przy $R \rightarrow \infty$ do zera. To oznacza, że całka

po Γ_R zbiega do szukanej całki. Całkę po Γ_R liczymy jednak przez residua. Funkcja ma bieguny w $s = 0$ i $s = 1$. Elementarny rachunek daje tezę.

Przypominamy sobie, że $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$. To oznacza, że

$$\int_0^x \psi(s) ds = \sum_{n < x} \Lambda(n)(x - n).$$

Dowód tej tożsamości pozostawiam jako ćwiczenie (można zapisać ψ jako sumę funkcji indyktorowych). Korzystając ze wzoru

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds = \\ x \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Lambda(n) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} ds = \\ x \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(1 - \frac{x}{n} \right) = \psi_1(x) \end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 4. Wzór $\zeta(s)$ się przedłuża do funkcji meromorficznej na $\mathbb{C}$ mającej biegun wyłącznie w $s = 1$.

(Z-1) Funkcja ζ nie zeruje się dla $\zeta(1 + it)$, gdy $t \in \mathbb{R}$;

(Z-2) Dla dowolnego $\delta > 0$, istnieje C_δ taka, że jeśli $\sigma \geq 1$, $|\tau| \geq 1$, to przy $s = \sigma + it$

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq C_\delta |\tau|^\delta.$$

(Z-3) Dla dowolnego $\delta > 0$, istnieje C_δ taka, że jeśli $\sigma \geq 1$, $|\tau| \geq 1$, to przy $s = \sigma + it$

$$|\zeta'(s)| \leq C_\delta' |\tau|^\delta.$$

W szczególności, ze Stwierdzenia 4 wyniknie sensowne oszacowanie na pochodną logarytmiczną ζ , z którego skorzystamy.

Stwierdzenie 5. Zachodzi $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$.

Dowód. Skorzystamy ze Stwierdzenia 4. Oznaczmy:

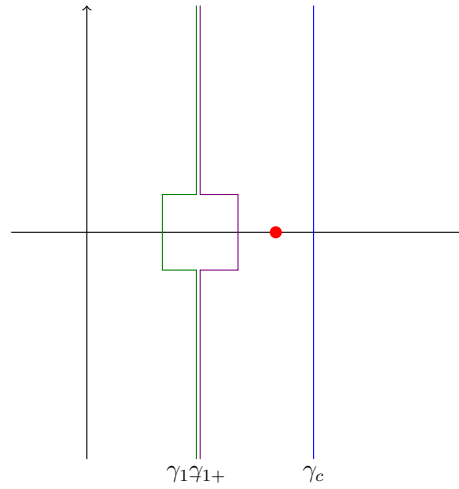
$$F(s) = \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right).$$

Ustalmy kontury całkowania jak na rysunku 2. Pozostawiamy jako ćwiczenie przekonanie się, że $\int_{\gamma_c} F(s) = \int_{\gamma_{1+}} F(s)$. Z drugiej strony, na mocy twierdzenia o residuach.

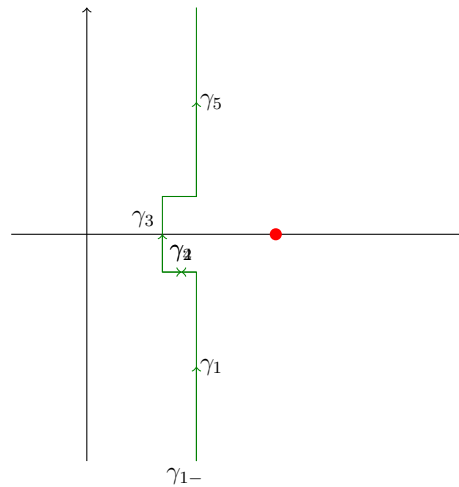
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1+}} F(s) ds = \text{res}_{s=1} F(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1-}} F(s) ds.$$

Residuum F jest łatwe do policzenia, gdyż $s \mapsto \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$ jest holomorficzna w 1, a pochodna logarytmiczna ζ ma residuum równe rzędowi bieguna (z zasady argumentu), czyli -1 . To oznacza, że

$$\text{res}_{s=1} F(s) = \frac{x^2}{2}.$$



RYSUNEK 2. Trzy kontury całkowania. γ_c to $\text{Re } z = c$. $\gamma_{1\pm}$ to kontury w większości zawarte w $\text{Re } z = 1$, ale obchodzące punkt 1 (biegun ζ) z lewej lub prawej strony.



RYSUNEK 3. Podział konturu γ_{1-} na kawałki.

Zatem, Stwierdzenie 5 będzie udowodnione, jeśli wyszacujemy, że

$$\int_{\gamma_{1-}} F(s) ds$$

jest małe w porównaniu z $\frac{x^2}{2}$.

Aby wyszacować całki, dzielimy kontur na kawałki.

Zielony kontur γ_{1-} z rysunku 2 na fragmenty. Dokładniej, ustalamy $T > 0$ oraz δ (dobre do T) tak aby w prostokącie:

$$\{z \in \mathbb{C}: \text{Re } z \in [1 - \delta, \delta], |\text{Im } z| \leq T\}$$

funkcja ζ nie miała zer. Odcinki $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ są fragmentami tego konturu. Kluczowe jest szacowanie całki po γ_1 i γ_5 . W tym celu, na mocy Stwierdzenia 4 możemy dobrać takie A , żeby dla $s \in \gamma_1 \cup \gamma_5$, $s = 1 + it$ zachodziło

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq A|t|^{1/2}.$$

A więc

$$\int_{\gamma_5} |F(s)| ds \leq C_1 x^2 \int_T^\infty \frac{|t|^{1/2}}{t^2} dt.$$

Jako, że całka jest zbieżna, możemy wziąć tak duże T , żeby

$$\int_{\gamma_5} |F(s)| ds \leq \varepsilon x^2.$$

Analogiczne szacowanie działa dla γ_1 . Dla γ_3 , szacujemy pochodną logarytmiczną ζ przez stałą. No i wtedy mamy

$$\int_{\gamma_3} |F(s)| ds \leq \int_{-T}^T C_2 x^{2-\delta} dt.$$

Biorąc teraz x dostatecznie duże (w stosunku do T), możemy przyjąć, że ta całka jest mniejsza niż εx^2 . Całkę po γ_2 i γ_4 również dość łatwo szacujemy. Kończąc dowód. $\square$

Pozostaje udowodnić Stwierdzenie 4.

Przedłużenie funkcji ζ . Zaczniemy od obserwacji, że istnieją funkcje całkowite $\delta_n(z)$, takie że $|\delta_n(z)| \leq |z|/n^{1+\operatorname{Re} z}$ oraz

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^z} - \int_1^N \frac{dx}{x^z} = \sum_{n=1}^{N-1} \delta_n(z).$$

Oczywiste jest, że aby (3) mogło zajść, musi być

$$\delta_n(z) = \frac{1}{n^z} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x^z} dx,$$

czyli

$$\delta_n(z) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right) dx.$$

Aby wyszacować δ_n , patrzymy, że z twierdzenia o wartości średniej, $f(n) - f(x) = (n-x)f'(\xi)$, wiemy, że

$$\left| \int_a^{a+1} (f(a) - f(x)) dx \right| \leq \sup_{y \in [a, a+1]} |f'(y)|.$$

Stosując do δ_n otrzymujemy

$$|\delta_n(z)| \leq \frac{|z|}{n^{|z|+1}}.$$

Lemat 4. Funkcja ζ przedłuża się na $\operatorname{Re} z > 0$ z biegunem prostym w $z = 1$. Funkcja $z \mapsto \zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ jest holomorficzną w całym $\operatorname{Re} z > 0$.

Rozwiązanie. Szereg $\sum \delta_n(z)$ jest zbieżny jednostajnie dla $\operatorname{Re} z > \varepsilon$ dla dowolnego ε . Czyli zadaje funkcję holomorficzną. Oznaczamy ją H . Co więcej funkcja

$$z \mapsto \int_1^\infty \frac{1}{x^z}$$

jest równa $\frac{1}{z-1}$ dla $\operatorname{Re} z > 1$. Czyli wyrażenie

$$\frac{1}{z-1} + H(z)$$

zadaje funkcję holomorficzną na $\operatorname{Re} z > 0$, która się zgadza z $\zeta(z)$ dla $\operatorname{Re} z > 1$. $\square$

Pełne przedłużenie $\zeta(s)$ na $\operatorname{Re} z < 0$ zazwyczaj konstruuje się w bardziej zaawansowany sposób. Iterowanie wzoru na całkę prowadzi do lepszego przedłużenia. Na przykład.

Zadanie 1. Niech $f: [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^3 , oraz x, y są całkowite. Wykaż, że

$$\sum_{n=x}^y f(n) = \int_x^y f(t) dt + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{12}(f'(x) - f'(y)) + O\left(\int_x^y f'''(t) dt\right).$$

Zadanie 2. Wykaż, że dla dowolnego z takiego, że $\operatorname{Re} z > -2$, $z \neq 1$ istnieje dokładnie jedna liczba $\zeta(z)$ taka, że

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^z} = \zeta(z) + \frac{N^{1-z}}{1-z} + \frac{1}{2}N^{-z} - \frac{z}{12}N^{-z-1} + O\left(\frac{|z(z+1)(z+2)|}{\operatorname{Re} z} N^{-z-2}\right).$$

Zadanie 3. Wywnioskuj, że $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$.

Szacowania dla ζ . Zaczynamy szacowania od oszacowania wzrostu ζ . Mamy

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(z),$$

gdzie $|\delta_n(z)| \leq \frac{|z|}{n^{\operatorname{Re} z + 1}}$.

Lemat 5. Dla dowolnego $\sigma_0 \in [0, 1)$ i dowolnego $\nu > 0$ istnieje stała C_ν taka, że gdy $\operatorname{Re} z \geq \sigma_0$ i $t := |\operatorname{Im} z| > 1$, zachodzi:

$$|\zeta(z)| \leq C_\nu |z|^{1-\sigma_0+\nu}.$$

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że z jest takie jak w tezie. Czyli $|\delta_n(z)| \geq \frac{|z|}{|z|^{\sigma_0+1}}$. Z drugiej strony,

$$|\delta_n(z)| \leq \int_n^{n+1} \left| \frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right| dx \leq \frac{2}{|z|^{\sigma_0}}.$$

Dla dowolnego $\kappa \in (0, 1)$, mamy

$$|\delta_n(z)| = |\delta_n(z)|^\kappa |\delta_n(z)|^{1-\kappa} \leq \left(\frac{|z|}{n^{\sigma_0+1}}\right)^\kappa \left(\frac{2}{n^{\sigma_0}}\right)^{1-\kappa} \leq \frac{2|z|^\kappa}{n^{\sigma_0+\kappa}}.$$

Kładziemy teraz $\kappa = 1 - \sigma_0 + \nu$ (przyjmujemy, że ν jest małe), i otrzymujemy

$$\frac{2|z|^\kappa}{n^{\sigma_0+\kappa}} = 2|z|^{1-\sigma_0+\nu} \frac{1}{n^{1+\nu}}.$$

Czyli

$$|\zeta(z)| \leq \frac{1}{|z-1|} + 2|z|^{1-\sigma_0+\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^\nu}.$$

Stąd wynika teza. □

Oszacowanie ζ' . Lemat 5 pozwala nam dowieść następującego lematu.

Lemat 6. Przypuśćmy, że $s \geq 1$. Dla dowolnego $\nu > 0$, istnieje C_ν takie, że jeśli $|t| \geq 1$ oraz $z = s + it$, to

$$|\zeta'(z)| \leq C_\nu |t|^\nu.$$

Rozwiązanie. Ze wzoru całkowego Cauchy'ego

$$\zeta'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z,r)} \frac{\zeta(w)}{(w-z)^2} dw.$$

Czyli

$$\zeta'(z) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \zeta(z + re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta.$$

A więc, jeśli $r = \nu$, dla wszystkich $z + re^{i\theta}$ część rzeczywista ma część rzeczywistą co najmniej $1 - \nu$. Czyli gdy

$$|\zeta(z + re^{i\theta})| \leq C_\nu |z|^{2\nu},$$

gdzie zwiększyliśmy stałą C_ν . Ale teraz z tego wynika, że

$$|\zeta'(z)| \leq \frac{C_\nu}{2\nu} |z|^{2\nu}.$$

□

Dowód własności (Z-1). Zaczynamy od lematu.

Lemat 7. Dla dowolnego $\theta \in \mathbb{R}$ zachodzi $3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta \geq 0$.

Rozwiązanie. Zachodzi

$$0 \leq 2(1 + \cos \theta)^2 = 2 + 4 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta = 3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta.$$

□

Z tego lematu wnioskujemy:

Lemat 8. Jeśli $s > 0$ i $t \in \mathbb{R}$, to zachodzi.

$$\log |\zeta(s)^3 \zeta(s + ti)^4 \zeta(s + 2ti)| \geq 0.$$

Rozwiązanie. Niech $z = s + ti$. Wtedy

$$\operatorname{Re} n^{-z} = \operatorname{Re} e^{-z \log n} = \operatorname{Re} e^{-(s+ti) \log n} = e^{-s \log n} \cos(t \log n) = n^{-s} \cos(t \log n).$$

Czyli

$$\begin{aligned} \log |\zeta(s)^3 \zeta(s + ti)^4 \zeta(s + 2ti)| &= 3 \log |\zeta(s)| + 4 \log |\zeta(s + ti)| + \log |\zeta(s + 2ti)| = \\ &= 3 \operatorname{Re} \log \zeta(s) + 4 \operatorname{Re} \log \zeta(s + ti) + \operatorname{Re} \log \zeta(s + 2ti) = \\ &= \sum_n c_n n^{-s} (3 + 4 \cos(t \log n) + \cos(2t \log n)) \geq 0. \end{aligned}$$

Tutaj skorzystaliśmy z tego, że

$$\log \zeta(s) = \sum_p \log \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{p,m} \frac{p^{-ms}}{m}.$$

Jeśli położymy

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{m} : n = p^m \\ 0 : n \text{ ma co najmniej 2 czynniki,} \end{cases}$$

to $\log \zeta(s) = \sum c_n n^{-s}$ oraz $c_n \geq 0$.

□

Przypuśćmy, że istnieje t_0 takie, że $\zeta(1 + it_0) = 0$. Wtedy, $|\zeta(\sigma + it_0)| < |C_1(\sigma - 1)|$ gdy $\sigma \rightarrow 1$, bo ζ jest holomorficzna w $1 + it_0$. Czyli

$$|\zeta(\sigma + it_0)|^4 \leq C_1(\sigma - 1)^4.$$

Ponadto, $|\zeta(\sigma)| \leq |C_2(\sigma - 1)|^{-1}$, gdyż ζ ma w 1 biegun rzędu 1. Ponadto, $\zeta(\sigma + 2it_0)$ jest ograniczone gdy $\sigma \rightarrow 1$. A więc wyrażenie:

$$|\zeta(\sigma + it_0)|^4 |\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + 2it_0)|$$

dąży do zera gdy $\sigma \rightarrow 1^+$. Ale logarytm z tego wyrażenia jest dodatni dla $\sigma > 1$ z Lematu 8. Ups.

Oszacowanie $1/\zeta$. Przypuśćmy, że $s_0 \geq 1$ jest ustalone. Dla dowolnego $\nu > 0$ istnieje C_ν takie, że przy $z = s + it$, $s > s_0$ i $|t| > 1$ zachodzi:

$$\frac{1}{|\zeta(z)|} \leq C_\nu |t|^\nu.$$

W tym celu korzystamy z Lematu 8 to znaczy:

$$|\zeta(s)^3 \zeta(s + ti)^4 \zeta(s + 2ti)| \geq 1$$

Wyrażenie $|\zeta(s + 2ti)|$ szacujemy brutalnie przez $C_\nu |t|^\nu$. Stąd

$$|\zeta(s + ti)^4| \geq C_\nu |t|^{-\nu} \zeta(s)^{-3}.$$

Ale $\zeta(s) \leq \frac{1}{s-1}$, czyli

$$|\zeta(s + ti)^4| \geq C_\nu |t|^{-\nu} (s - 1)^3.$$

A więc

$$(4) \quad |\zeta(s + ti)| \geq C_\nu |t|^{-\nu/4} (s - 1)^{3/4}.$$

Rozpatrujemy dwa przypadki.

Gdy $s - 1 \geq A|t|^{-5\nu}$ dla pewnego A . Wtedy natychmiast $(s - 1)^{3/4} \geq AC_\nu t^{-15\nu/4}$, stąd $|\zeta(s + ti)| \geq AC_\nu |t|^{-4\nu}$. Koniec dowodu.

Gdy $s - 1 \leq A|t|^{-5\nu}$. Wybieramy s' takie, żeby $s' - 1 = A|t|^{-5\nu}$. Piszemy.

$$\zeta(s + ti) \geq \zeta(s' + ti) - |\zeta(s + ti) - \zeta(s' + ti)|.$$

Teraz, $|\zeta(s + ti) - \zeta(s' + ti)| \leq (s' - s)|\zeta'(s'' + ti)|$ z twierdzenia o wartości średniej. Jeśli dobierzemy szacowanie $|\zeta'(s'' + ti)| \leq c''|t|^\nu$, to w połączeniu z (4) mamy

$$|\zeta(s + ti)| \geq C_\nu |t|^{-\nu/4} (s' - 1)^{3/4} - c''(s' - 1)|t|^\nu.$$

Kładziemy $A = (C_\nu/(2c''))^4$. Skoro $s' - 1 = A|t|^{-5\nu}$, mamy

$$C_\nu (s' - 1)^{3/4} |t|^{-\nu/4} = 2c''(s' - 1)|t|^\nu.$$

Stąd

$$|\zeta(s + ti)| \geq c'' |t|^{-\nu} (s' - 1)^{3/4},$$

czyli

$$|\zeta(s + ti)| \geq c'' AC_\nu |t|^{-4\nu}.$$