

Kolokwium z Funkcji Analitycznych

4.12.2025, godz. 15.

Czas pisania: 120 minut.

Każde zadanie piszemy na oddzielnej kartce.

Zadanie 1. Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2 + 1} dx.$$

Zadanie 2. Wyznaczyć liczbę pierwiastków (uwzględniając krotności) funkcji $f(z) = 2z^4 + 8z + \sin(z)$ w pierścieniu $\{z: 1 < |z| < 2\}$.

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie funkcje holomorficzne $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, które dla każdego $n = 2, 3, \dots$ spełniają tożsamość

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n}{n - \mathbf{i}}.$$

Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i każdej takiej funkcji wyznaczyć k -tą pochodną funkcji f w zerze.

Tutaj $\mathbb{D}$ oznacza otwarty dysk o środku w 0 i promieniu 1.

Zadanie 4. Przypuśćmy, że $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzną i że jest bijekcją. Wykazać, że f jest postaci $f(z) = az + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{C}$ oraz $a \neq 0$.