

Reguły gry:

- Zadania są dla osób, które po podliczeniu punktów mają mniej niż 24 punkty z ćwiczeń.
- Osoby mające poniżej 15 punktów, za każde zadanie mogą dostać po 2 punkty (z ćwiczeń), ale maksymalnie do 18 punktów.
- Osoby poniżej 20 punktów mogą dostać maksymalnie 24 punkty: przelicznik około 1.5 punkta za zadanie.
- Osoby powyżej 20 punktów, dostają 1 punkt za zadanie, maksymalnie do 26 punktów.

1. ZADANIA

Zadanie 1. Niech M będzie k -wymiarową zorientowaną podrozmaitością $\mathbb{R}^n$, zaś ω k -formą na M o tej własności, że dla każdego punktu $x \in M$, jeśli $v_1, \dots, v_k$ są wektorami stycznymi do M w punkcie x , $\|v_i\| = 1$, $v_i \perp v_j$ dla $i \neq j$, oraz $v_1, \dots, v_k$ są zorientowaną bazą, to

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = 1.$$

Wykaż, że dla dowolnej funkcji całkowalnej f na M , $\int_M f = \int_M f\omega$. Ta pierwsza całka jest całką z funkcji po mierze Lebesgue'a, ta druga całka to całka z formy.

Wariant minimum: M jest powierzchnią w $\mathbb{R}^3$ a $f = 1$.

Zadanie 2. Niech M będzie powierzchnią w $\mathbb{R}^3$ zadaną przez $F = 0$, gdzie F jest gładką oraz $\nabla F \neq 0$ na M . Określamy

$$\omega_F = \frac{1}{\|\nabla F\|} \left(\frac{\partial F}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial F}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial F}{\partial z} dx \wedge dy \right).$$

Wykaż, że ω_F na dowolnych dwóch wektorach v_1, v_2 stycznych do M w punkcie u , takich, że v_1, v_2 są ortonormalne, przyjmuje wartość 1 lub -1 . Przedyskutuj jaką orientację muszą mieć v_1 i v_2 , żeby była wartość 1.

Zadanie 3. Znajdź jawnym wzorem zamkniętą n -formę w $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$, która nie jest dokładna. Rozwiązanie przypadku $n = 2$ lub $n = 3$ nie jest wystarczające.

Zadanie 4. Podaj przykład dwóch funkcji $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ takich, że $f * g$ nie jest funkcją ciągłą.