

Reguły gry:

- Za zadania punktowane w skali 0-5 można dostać albo 0, 4 albo 5 punktów. Jak jest coś nie do końca dobrze, ale jeszcze nie ma terminu oddania, to odsyłam zadanie do poprawki.
- Wersja z 22.05.2025
- Termin oddania zadań to 30 maja 2025.

1. ZADANIA

Zadanie 1. Niech $F: U \rightarrow V$ będzie odwzorowaniem klasy C^1 między dwoma zbiorami otwartymi $U \subset \mathbb{R}^n$ i $V \subset \mathbb{R}^n$. Przypuśćmy, że F ma następującą własność:

- Dla każdej funkcji klasy C^1 $g: V \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli określimy $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ przez $f(x) = g(F(x))$, to $DF(\nabla f) = \nabla(g)$.

Wykaż, że F jest izometrią, tzn. pochodna w każdym punkcie spełnia $DF(x)^{-1} = DF(x)^T$.

Uwaga. To zadanie pokazuje, że gradient jest pojęciem niezwykle sztywnym.

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli f jest całkowalna i dodatnia i $f(x) = f(-x)$, ale f^2 nie jest całkowalna, to funkcja $x \rightarrow f * f(x)$ nie jest ograniczona w otoczeniu 0. Dokładniej, wykaż, że dla każdego $\delta > 0$ i $N > 0$, zbiór $\{x \in [-\delta, \delta]: f * f(x) > N\}$ ma dodatnią miarę.

Zadanie 3. Opisz konstrukcję (podaj wzór i wyjaśnij) funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która jest całkowalna, ciągła ale jej kwadrat nie jest całkowalny.

Zadanie 4. Niech

$$(1) \quad D_n(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx \right) = \frac{\sin(n + 1/2)x}{2\pi \sin(x/2)}.$$

Wykaż, że jeśli f jest okresowa klasy C^k , $k > 1$, to $D_n * f$ zbiega jednostajnie do f . Tutaj spłot rozumiemy jako całkę od 0 do 2π .

Zadanie 5. Podaj przykład funkcji ciągłej i okresowej f takiej, że $D_n * f$ nie jest punktowo zbieżny do f .

Zadanie 6. Niech $F_n = \frac{1}{n}(D_0 + \dots + D_{n-1})$. Uzasadnij, że F_n jest nieujemna oraz dla każdej funkcji ciągłej i okresowej zachodzi $F_n * f$ zbiega jednostajnie do f .

Zadanie 7. Oblicz spłot funkcji $f(x) = \max(0, 1 - |x|)$ z funkcją $g(x) = \sin x$.

Zadanie 8. Rozważmy współrzędne walcowe (r, ϕ, z) w $\mathbb{R}^3$ i formę $\alpha = \cos r dz + r \sin r d\phi$. Dla jakich R dysk $D_R = \{z = 0, r < R\}$ ma następującą własność:

- Dla każdego $x \in \partial D_R$ zachodzi równość $T_x D_R = \ker \alpha$?

Zadanie 9. Niech A będzie algebrą funkcji klasy $C^\infty[-1, 1]$, odwzorowanie $D: A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłe, oraz spełnia $D(fg) = f(0)Dg + g(0)Df$. Wykaż, że istnieje stała c taka, że $Df(x) = cf'(0)$.

Zadanie 10. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest w L^1 i spełnia $f * g = g$ dla wszystkich funkcji g ciągłych o zwartym nośniku. Wykaż, że f jest równa zero prawie wszędzie na każdym przedziale $[a, b]$. To ostatnie ma się przełożyć na stwierdzenie, że taka f nie istnieje.

Zadanie 11. Czy istnieje funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ z L^1 , która spełnia $f * g(0) = g(0)$ dla wszystkich funkcji g ciągłych i o zwartym nośniku?