

Zadanie 1. Niech $\pi/8 \leq x, y, z \leq \pi/4$. Udowodnij, że

$$\left(1 + \operatorname{tg} \left(\frac{3x + 2y + z}{6} \right)\right)^6 \leq (1 + \operatorname{tg} x)^3 (1 + \operatorname{tg} y)^2 (1 + \operatorname{tg} z).$$

Kiedy zachodzi równość?

Zadanie 2. Niech $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będzie rosnącą odwracalną funkcją wklęsłą spełniającą warunki $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$. Udowodnij nierówność

$$f(x)f^{-1}(x) \leq x^2$$

dla $x \in [0, 1]$.

Zadanie 3. Niech

$$f(x) = \frac{-2}{\ln x - 2}.$$

Wyznacz przedziały na których funkcja f jest wypukła. Czy istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że funkcja

$$f^n = f \cdot f \cdot \dots \cdot f$$

(iloczyn) jest wypukła na przedziale $(0, e^2)$?

Zadanie 4. Rozważmy funkcję różniczkowalną $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ taką, że funkcja

$$x \mapsto \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

jest rosnąca. Wykaż, że dla dowolnych $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot \dots \cdot f(a_n)} \geq f(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}).$$

Zadanie 5. Przypuśćmy, że $x_1, \dots, x_n$ są dodatnie. Wykaż, że

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^{x_1 + \dots + x_n} \leq x_1^{x_1} \dots x_n^{x_n}.$$

Zadanie 6. Niech $a_1, \dots, a_n$ i $m_1, \dots, m_n$ będą dwoma ciągami liczb dodatnich. Niech α, β będą takie że

$$\begin{aligned} a_1 m_1 + \dots + a_n m_n &= \alpha, \\ a_1^2 m_1 + \dots + a_n^2 m_n &= \beta^2. \end{aligned}$$

Wykaż, że

$$m_1 \sqrt{a_1} + \dots + m_n \sqrt{a_n} \geq \frac{\alpha^{3/2}}{\beta}.$$