Obliczanie wyznaczników macierzy

1. Schemat Sarrusa dla macierzy 2x2 i 3x3

W przypadku macierzy 2x2 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ wyznacznik $detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Obliczając wyznacznik macierzy 3x3 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ możemy ją zapisać w następujący sposób poprzez dodanie z prawej strony dwóch pierwszych kolumn $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

Następnie dodajemy iloczyny elementów będących na trzech przekątnych z lewej do prawej i odejmujemy od nich iloczyny trzech przekątnych z prawej do lewej:

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Przykłady

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 6 - 4 = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 1 \times 1 \times 4 + 2 \times 5 \times 3 + 3 \times 4 \times 2 - 3 \times 1 \times 3 - 1 \times 5 \times 2 - 2 \times 4 \times 4 =$$
$$= 4 + 30 + 24 - 9 - 10 - 32 = 48 - 46 = 2$$

2. Operacje na wierszach i kolumnach

Każdy wyznacznik możemy obliczyć poprzez doprowadzenie macierzy do postaci schodkowej (górno-trójkątnej/dolno-trójkątnej) operacjami wierszowymi lub kolumnowymi (nie zmieniają one wartości wyznacznika).

Uwaga 1! Każda jednorazowa zamiana wierszy miejscami powoduje przemnożenie wyznacznika macierzy przez (-1).

Uwaga 2! Podzielenie danego wiersza przez dowolną liczbę *a* powoduje przemnożenie wyznacznika przez tą liczbę.

Uwaga 3! Wyznacznik macierzy górno-trójkątnej (lub dolno-trójkątnej) jest równy iloczynowi elementów będących na głównej przekątnej tej macierzy.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}$$ - macierz górno-trójkątna

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}$$ - macierz dolno-trójkątna

Przykład wyznacznika macierzy górno-trójkątnej

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

Przykład wyznacznika macierzy dolno-trójkątnej

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 9 & 4 & 0 \\ 11 & 7 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

Przykład obliczania wyznacznika z zastosowaniem operacji na wierszach:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ stosując operacje $w_2 - 2w_1; w_3 - w_1$ otrzymujemy

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ po kolejnych operacjach $w_1 - w_3; w_2 - 2w_3;\ w_4 - w_3$ uzyskamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} w_2 - 2w_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} w_1 - 2w_2; w_4 - 2w_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Teraz dzielimy w_4 przez 7 zatem musimy pomnożyć wyznacznik przez 7

$7 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ aby otrzymać macierz górnotrójkątną zamieniamy miejscami $w_2\ z\ w_3$ zatem mnożymy cały wyznacznik przez (-1). Otrzymujemy wtedy

$$7 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-7) \times (1 \times 1 \times 1 \times 1) = (-7)$$

3. Rozwiniecie Lapace'a

Rozwinięcie Laplace'a możemy stosować względem i-tego wiersza:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \times a_{i1} \times \det(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n} \times a_{in} \times \det(A_{in})$$

Lub względem j-tej kolumny:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+j} \times a_{1j} \times \det\left(A_{1j}\right) + \cdots + (-1)^{n+j} \times a_{nj} \times \det\left(A_{nj}\right)$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{stosujemy rozwinięcie Laplace'a względem } w_4$$

$$= (-1)^{4+1} \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{4+4} \times 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^6 \times 1 \times (2 + 0 + 4 - 0 - 1 - 4) + (-1)^7 \times 1 \times (0 + 0 + 4 - 0 - 1 - 4) =$$

$$= 1 + (-1) \times (-1) = 2$$

Rozwinięcie Laplace'a stosujemy zazwyczaj dla macierzy większych niż 3x3. Najprostszym sposobem obliczenia wyznacznika dla takich macierzy przy pomocy tej metody jest zastosowanie takich operacji elementarnych na wierszach i kolumnach (nie zmieniają one wartości wyznacznika macierzy) aby otrzymać wiersz (lub kolumnę), w którym występuje tylko jeden niezerowy element. W ten sposób wzór na rozwinięcie Laplace'a uprości się do jednej składowej dla tego niezerowego elementu.

4. Macierz blokowa

Jeśli macierz wymiaru $n \times n$ możemy podzielić na kilka innych macierzy według schematu

$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ i macierz B i/lub C składają się z samych zer to $\det(M) = \det(A) \times \det(D)$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (1 - 2) \times (3 + 2 + 1 - 1 - 6 - 1) = (-1) \times (-2) = 2$$

5. Macierz diagonalna

Szczególnym przypadkiem obliczania wyznacznika macierzy $n \times n$ jest przypadek macierzy diagonalnej. Jest to taka macierz, której wszystkie elementy poza główną przekątną są równe 0.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}$$

Przykład

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

6. Własności wyznaczników

- Jeżeli dowolny wiersz lub kolumna danej macierzy składa się z samych zer, to $\det(A) = 0$
- Jeżeli w macierzy kwadratowej mamy dwa identyczne wiersze lub kolumny, to $\det(A) = 0$
- Wyznacznik macierzy kwadratowej A i wyznacznik macierzy transponowanej A są równe $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$
- Macierz odwrotną A^{-1} do macierzy A możemy wyznaczyć wtedy i tylko wtedy gdy $\det(A) \neq 0$
- Wyznacznik macierzy odwrotnej jest równy odwrotności wyznacznika tej macierzy $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$