1. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$

zmienne zależne

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{w_1-w_2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_2-x_3-x_4=0 \Rightarrow x_3=2x_2-x_4 \Rightarrow x_3=2x_1-x_4 \\ x_1-x_2=0 \Rightarrow x_1=x_2 \end{cases}$$

$(x_1, x_1, 2x_1-x_4, x_4) = x_1(1,1,2,0) + x_4(0,0,-1,1)$

Bazą są wektory: $(1,1,2,0), (0,0,-1,1)$

2. Wektory: $(1,1,2,0), (0,0,0,1), (3,3,6,-2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & -2 \end{bmatrix} w_3-3w_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} w_3+2w_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bazą są wektory: $(1,1,2,0), (0,0,0,1)$

3. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$

Wektory: $(1,2,3,0), (1,1,1,1)$

$\begin{cases} 1+2-3=0 \ ✓ \\ 1-2 \neq 0 \ - \end{cases}$

Wektor $(1,2,3,0)$ nie należy do układu równań.

$\begin{cases} 1+1-1-1=0 \ ✓ \\ 1-1=0 \ ✓ \end{cases}$

Wektor $(1,1,1,1)$ należy do układu równań

4. $u=(1,1,1,1)$
$v_1=(1,1,2,0)$
$v_2=(0,0,-1,1)$

$a(1,1,2,0)+b(0,0,-1,1)=(1,1,1,1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1-w_2 \\ \sim \\ w_3+w_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} w_2-2w_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

Odp: $(1,1)$

5. Bazy z ① i ② Czy można znaleźć bazę $\mathbb{R}^4$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1-w_3 \\ w_2-w_4 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w_3+2w_2 \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy nie jest równy 4, więc te bazy nie rozpinają $\mathbb{R}^4$.

6. Baza z ①

$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$
$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,1,2,0)$ i $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,-1,1)$

$\begin{cases} a_1+a_2+2a_3=0 \\ -a_3+a_4=0 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} a_1=-a_2-2a_3 \\ a_4=a_3 \end{cases}$ $(-a_2-2a_3, a_2, a_3, a_3)=a_2(-1,1,0,0)+a_3(-2,0,1,1)$

$\begin{cases} -x_1+x_2=0 \\ -2x_1+x_3+x_4=0 \end{cases}$

7. Niech przekształcenie liniowe φ będzie zadane wzorem:

$\varphi((x_1,x_2,x_3))=(3x_1+2x_2+x_3, 2x_1+x_2+2x_3, 5x_1+3x_2+3x_3)$

$M(\varphi)_{st}^{st}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

8.

$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

A^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ w_2-2w_1 \\ w_3-3w_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} w_1+w_3 \\ \sim \\ w_3:(-1) \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right] \qquad A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

9. $A=\{(0,1,0),(1,2,3),(1,2,2)\}$, $B=\{(2,1,0),(0,1,1),(1,1,0)\}$

9.1 $M(id)_A^{st}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

9.2 Tak jak w ⑧

$M(id)_{st}^{A}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9.3 $M(id)_A^B$?

Opcja I: $M(id)_{st}^{B} \cdot M(id)_A^{st}$

$$M(id)_{st}^{B}=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] w_2-w_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{w_1-w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] w_2-w_1 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$M(id)_{st}^{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$M(id)_A^B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

Opcja II

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] w_2-w_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{w_1-2w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} w_1\cdot(-1) \\ w_2+w_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

$M(id)_A^B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

10. Wiemy, że:

$M(id)_B^D=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, $M(id)_C^A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $M(\varphi)_A^B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$M(\varphi)_C^D$:

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -19 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$M(\varphi)_C^D=\begin{bmatrix} -11 & -19 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

11. $\ker(\varphi)$:

$M(\varphi)_{st}^{st}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} w_3-w_2 \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1-w_2 \\ w_3-w_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} w_2-2w_1 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} w_1+w_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} x+3z=0 \\ -y+4z=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-3z \\ y=4z \end{cases}$

$(-3z, 4z, z)=z(-3,4,1)$

$\ker\varphi=(-3,4,1)$

12. $\mathrm{im}(\varphi)$:

$M(\varphi)_{st}^{st}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} w_2-2w_3 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} :(-3) \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underset{w_3-2w_2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{w_1-3w_3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{w_1-2w_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{im}\,\varphi=\{(0,1,1),(1,0,1)\}$

13.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y+z \\ 2x+y+2z \\ 5x+3y+3z \end{pmatrix}$$

$\varphi((x,y,z))=(3x+2y+z, 2x+y+2z, 5x+3y+3z)$