Kroki rozwiązywania zadań

Joanna Załęska & Hrykorii Zaika

December 2023

Contents

1 Jak policzyć bazę przestrzeni opisanej układem równań

1. Wpisać równania do wierszy macierzy (razem z zerami)
2. Zeschodkować otrzymaną macierz
3. Wyznaczyć m zmiennych związanych oraz $n - m$ zmiennych wolnych, gdzie m jest liczbą niezerowych wierszy a n jest liczbą zmiennych
4. Zapisać rozwiązanie ogólne używając zmiennych wolnych
5. Zapisać rozwiązanie jako sumę wektorów, każdy z których zależy od tylko jednej zmiennej
6. W każdym składniku powyższej sumy wyciągnąć zmienną przed nawias

Usuwając zmienne przed nawiasem, otrzymamy sumę stałych wektorów. Te wektory tworzą szukaną bazę.

2 Jak wyznaczyć bazę przestrzeni rozpiętej przez wektory

1. Wpisać wektory do wierszy macierzy
2. Zeschodkować otrzymaną macierz
3. Bazę stanowią niezerowe wiersze zeschodkowanej macierzy

3 Jak sprawdzić czy wektor należy do układu równań

1. Podstawić wektor (współrzędne wektora - $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) do układu równań
2. Rozwiązać i sprawdzić czy wszystkie równania są spełnione

4 Jak sprawdzić współczynniki wektora w bazie

Zakładając że współrzędne w bazie standardowej wektora to $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, a nowa baza składa się z wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, gdzie

$$\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}),\ \mathbf{v}_2 = (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}),\ \ldots,\ \mathbf{v}_n = (v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{nn})$$

Szukamy takich współczynników a_i przy każdym wektorze $\mathbf{v}_i$ z powyższej bazy, że

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{u}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1(v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}) + a_2(v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}) + \ldots + a_n(v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{nn}) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

$$\Updownarrow$$

$$(v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n})a_1 + (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n})a_2 + \ldots + (v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{nn})a_n = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & & & \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Wystarczy więc rozwiązać układ równań który odpowiada powyższemu równaniu macierzowemu.

1. Zapisać wektory $\mathbf{v}_i$ bazy w kolumnach macierzy
2. Uzupełnić macierz o kolumnę z elementami wektora $\mathbf{u}$
3. Zeschodkować otrzymaną macierz
4. Znaleźć rozwiązanie układu równań odpowiadającego zeschodkowanej macierzy

Rozwiązaniem układu będą współczynniki $\mathbf{u}$ w nowej bazie.

5 Jak sprawdzić czy z wektorów dwóch przestrzeni można znaleźć bazę $\mathbb{R}^n$

1. Zapisać wektory baz obu przestrzeni do macierzy jako wiersze
2. Sprawdzić czy rząd tej macierzy jest równy n (np. zeschodkować i sprawdzić liczbę niezerowych wierszy)

6 Jak opisać przestrzeń $lin(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ układem równań

1. Wypisać wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ do wierszy macierzy
2. Zeschodkować macierz. Niezerowe wiersze będą bazą V
3. Odrzucić zerowe wiersze i uzupełnić tak skróconą macierz o kolumnę zer
4. Rozwiązać układ który odpowiada otrzymanej macierzy tak samo jak w p. 1.

7 Jak znaleźć $M(\phi)_{st}^{st}$ dla ϕ danego wzorem

Dla każdego z m wymiarów wzoru przekształcenia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, należy podstawić współczynniki przy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ do wierszy macierzy,

$$\begin{aligned}\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n,\\ &\vdots\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)\\ &\downarrow\\ M(\phi)_{st}^{st} = &\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

8 Jak znaleźć macierz odwrotną

1. Wypisać macierz A
2. Uzupełnić (narysować kreskę po prawej stronie i zapisać za kreską) o macierz identyczności o tych samych wymiarach co macierz A
3. Zeschodkować całą otrzymaną macierz tak, aby po stronie, gdzie wcześniej była wypisana macierz A (lewej), została macierz identyczności
4. Macierz, którą otrzymamy po prawej stronie będzie macierzą odwrotną

9 Jak znaleźć:

9.1 $M(id)_A^{st}$

Wypisać wektory z bazy A do kolumn macierzy

9.2 $M(id)_{st}^A$

Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $M(id)_A^{st}$

9.3 $M(id)_A^B$

Pierwsza opcja to mnożenie macierzy $M(id)_{st}^B \cdot M(id)_A^{st}$. Druga opcja to postępowanie jak w p. 8, po lewej stronie wpisujemy w kolumnach bazę B, po prawej (zamiast macierzy identyczności) bazę A i następnie analogicznie jak w przypadku odwracania macierzy.

10 Jak znaleźć $M(\phi)_C^D$ znając $M(\phi)_A^B$

$$M(\phi)_C^D = M(id)_B^D \cdot M(\phi)_A^B \cdot M(id)_C^A$$

11 Jak znaleźć $ker(\phi)$

Sprawdzić jakie wektory ϕ przekształca w wektor zerowy:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Czyli znaleźć rozwiązania układu równań który odpowiada macierzy przekształcenia - $M(\phi)_{st}^{st}$, gdzie kolumna uzupełniającą jest wektor zerowy. Jak rozwiązać taki układ jest podane w p. 1.

12 Jak znaleźć $im(\phi)$

1. Znaleźć macierz przekształcenia $M(\phi)_{st}^{st}$
2. Znaleźć jej transpozycję (czyli zamienić wiersze z kolumnami) - $(M(\phi)_{st}^{st})^T$
3. Zeschodkować otrzymaną macierz
4. Baza $im(\phi)$ to niezerowe wiersze zeschodkowanej macierzy

13 Jak znaleźć wzór na ϕ znając $M(\phi)_{st}^{st}$

Pomnożyć $M(\phi)_{st}^{st}$ przez wektor o odpowiedniej liczbie zmiennych $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, gdzie m to liczba kolumn macierzy $M(\phi)_{st}^{st}$