FAN*

X seria zadań domowych,
termin zadań ustnych: 7 stycznia, godzina 8.30

Termin zadań pisemnych: 9 stycznia, godzina 13.30 – prace można zostawiać w kopercie wiszącej przy drzwiach do pokoju 5540.

1. Niech $f(z) = \frac{z-1}{z^3+1}$ i niech D będzie (domkniętym) czworokątem o wierzchołkach w ± 1 i $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Czy istnieje ciągła gałąź logarytmu funkcji f na zbiorze $\mathbb{C} \setminus D$?

2. Niech $\lambda > 1$. Wykazać, że równanie $z + e^{-z} = \lambda$ ma dokładnie jedno rozwiązanie o dodatniej części rzeczywistej.

3. Określić liczbę pierwiastków wielomianu $P(z) = z^4 + 3z + 3$ w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$?

4 (P)**.**
(a) Dane są wielomiany P, Q stopnia n, przy czym wszystkie pierwiastki Q leżą w $\mathbb{D}$. Wykazać, że jeśli $|P| < |Q|$ na $\partial\mathbb{D}$ to $|P'(z)| < |Q'(z)|$ dla każdego $|z| \geqslant 1$.
(b) Dany jest wielomian P stopnia n. Wykazać, że dla każdego $k = 1, 2, \dots, n$ zachodzi $\max_{|z|=1} |P^{(k)}(z)| \leqslant \frac{n!}{(n-k)!} \max_{|z|=1} |P(z)|$.

5 (P)**.** Załóżmy, że P i Q są wielomianami różnymi od wielomianu zerowego oraz $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wykazać, że równanie $P(z)e^z = aQ(z)$ ma nieskończenie wiele (parami różnych) rozwiązań w $\mathbb{C}$.

6 (P)**.** Dany jest taki obszar U że $\overline{\mathbb{D}} \subset U$ oraz różna od stałej funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C}$.

(a) Wykazać, że istnieje $c > 0$, takie że dla każdego $|\zeta| < c$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $z_0 = z_0(\zeta) \in \mathbb{D}$ równania $z = \zeta f(z)$.
(b) Wykazać, że dla ustalonego $|\zeta| < c$ punkt $z_0 = z_0(\zeta)$ z poprzedniego podpunktu spełnia
$$z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} z \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz,$$
gdzie $F(z) = z - \zeta f(z)$.
(c) Wykazać, że
$$z_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n (f^n)^{(n-1)}(0)}{n!}$$
w $\{\zeta : |\zeta| < c\}$, gdzie $f^n(z) = (f(z))^n$, zaś $g^{(n)}$ oznacza n-tą pochodną funkcji g.