FAN*

IX seria zadań domowych,
termin: 10 grudnia, godzina 8.30

1. Obliczyć
$$\int_{C(0,2)} \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z}\, dz.$$

2 (P)**.** Dane są $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ oraz $a, b \in D(0,r)$. Niech Log oznacza główną gałąź logarytmu na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Obliczyć
$$\int_{C(0,r)} z^n \operatorname{Log}\Big(\frac{z-a}{z-b}\Big)\, dz.$$

3. Obliczyć
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}.$$

4. Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ jest meromorficzna i ma jedynie skończenie wiele biegunów $a_1, \ldots, a_m$, przy czym $a_1, \ldots, a_m \notin \mathbb{Z}$. Wykazać, że jeśli $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$, to
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n f(n) = -\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}\Big(a_k, \frac{\pi f(z)}{\sin(\pi z)}\Big).$$

5. Dane jest $a \notin i\mathbb{Z}$. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}.$$

6 (P)**.** Obliczyć
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)\cosh(\frac{\pi x}{2})}\, dx.$$

7 (P)**.** Wykazać, że
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$