FAN*

VIII seria zadań domowych,
termin: 3 grudnia, godzina 8.30

1. Dany jest wielomian P stopnia n spełniający $|P| \leqslant M$ na $\mathbb{D}$. Wykazać, że $|P(z)| \leqslant M|z|^n$ dla każdego z spełniającego $|z| \geqslant 1$.

2. Znaleźć szereg Taylora wokół 0 funkcji $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ oraz wyznaczyć jego promień zbieżności. Rozstrzygnąć, czy f jest równa swojemu szeregowi Taylora w (otwartym) kole zbieżności.

3 (P)**.** Niech $0 \leqslant r_1 < R_1 \leqslant \infty$, $0 \leqslant r_2 < R_2 \leqslant \infty$, $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k$ na $\{z \in \mathbb{C}\colon r_1 < |z| < R_1\}$ oraz $g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ na $\{z \in \mathbb{C}\colon r_2 < |z| < R_2\}$. Wykazać, że jeśli dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ szereg $\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l c_{k-l} =: a_k$ jest zbieżny, to $f(z)g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ na $\{z \in \mathbb{C}\colon \max\{r_1, r_2\} < |z| < \min\{R_1, R_2\}\}$.
Czy to prawda, że (przy warunkach z pierwszego zdania) szereg $\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l c_{k-l}$ musi być zbieżny dla każdego $k \in \mathbb{Z}$?

4 (P)**.** Wyznaczyć szereg Laurenta wokół punktu $z_0 = i$ funkcji $\frac{\log z}{z-i}$, gdzie log jest gałęzią logarytmu w otoczeniu punktu i, taką że $\log(i) = -\frac{2023\pi i}{2}$. Wyznaczyć pierścień zbieżności otrzymanego szeregu.

5 (P)**.** Obliczyć residua funkcji $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{i-z}$ w każdym (skończonym) izolowanym punkcie osobliwym funkcji f. Należy w sposób jawny – bez użycia szeregów czy całek – wyrazić część rzeczywistą i urojoną każdego z obliczonych residuów.

6. Załóżmy, że $M, p > 0$ oraz że f jest funkcją całkowitą spełniającą $|f(z)| \leqslant M|z|^p$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Wykazać, że f jest wielomianem.

7. Czy istnieje funkcja holomorficzna w otoczeniu punktu 0 spełniająca $f(1/n) = e^{-n}$ dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$?