FAN*

VII seria zadań domowych,
termin: 26 listopada, godzina 8.30

1 (P – zadanie za dwa **dodatkowe** punkty, termin oddania: 10 XII)**.** Dana jest funkcja holomorficzna $f\colon A \to \mathbb{C}$, gdzie $A = \{z \in \mathbb{C}\colon R_1 < |z| < R_2\}$. Niech $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ dla $r \in (R_1, R_2)$. Wykazać, że funkcja $r \mapsto \ln(M(e^r))$ jest wypukła na $(\ln R_1, \ln R_2)$.
Wskazówka: nie znam rozwiązania, które wykorzystuje zadanie 6 z ćwiczeń 12 XI.

2. Niech $\alpha \in \mathbb{C}$. Wykazać, że $(1+z)^\alpha := e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ na $\mathbb{D}$, gdzie $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ oraz Log jest gałęzią główną logarytmu na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

3. Wyznaczyć wszystkie holomorficzne bijekcje $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ takie że $f^{-1}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ jest holomorficzna[1] oraz $f(0) = 0$.

4. Wyznaczyć wszystkie holomorficzne bijekcje $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ takie że $f^{-1}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ jest holomorficzna.

5. Wyznaczyć wszystkie (izolowane) osobliwości (na $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) funkcji f i określić rodzaj/typ każdej z nich[2] dla:
a) $f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z}\Big(\cos\frac{1}{z} - 1\Big)$; b) $f(z) = \frac{z(1-z)(e^z+e^{-z})}{e^z - e^{-z}}$.

6 (P)**.** Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorficzna w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i ograniczona na $\{|z| > 1\}$. Wykazać, że $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{zf(w)}{w(z-w)}\,dw$ dla każdego z spełniającego $|z| > 1$. Obliczyć $\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{zf(w)}{w(z-w)}\,dw$, gdy z spełnia $|z| < 1$.

7 (P)**.** Wykazać, że jeśli funkcje całkowite f oraz g spełniają $|f| \leqslant |g|$ na $\mathbb{C}$, to $f = cg$ na $\mathbb{C}$ dla pewnej stałej $c \in \overline{\mathbb{D}}$.

8 (P)**.** Niech U będzie obszarem w $\mathbb{C}$. Załóżmy, że $f\colon U \to \mathbb{C}$ jest taka, że f^2 i f^3 są holomorficzne w U. Wykazać, że f jest holomorficzna w U.

[1] Jak się przekonamy później, holomorficzność f^{-1} wynika automatycznie z założenia, że f jest holomorficzną bijekcją.

[2] Jeśli osobliwość jest biegunem, należy wyznaczyć jego rząd.